МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОЙ МОДИФИКАЦИИ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., ШИФРИН Е. И.

Принцип суперпозиции обобщенных перемещений, позволяющий заменить решение контактной задачи или задачи о трещине в физически нелинейном, несжимаемом теле со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций сдвига решением линейного уравнения, связывающего некоторую степень смещения с напряжением, был предложен в [1, 2] для решения плоской задачи. В [3] принцип суперпозиции обобщенных перемещений использовался для вывода приближенного линейного уравнения в пространственном случае. Получаемые при этом линейные уравнения значительно проще для изучения, чем исходная задача, и допускают как аналитические решения в случае канонических областей [4, 5] [1], так и качественное исследование [6, 7] [2].

В настоящее время имеется небольшое количество аналитических и численных результатов, соответствующих точной постановке задачи, поэтому пока не удается установить степень близости приближенного и точного решений. В точной постановке известны лишь решения задач о действии сосредоточенной силы, нормальной к границе полуплоскости (полупространства) [1–3], и асимптотики смещений и напряжений у края трещины либо у кромки штампа [8, 9].

Решение задачи о штампе, получаемое из приближенного уравнения, имеет правильный порядок стремления к нулю нормального смещения вдали от штампа, поскольку принцип суперпозиции обобщенных перемещений исходит из точного решения задачи о действии сосредоточенной силы. Однако, как было отмечено в [10], порядки асимптотик напряжения и смещения у края трещины либо кромки штампа, соответствующие решению приближенного уравнения, несколько отличаются от их точных значений. Вместе с тем применение принципа суперпозиции обобщенных перемещений к антиплоской задаче о штампе, допускающей аналитическое решение [3], показало незначительное отличие между приближенным и точным решениями вне малых окрестностей краев штампа.

В публикуемой работе предлагается некоторое обобщение принципа суперпозиции, позволяющее сводить рассматриваемые задачи к линейным интегральным или интегродифференциальным уравнениям, решения которых имеют правильный порядок всех указанных выше асимптотик. Это достигается с помощью предположения о линейной зависимости между отличными от принятых в [1, 2] степенями нормальных смещения и напряжения.

1. Пусть физическое соотношение между напряжениями и деформациями в несжимаемом материале имеет вид $S_{ij}=A\Gamma^{\mu-1}\varepsilon_{ij}$, где S_{ij} — девиатор напряжений, ε_{ij} — тензор деформаций, Γ — интенсивность деформаций сдвига, A — постоянная материала. Согласно [1–3], решения задач о действии сосредоточенной силы, нормальной к границе полуплоско-

[1] См также: *Мхитарян С. М.* Некоторые смешанные задачи о взаимодействии концентраторов напряжений типа стрингеров, штампов и трещин с вязкоупругими телами.— В кн.: Всесоюз. симпозиум «Ползучесть в конструкциях». Тез. докл. Днепропетровск: Изд-е ДГУ, 1982, с. 96, 97.

[2] См. также: *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Оценки некоторых локальных характеристик решения задачи о плоской трещине нормального разрыва в деформируемой среде в условиях установившейся ползучести.— В кн.: Всесоюз. симпозиум «Ползучесть в конструкциях». Тез. докл. Днепропетровск: Изд-е ДГУ, 1982, с. 86, 87.

Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Об оценках решений задачи о плоской трещине отрыва в линейно-упругом теле и материале со степенным упрочнением.— В кн.: Школа-семинар «Теория упругости и вязкоупругости». Тез. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1982, с. 18, 19.

[3] См.: *Брудный С. Р.* Контактная задача теории установившейся ползучести при антиплоской деформации.— В кн.: Школа-семинар «Теория упругости и вязкоупругости». Тез. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1982. 10 с.

сти или полупространства, удовлетворяют, соответственно, следующим соотношениям:

$$w^{\mu}(x)=CP/r^{1-\mu}, \quad w^{\mu}(x)=CP/r^{2-\mu} \tag{1.1}$$

Здесь $w(x)$ — нормальное перемещение границы полуплоскости (полупространства), P — интенсивность действующего усилия, r — расстояние от точки приложения силы до точки наблюдения, C — некоторые постоянные, зависящие от свойств материала.

