

УДК 539.3

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
УПРУГОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ,
КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С УПРУГИМ ИНЕРЦИОННЫМ ЭЛЕМЕНТОМ**

ВОРОВИЧ Е. И., ПРЯХИНА О. Д., ТУКОДОВА О. М.

Многие задачи практики приводят к необходимости учитывать упругоинерционные свойства системы, через которую передается вибрация на фундамент. В публикуемой работе рассматривается упругая полуограниченная среда, на которую действует жесткий штамп. Через штамп среда соединена с упругим инерционным элементом и вся система подвергается некоторому периодическому воздействию. Характерным для данной системы является наличие некоторой критической частоты ω_* , такой, что при $\omega > \omega_*$ происходит распространение незатухающих колебаний, уносящих энергию на бесконечность.

В данной работе¹ устанавливается для рассматриваемых систем новое механическое явление: при некоторых соотношениях упругих и инерционных характеристик система имеет конечное число резонансных частот $\omega < \omega_*$, на которых система резонирует как упругое тело конечных размеров. Детально исследованы две задачи: колебания массивного штампа на упругой среде, соединенного с упругой инерционной системой, и плоские колебания массивного штампа при нецентральной приложении возбуждающей силы.

1. Пусть на упругую полуограниченную среду действует полосовой штамп массы m_2 с прямолинейным основанием. В качестве упругой среды можно выбрать полосу, слой, цилиндр, пакет слоев и так далее. Будем предполагать, что трение между штампом и средой отсутствует. С штампом m_2 соединено посредством упругой связи жесткости k тело массой m_1 (фиг. 1). Система подвергается действию вертикальной периодической силы $P_0 = P \exp(-i\omega t)$, приложенной к массе m_1 .

Перемещение массивного штампа с инерционным элементом и волновое поле, возбуждаемое в среде, определяются из совместного решения уравнений движения штампа и среды, при этом на поверхности среды $z=0$ в области $\Omega: |x| \leq a$ контакта штампа со средой должно выполняться равенство амплитуд смещений точек подошвы штампа u_2 и точек поверхности среды w :

$$u_2(x) = w(x, 0) \quad (|x| \leq a, z=0) \quad (1.1)$$

Уравнения движения штампа (в безразмерных амплитудных параметрах) имеют вид

$$\begin{aligned} -m_1 \kappa_2^2 u_1 &= -k(u_1 - u_2) + P, & \kappa_2^2 &= \rho \omega^2 h^2 / \mu \\ -m_2 \kappa_2^2 u_2 &= k(u_1 - u_2) - R, & R &= \int_a^b q(x) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь u_1, u_2 — амплитуды вертикальных перемещений, соответственно, тела m_1 и штампа m_2 , R — реакция основания штампа, $q(x)$ — нормальные напряжения, возникающие в среде от действия силы P , ρ — плотность.

¹ Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Возбуждение волн массивным штампом на упругом слое. Ростов н/Дону, 1984. — 13 с. Деп. в ВИНТИ 3.12.84; № 7641-84.

Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Некоторые динамические смешанные задачи взаимодействия массивных штампов с полуограниченными средами. — В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Тез. докл. III Всес. конф. Харьков, 1985. Изд-во ХГУ, 1985, с. 188.

среды, ω — частота, μ — параметр Ламе, h — характерный размер среды (толщина слоя, например).

Перемещения точек среды $w(x, z)$ определим, решив дифференциальные уравнения Ламе совместно с граничными условиями задачи методом интегральных преобразований. В результате получим интегральное представление решения для $w(x, z)$. С учетом этого контактное условие (1.1) приводит к соотношению

$$u_2(x) = \int_{-a}^a k(x-\xi) q(\xi) d\xi \quad (|x| \leq a, z=0) \quad (1.3)$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(u) \exp(-iux) du \quad (1.4)$$

Выбор контура σ диктуется принципом предельного поглощения в соответствии с правилами, указанными в [1]. Вид функции $K(u)$ определяется типом среды и обладает свойствами аналитичности, четности, вещественности при вещественном аргументе и допускает представление указанной функции в виде отношения двух целых функций с сохранением поведения на бесконечности вида $c|u|^{-1}$, $|u| \rightarrow \infty$.