В соответствии с принципом, предложенным в [1, 2], и решениями (1.1) получаются интегральные уравнения, связывающие нормальные напряжения $p(x)$ с $w^{\mu}(x)$, соответственно, в плоском и пространственном случаях

$$w^{\mu}(x)=C\int\frac{p(y)\,dy}{|x-y|^{1-\mu}}, \quad w^{\mu}(x)=C\int\frac{p(y)\,dy}{|x-y|^{2-\mu}} \tag{1.2}$$

Для пространственной задачи $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $|x-y|=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{1/2}$. Уравнение, связывающее трансформанты Фурье функций $w^{\mu}(x)$ и $p(x)$, в пространственном случае, согласно (1.2), имеет вид

$$C'|\xi|^{-\mu}p^{\vee}(\xi)=w^{\mu\vee}(\xi) \tag{1.3}$$

где C' — постоянная, $w^{\mu\vee}(\xi)$, $p^{\vee}(\xi)$ — трансформанты Фурье функций $w^{\mu}(x)$ и $p(x)$.

Задача о штампе приводит к следующим краевым условиям:

$$C'p_G\Lambda^{-\mu}p(x)=w^{\mu}(x), \quad w^{\mu}(x)\in H_{\mu/2}(G), \quad p(x)\in \overset{\circ}{H}_{-\mu/2}(G) \tag{1.4}$$

где p_G — сужение на область контакта G, Λ^{δ} — псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|^{\delta}$, $H_s(G)$, $H_s^{\circ}(G)$ — пространства Соболева — Слободецкого.

Краевая задача (1.4) однозначно разрешима в указанных пространствах [11]. Чтобы получить уравнение, соответствующее задаче о трещине, занимающей плоскую область G, к поверхностям которой приложены симметричные нормальные усилия $\sigma_{33}(x)=-p(x)$, следует обратить соотношение (1.3) и учесть граничные условия. В результате получим

$$p_G\Lambda^{\mu}w^{\mu}(x)=C'p(x), \quad p(x)\in H_{-\mu/2}(G), \quad w^{\mu}(x)\in \overset{\circ}{H}_{\mu/2}(G) \tag{1.5}$$

Согласно [11], решение уравнения (1.4) в случае гладкой правой части имеет у границы области $G-\partial G$ особенность $p(x)\approx N(x')s^{-\mu/2}$, где $x'\in\partial G$, x лежит на нормали к ∂G, проходящей через x', s — расстояние между x и x'. Аналогично решение уравнения (1.5) при гладкой правой части имеет особенность $w^{\mu}(x)\approx K(x')s^{\mu/2}$ и согласно [7] величина $\Lambda^{\mu}w^{\mu}(x)$ вблизи ∂G вне области G (т. е. напряжение вблизи контура трещины) имеет вид $\Lambda^{\mu}w^{\mu}(x)\approx N(x')s^{-\mu/2}$. Следовательно, приближенные уравнения дают вблизи края трещины (кромки штампа) особенность напряжения $-\mu/2$ ($\sigma_{33}(x)\approx N(x')s^{-\mu/2}$) и особенность смещения $1/2$ ($w(x)\approx L(x')s^{1/2}$), в то время как их точные значения равны, соответственно, [8, 9] $-\mu/(1+\mu)$ и $\mu/(1+\mu)$.

2. Будем искать приближенное уравнение, связывающее $w(x)$ с $p(x)$ на границе полупространства, в виде

$$C(p(x),\ G)\Lambda^{-\gamma}p^{\beta}(x)=w^{\alpha}(x) \tag{2.1}$$

Здесь α, β, γ — некоторые постоянные, $C(p(x), G)$ в противоположность уравнениям (1.2) — (1.5) не является постоянной материала, а зависит от нагрузки и области. Запишем краевую задачу, соответствующую задаче о штампе

$$C(p(x),\ G)p_G\Lambda^{-\gamma}p^{\beta}(x)=w^{\alpha}(x), \quad w^{\alpha}(x)\in H_{\gamma/2}(G), \quad p^{\beta}(x)\in \overset{\circ}{H}_{-\gamma/2}(G) \tag{2.2}$$

Тогда, как указывалось, у ∂G функции ведут себя следующим образом: $p^{\beta}(x)\approx A(x')s^{-\gamma/2}$, $w^{\alpha}(x)$ вблизи ∂G вне области G равна $w^{\alpha}(x)\approx B(x')s^{\gamma/2}$.

Из требования совпадения асимптотик, даваемых приближенными уравнениями, с точными следует

$$0{,}5\gamma/\beta=\mu/(1+\mu),\quad 0{,}5\gamma/\alpha=\mu/(1+\mu) \tag{2.3}$$

Из (2.3) получаем равенство $\alpha=\beta$. Если полагать, что $-2<-\gamma<0$, то соотношение (2.2) можно записать в виде интегрального уравнения в x-представлении (C_1 — постоянная):

$$C_1C(p(x),G)\int\limits_G \frac{p^\beta(y)\,dy}{|x-y|^{2-\gamma}}=w^\alpha(x) \tag{2.4}$$

Формула (2.4) позволяет найти порядок убывания $w(x)$ вдали от области контакта

$$w(x)\approx\left[C_1C(p(x),G)\int\limits_G p^\beta(y)\,dyR^{\gamma-2}\right]^{1/\alpha} \tag{2.5}$$

где R — расстояние от x до некоторой фиксированной точки внутри G.

Учитывая точное решение (1.1) и требуя правильный порядок убывания, получим

$$(\gamma-2)/\alpha=(\mu-2)/\mu \tag{2.6}$$

Из (2.3) и (2.6) окончательно будем иметь

$$\alpha=\beta=2\mu(1+\mu)/(2+\mu+\mu^2),\quad \gamma=4\mu^2/(2+\mu+\mu^2) \tag{2.7}$$

Зависимость $C(p(x),\ G)$ устанавливается из (2.5), (1.1) и требования совпадения коэффициентов в асимптотиках убывания $w(x)$ на бесконечности

$$\operatorname{const}C(p(x),G)\int\limits_G p^\alpha(y)\,dy=\left(\int\limits_G p(y)\,dy\right)^{\alpha/\mu}=P^{\alpha/\mu}$$

Откуда следует

$$C(p(x),G)=\operatorname{const}\left(\int\limits_G p(y)\,dy\right)^{\alpha/\mu}\left(\int\limits_G p^\alpha(y)\,dy\right)^{-1} \tag{2.8}$$

Несмотря на то что формула (2.8) выражает $C(p(x),\ G)$ через неизвестную функцию $p(x)$, она дает возможность определить эту постоянную. Для ее нахождения сперва следует положить $C(p(x),\ G)$ равной любому числу и найти решение (2.2), которое будет отличаться от искомого на постоянный множитель. Далее, воспользовавшись полученным решением и формулой (2.8), можно окончательно вычислить значение $C(p(x),G)$.

Отметим, что при $0<\mu<1$ величина γ также лежит в пределах $0<\gamma<1$. Поэтому запись (2.4) справедлива.

Для применения соотношения (2.1) к решению задачи о трещине его надо обратить и добавить граничные условия. В результате получим

$$C(w(x),G)\Lambda^\gamma w^\alpha(x)=p^\alpha(x),\quad p^\alpha(x)\in H_{-\gamma/2}(G),\quad w^\alpha(x)\in \overset{\circ}{H}_{\gamma/2}(G) \tag{2.9}$$

Здесь коэффициент C записан как функция от нормального перемещения и формы области.

3. Рассмотрим несколько примеров решения уравнений (2.2), (2.9) и сравним их с решениями уравнений (1.4), (1.5).

1. Пусть в полупространство внедряется плоский штамп, имеющий форму круга радиуса a ($|x|=r<a$), и задана вдавливающая сила P. Найдем напряжения на площадке контакта. Решение уравнения (1.4) имеет вид $p(x)=C(a^2-r^2)^{-\mu/2}$. Из условия $\int\limits_D p(x)\,dx=P$ вычисляем значение постоянной $C=P(2-\mu)/(2\pi a^{2-\mu})$. Таким образом, $p(x)=(2-\mu)P(1-t^2)^{-\mu/2}/$ $/(2\pi a^2)$, где $t=r/a$. Решение уравнения (2.2) при полученных значениях α, β, γ дает $p(x)=C(a^2-r^2)^{-\varkappa}$, ($\varkappa=\mu/(1+\mu)$). Определяя постоянную C, приходим к выражению $p(x)=P(1-t^2)^{-\varkappa}/(\pi(1+\mu)a^2)$. Очевидно, вне ма-

лой окрестности границы $r=a$ решения уравнений (1.4) и (2.2) не сильно отличаются друг от друга, причем в окрестности точки $r=0$ решение уравнения (1.4) всегда больше решения (2.2). Например, при $\mu=0{,}5$, $t=0$ разница составляет 12,5%, а при $\mu\to 1$ и $\mu\to 0$ решения совпадают. Отметим, что в силу различных асимптотик точное решение всегда больше решения (1.4) в малой окрестности края штампа. Поэтому из требования равенства интегралов, вытекающего из задания вдавливающей силы, следует, что решение (2.2) отклоняется от решения (1.4) вблизи $t=0$ в ту сторону, в какую, очевидно, должно отклоняться точное решение от решения (1.4) вне окрестности края штампа.

2. Рассмотрим задачу для штампа эллиптической формы с полуосями a и b $(x_1^2/a^2+x_2^2/b^2\leqslant 1)$, аналогичную задаче 1. Решения уравнений (1.4) и (2.2) в данном случае имеют, соответственно, вид $p(x)=P(2-\mu)\times\times(1-t^2)^{-\mu/2}/(2\pi ab)$ и $p(x)=P(1-t^2)^{-\varkappa}/(\pi ab(1+\mu))$, где $t^2=x_1^2/a^2+x_2^2/b^2$. Очевидно, здесь отличие между решениями уравнений (1.4) и (2.2) такое же, как и для кругового штампа.