Интегральное уравнение первого рода (1.3) при указанных свойствах ядра однозначно разрешимо в $L_{\alpha}(-a, a)$, $\alpha > 1$. Критерии единственности определены в [1].

В [2] методом фиктивного поглощения построено решение интегрального уравнения

$$\int_{-a}^a k(x-\xi) q_{\eta}(\xi) d\xi = \exp(-i\eta x) \quad (|x| \leq a, \text{Im } \eta = 0) \quad (1.5)$$

с ядром вида (1.4). Этот метод позволяет получить эффективное решение, описывающее поведение контактных напряжений одновременно во всех точках области контакта как внутри, так и на границе штампа.

Решение интегрального уравнения (1.3), соответствующее единичному перемещению штампа как жесткого целого $q_1(x)$, получим положив в $q_{\eta}(x)$ параметр $\eta=0$. В силу линейности задачи из (1.1) получим формулы для определения перемещений u_1, u_2 в виде

$$u_1 = P(k_1(\kappa_2) + k - m_2 \kappa_2^2) / D, \quad u_2 = kP / D \quad (1.6)$$

$$D = (k - m_1 \kappa_2^2) (k_1(\kappa_2) + k - m_2 \kappa_2^2) - k^2$$

$$k_1(\kappa_2) = \int_{-a}^a q_1(x) dx, \quad q_1(x) = q_1(x, \kappa_2)$$

Очевидно, что $k_1(\kappa_2) = Q_{\eta}(0)$ при $\eta=0$, где $Q_{\eta}(u)$ — трансформанта Фурье решения $q_{\eta}(x)$ (u — параметр преобразования). Приведем окончательный вид этой функции

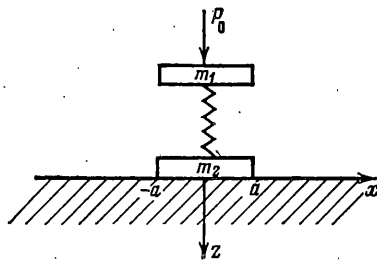
$$k_1(\kappa_2) = K^{-1}(0) \left\{ \frac{2aB+1}{Bc} - \frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{k=1}^{2n} c_k [F(0, x_k) + F(0, -x_k)] \right\} \quad (1.7)$$

На основании метода фиктивного поглощения коэффициенты c_k ($k=1, \dots, 2n$) определяются из решения следующей линейной алгебраической системы уравнений порядка $2n$:

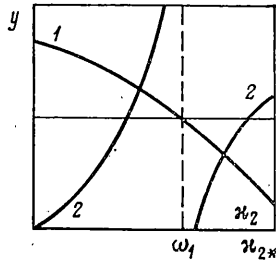
$$\sum_{k=1}^{2n} c_k [\sqrt{B+iu} \exp(iau) F(u, x_k) + \sqrt{B-iu} \exp(-iau) F(-u, -x_k)] =$$

$$= \frac{\sqrt{B}}{icu} [\exp(iau) \sqrt{B+iu} \operatorname{erf} \sqrt{2a(B+iu)} -$$

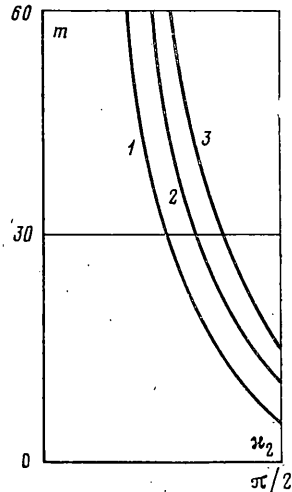
$$- \exp(-iau) \sqrt{B-iu} \operatorname{erf} \sqrt{2a(B-iu)}], \quad u = \pm z_l \quad (l=1, \dots, n)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$F(u, x_h) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\exp[ip_j(a-x_h)]}{2p_j(p_j+u)\sqrt{B-ip_j}},$$

$$\alpha_j = \prod_{h=1}^n (p_j^2 - z_h^2) \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n (p_j^2 - p_h^2)$$

Здесь B — произвольный параметр, выбор которого осуществляется в соответствии с требованиями метода фиктивного поглощения ($B \gg 1$), erf — интеграл вероятности, z_h , p_h — соответственно, действительные и конечное число комплексных нулей, полюсов функции $K(u)$, расположенных в верхней полуплоскости, $x_h = \pm y_h$, y_h — точки, делящие интервал $(0, a)$ на равные отрезки.

Отметим, что при частотах, меньших критической частоты распространения волн в указанных выше средах, $k_1(\kappa_2)$ является вещественной функцией, а при $\kappa_2 > \kappa_{2*}$ становится комплексной. Поэтому представляет интерес изучение частот в области $\kappa_2 \leq \kappa_{2*}$, на которых возможно обращение в бесконечность амплитуды перемещений (1.6), т. е. те соотношения характеристик задачи, при которых уравнение $(k - m_1 \kappa_2^2)(k_1(\kappa_2) + k - m_2 \kappa_2^2) - k^2 = 0$ имеет действительные корни. Преобразуем это уравнение к виду $k_1(\kappa_2) = k \kappa_2^2 (1/(\omega_1^2 - \kappa_2^2) + 1/\omega_2^2)$, $\omega_1^2 = k/m_1$, $\omega_2^2 = k/m_2$ ($k=0$).

В качестве упругой среды рассмотрим слой, жестко сцепленный с недеформируемым основанием. В этом случае приведенная критическая частота распространения волн в слое $\kappa_{2*} = \pi/2$. Вид функции $K(u)$ дается в [2] и поэтому здесь не приводится.

Результаты численного анализа показывают, что функция $k_1(\kappa_2)$ имеет вид, приведенный на фиг. 2 (кривая 1). В результате отыскание критических частот, удовлетворяющих уравнению $D=0$, сводится к отысканию точек пересечения кривых $y = k_1(\kappa_2)$ и $y = k \kappa_2^2 (1/(\omega_1^2 - \kappa_2^2) + 1/\omega_2^2)$ (кривая 2 на фиг. 2).

Пусть $m_1 > k/\kappa_{2*}^2$, $k > 0$ ($\omega_1 < \kappa_{2*}$). В этом случае будем иметь две точки пересечения (два резонанса) при $m_2 \geq m_{2*}$, где m_{2*} определяется формулой $m_{2*} = k_1(\kappa_{2*})/\kappa_{2*}^2 - k m_1 / (k - \kappa_{2*}^2 m_1)$. Можно убедиться также в том, что при

$$\frac{k}{\kappa_{2*}^2 (1 + k/k_1(\kappa_{2*}))} \leq m_1 \leq \frac{k}{\kappa_{2*}^2} \quad (k > 0)$$

система будет иметь один резонанс при любой массе m_2 штампа, контактирующего с упругой средой.

Наконец, при $m_1 < k[\kappa_{2*}^2(1+k/k_1(\kappa_{2*}))]^{-1}$ ($k > 0$) и $m_2 \geq m_{2*}$ система имеет один резонанс, а при $m_2 < m_{2*}$ резонанса не имеет.

Очевидно, что при $k=0$ система имеет один резонанс при $m_2 \geq m_{2*} = k_1(\kappa_{2*})/\kappa_{2*}^2$, а при $m_2 < m_{2*}$ резонансных частот нет.

Таким образом, подробный анализ показывает, что при $\kappa_2 \leq \kappa_{2*}$ ($\omega \leq \omega_*$) система может иметь не более двух изолированных резонансных частот. Отметим, что если сила P_0 приложена к штампу с массой m_2 , то свойства системы изменятся, но резонансные частоты останутся прежними.

2. Пусть на жесткий массивный полосовой штамп ширины $2a$ и с плоским основанием действует гармоническая вертикальная нагрузка $P \exp(-i\omega t)$, приложенная в некоторой точке на расстоянии l от вертикальной оси, проходящей через центр тяжести штампа. Штамп контактирует без трения с упругой полуограниченной средой. Требуется определить нормальную реакцию основания $q(x) \exp(-i\omega t)$ и вертикальное смещение штампа $u_0 \exp(-i\omega t)$.