Прежде чем рассмотреть пример задачи о трещине, отметим, что уравнение (2.9), полученное обращением соотношения (2.1), при вычисленных значениях α и γ дает правильный порядок особенностей нормальных смещения и напряжения у края трещины. Порядок убывания напряжений вдали от трещины неизвестен. Уравнение (2.9) определяет, что на бесконечности напряжения убывают, как $R^{-\theta}$, $\theta=(\gamma+2)/\alpha$. Для контроля точности этого значения требуется независимое определение дальнего поля напряжений, создаваемых трещиной в степенном материале. В случае необходимости уравнение (2.9) может быть скорректировано аналогично тому, как было построено уравнение (2.2) для задачи о штампе.

3. Пусть трещина имеет форму круга радиуса a $(r\leqslant a)$. К поверхностям трещины приложены симметричные относительно плоскости трещины однородные нормальные усилия $-\sigma_{33}(x)=p(x)=\text{const}$. В этом случае решение уравнения (2.9) имеет вид $w(x)=C(a^2-r^2)^{\varkappa}$. Обозначим через V объем трещины, δ — ее раскрытие в точке $x=0$, $V=2\int w(x)\,dx$, $\delta=2w(0)$. Исходя из решения уравнения (2.9) получим выражение для величины $V/(a^2\delta)$:

$$V/(a^2\delta)=\pi(1+\mu)/(1+2\mu) \tag{3.1}$$

В [12] задача о круговой трещине решалась в точной постановке и величины V и δ получены численно. Постановка задачи в [12] отличается от рассматриваемой здесь тем, что в [12] однородные усилия приложены на бесконечности. Предполагая, что на значении $V/(a^2\delta)$ это обстоятельство сказывается незначительно, сравним формулу (3.1) с численными результатами [12]. Ниже приведены значения величин $V/(a^2\delta)$, взятых из [12] (первая строка) и подсчитанных по формуле (3.1) (вторая строка) при различных значениях μ:

$\mu=1$	0,667	0,5	0,333	0,2	0,1	0
$V/(a^2\delta)=2{,}095$	2,186	2,251	2,339	2,439	2,544	2,703
$V/(a^2\delta)=2{,}094$	2,244	2,356	2,513	2,693	2,880	3,142

Как видно, различие между формулой (3.1) и численными данными невелико. Результаты, подсчитанные по (3.1), всегда выше численных. С уменьшением μ различие увеличивается. При $\mu=0{,}2$ оно составляет 10,4%, при $\mu=0{,}1$ увеличивается до 13,2% и лишь при $\mu=0$ достигает 16,2%. Исходя из уравнения (1.5) получим $w(x)=C(a^2-r^2)^{\mu/2}$, откуда следует $V/(a^2\delta)=2\pi/(2+\mu)$. Величина, определяемая данной формулой, всегда больше величины, определяемой формулой (3.1). Следовательно, решение уравнения (2.9) ближе подходит к численным данным, чем решение уравнения (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.– Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, т. 12, № 2, с. 77–105.

2. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.– ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901–924.

3. *Кузнецов А. И.* Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала.– ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, с. 481–491.
4. *Ростовцев Н. А.* Об одном интегральном уравнении, встречающемся в задаче о давлении жесткого фундамента на неоднородный грунт.– ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, с. 164–168.
5. *Мхитарян С. М.* К напряженному состоянию деформирующегося по степенному закону бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости.– Докл. АН АрмССР, 1982, т. 74, № 1, с. 30–36.
6. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Теоремы сравнения для некоторого класса псевдодифференциальных уравнений и их приложения.– Докл. АН СССР, 1982, т. 262, № 5, с. 1113–1116.
7. *Шифрин Е. И.* Оценки решения задачи о плоской трещине нормального разрыва в материале со степенным упрочнением.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 4, с. 31–43.
8. *Rice J. R., Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in a power-low hardening material.– J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, No. 1, p. 1–12.
9. *Hutchinson J. W.* Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material.– J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, No. 1, p. 13–31.
10. *Atkinson C.* A note on crack problems in power-law elastic materials and contact problems in nonlinear creep.– Internat. J. Engng. Sci., 1971, v. 9, No. 8, p. 729–739.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1973, 232 с.
12. *He M. Y., Hutchinson J. W.* The penny-shaped crack and the plane strain crack in an infinite body of power-law material.– Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1981, v. 48, No. 4, p. 830–840.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.1984