Для анализа задачи необходимо совместно решить уравнения движения штампа и уравнения движения среды, при этом должно выполняться условие контакта

$$u_0(x) = w(x, 0) \quad (|x| \leq a) \quad (2.1)$$

где $u_0(x)$, $w(x, 0)$ — амплитуды вертикальных перемещений точек подошвы штампа и поверхности среды ($z=0$) соответственно.

Уравнения движения штампа имеют вид

$$-m\kappa_2^2 u = P - R, \quad -J\kappa_2^2 \varphi = M - M_R \quad (2.2)$$

$$R = \int_{-a}^a q(x) dx, \quad M_R = \int_{-a}^a xq(x) dx$$

$$J = \frac{1}{3}ma^2, \quad M = Pl, \quad \kappa_2^2 = \rho\omega^2 h^2/\mu$$

Здесь u — составляющая перемещения центра масс штампа, φ — угол поворота, M_R — момент нормальных контактных напряжений относительно центра тяжести, m — масса штампа, J — момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести; остальные характеристики те же, что и в предыдущем пункте.

Вертикальные перемещения точек подошвы штампа будут определяться формулой

$$u_0 = u + \varphi x \quad (2.3)$$

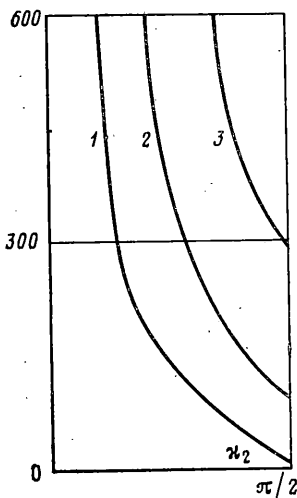
Применяя интегральное преобразование Фурье к уравнениям Ламе, описывающим движение среды, [1] и к граничным условиям задачи, а также учитывая условие (2.1), приходим к необходимости решения интегрального уравнения первого рода относительно контактных давлений $q(x)$ с ядром вида (1.4):

$$\int_{-a}^a k(x-\xi)q(\xi)d\xi = u + \varphi x \quad (|x| \leq a)$$

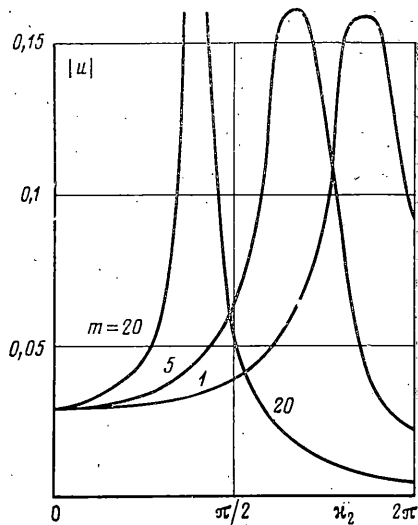
Пусть $q_n(x)$ — решение интегрального уравнения (1.5), тогда в силу линейности задачи контактные давления будут определяться формулой (штрих означает производную по параметру η)

$$q(x) = uq_1(x) + \varphi q_2(x), \\ q_1(x) = q_{\eta=0}(x), \quad q_2(x) = i[q_{\eta=0}'(x)] \quad (2.4)$$

Видно, что $q_1(x)$ соответствует задаче о жестком штампе с прямолинейным основанием, а $q_2(x)$ — задаче о наклонном жестком прямолиней-



Фиг. 4



Фиг. 5

ном штампе. Функции $q_1(x)$, $q_2(x)$ в (2.4) зависят от частоты колебаний штампа и являются, соответственно, четной и нечетной функциями, поэтому уравнения движения штампа (2.2) разбиваются на два независимых уравнения, из которых определяются перемещения центра масс и угол поворота штампа

$$u = \frac{P}{k_1(\kappa_2) - m\kappa_2^2}, \quad k_1(\kappa_2) = \int_{-a}^a q_1(x) dx \quad (2.5)$$

$$\varphi = \frac{Pl}{k_2(\kappa_2) - J\kappa_2^2}, \quad k_2(\kappa_2) = \int_{-a}^a q_2(x) x dx \quad (2.6)$$

Общее решение задачи определяется формулой (2.3). Функция $k_1(\kappa_2)$ находится из выражения (1.7), а $k_2(\kappa_2) = [Q_{\eta'}(u)]_{u'}'$ при $\eta = u = 0$. Окончательные формулы для расчета $k_2(\kappa_2)$ имеют вид

$$k_2(\kappa_2) = K^{-1}(0) \left\{ \frac{1}{cB} \left(-\frac{1}{4B^2} + \frac{a}{2B} + a^2 + \frac{2}{3} a^3 B \right) - \right. \\ \left. - \frac{i(1+2aB)}{2B\sqrt{B}} \sum_{k=1}^{2n} c_k' [F(0, x_k) - F(0, -x_k)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{k=1}^{2n} c_k [F'(0, x_k) - F'(0, -x_k)] \right\} \quad (2.7)$$

Неизвестные c_k' определяются из системы

$$\sum_{k=1}^{2n} c_k' [\sqrt{B+iu} \exp(iau) F(u, x_k) + \sqrt{B-iu} \exp(-iau) F(-u, -x_k)] = \\ = \frac{1}{c} \exp(iau) \left(\frac{1}{iu^2} - \frac{a}{u} \frac{1}{2uB} \right) \sqrt{B(B+iu)} \operatorname{erf} \sqrt{2a(B+iu)} - \\ - \frac{1}{c} \exp(-iau) \left(\frac{1}{iu^2} + \frac{a}{u} + \frac{1}{2uB} \right) \sqrt{B(B-iu)} \operatorname{erf} \sqrt{2a(B-iu)} \\ u = \pm z_l \quad (l=1, \dots, n)$$

где $F'(u, x_k)$ — производная функции $F(u, x_k)$ по параметру u . Остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в предыдущем пункте.

В качестве примера рассмотрим слой, жестко сцепленный с недеформируемым основанием. В [1] установлено существование резонансных частот, начиная с $\omega_2 > \omega_{2*}$, на которых будут иметь место бесконечные амплитуды колебаний при нулевой массе штампа. Эти резонансы обусловлены наличием кратных полюсов подынтегральной функции $K(u)$ ядра (1.4) и изучены в [1]; ω_{2*} соответствует появлению первого полюса на вещественной оси. Указанные резонансные частоты исчезают, если масса тела отлична от нуля, но зато могут появиться резонансы другого рода, появляющиеся при $\omega_2 \leq \omega_{2*}$, предсказанные в [3] и выявленные в публикуемой работе.

Рассмотрим уравнения $k_1(\omega_2) - m\omega_2^2 = 0$, $k_2(\omega_2) - J\omega_2^2 = 0$. Введем критическую массу $m_{2*} = k_1(\omega_{2*})/\omega_{2*}^2$ и критический момент инерции $J_* = k_2(\omega_{2*})/\omega_{2*}^2$.

Численный анализ показывает, что при $m < m_*$ и $J < J_*$ эти уравнения действительных корней не имеют, т. е. резонансных частот нет. При $m < m_*$ и $J \geq J_*$ или $m \geq m_*$, $J < J_*$ существует один резонанс. И, наконец, при $m \geq m_*$ и $J \geq J_*$ исходная система штамп — слой имеет два изолированных резонанса при частотах, меньших критической частоты распространения волн в слое, и начиная с некоторого значения массы.

На фиг. 3, 4 приведены графики зависимости резонансных частот ω_2 от массы штампа m для случая, когда на штамп действует сосредоточенная сила P_0 и момент M (кривые 1—3) соответствуют значениям $a=3, 5, 7$). С ростом массы значение резонансной частоты уменьшается. Фиг. 5 иллюстрирует влияние массы на перемещения u и в зависимости от приведенной частоты $\omega_2 (a=5)$.

Авторы выражают благодарность И. И. Воровичу за ценные указания и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Бабешко В. А., Прягина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 477—484.
3. Ворович И. И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. — Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 5, с. 1076—1079.

Ростов н/Дону

Поступила в редакцию
12.XII.1984