

УДК 539.3.01

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В УСТЬЕ ТРЕЩИНЫ

БАГИРОВ Л. А., БЕРКУН В. Б.

В теории трещин важную роль играет исследование асимптотик вектора смещений и тензора напряжений вблизи вершины трещины [1-3]. Построению асимптотик решений задач плоской теории упругости в окрестности вершины трещины с плавным смыканием берегов посвящены работы [4, 5], в которых асимптотика записывается в координатах образа конформного отображения области на круг с разрезом, что затрудняет детальное исследование напряженного состояния в окрестности вершины.

В публикуемой работе при помощи специальной неконформной замены переменных и использования математического аппарата, разработанного в [6], получены главные члены асимптотического решения, записанные в исходных координатах и точно удовлетворяющие граничным условиям на берегах трещины. Порядки точности приведенных в работе асимптотик смещений и напряжений совпадают с порядками точности классических асимптотик для прямолинейной трещины. Полученные в работе явные асимптотики позволяют легко исследовать картину распределения напряжений вблизи устья трещины с плавным смыканием берегов. Проведенное сравнение с классическим распределением напряжений позволило установить ряд качественных отличий.

**1. Постановка задачи.** Пусть занимаемая телом на плоскости  $(x, y)$  область  $\Omega$  имеет гладкую границу  $\Gamma$  во всех точках, кроме точки  $(0, 0)$ , а в некоторой окрестности этой точки область  $\Omega$  задается неравенством  $x \leq (0,5k^{-1}|y|)^{1/2}$ ,  $k > 0$ . Равновесие области  $\Omega$  в случаях плоской деформации и плоского напряженного состояния описывается уравнениями Ламе

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — соответствующие константы Ламе,  $\mathbf{u}$  — вектор декартовых перемещений.

На границе области  $\Omega$  рассматриваются краевые условия в напряжениях

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{u}) = 2\mu \partial \mathbf{u} / \partial n + \lambda n \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}) = \mathbf{p} \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к  $\Gamma$ . Предполагается, для простоты, что  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  в малой окрестности  $(0, 0)$ . Будем исследовать обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) с конечной энергией в предположении отсутствия жестких смещений.

**2. Получение асимптотического решения.** В [4, 6] доказано, что главный член асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) совпадает с главным членом асимптотического решения этой же задачи в области  $\Omega_0 = \{(x, y) : x \leq (0,5k^{-1}|y|)^{1/2}, k > 0\}$  с границами  $\Gamma_1 = \{(x, y) : y = 2kx^2\}$ ,  $\Gamma_2 = \{(x, y) : y = -2kx^2\}$ .

Запишем задачу (1.1), (1.2) в полярных координатах  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$  с началом в точке  $(0, 0)$ :

$$\mathbf{L}(rD_r, D_\varphi) \mathbf{u}(r, \varphi) = \mathbf{0}, \quad (r, \varphi) \in \Omega_0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}_1(r, \varphi, rD_r, D_\varphi) \mathbf{u}(r, \varphi) = r\mathbf{p}_1, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_1$$

$$\mathbf{B}_2(r, \varphi, rD_r, D_\varphi) \mathbf{u}(r, \varphi) = r\mathbf{p}_2, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_2$$

где  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  — матричные дифференциальные операторы, соответствующие

щие операторам задачи (1.1), (1.2), переписанным в полярных координатах,  $rD_r = rD/\partial r$ ,  $D_\varphi = \partial/\partial\varphi$ ;  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — соответственно, верхний и нижний берега трещины, уравнения которых имеют вид  $2kr = |\sin\varphi| \cos^{-2}\varphi$ ,  $|\varphi| < \pi/2$ .

В задаче (2.1) сделаем замену  $t = -\ln r$ . При этом (2.1) перейдем в задачу

$$L(D_t, D_\varphi)u(t, \varphi) = 0, \quad (t, \varphi) \in \Pi \quad (2.2)$$

$$B_1(t, \varphi, D_t, D_\varphi)u(t, \varphi) = e^{-t}p_1, \quad (t, \varphi) \in \gamma_1$$

$$B_2(t, \varphi, D_t, D_\varphi)u(t, \varphi) = e^{-t}p_2, \quad (t, \varphi) \in \gamma_2$$

где  $\Pi$  — область на плоскости  $(t, \varphi)$ , ограниченная кривыми  $\gamma_1 = \{(t, \varphi) : 0 < \varphi < \pi/2, 2ke^{-t} = \sin\varphi \cos^{-2}\varphi\}$ ,  $\gamma_2 = \{(t, \varphi) : 3\pi/2 < \varphi < 2\pi, 2ke^{-t} = -\sin\varphi \times \times \cos^{-2}\varphi\}$ . Операторы  $B_i(t, \varphi, D_t, D_\varphi)$  имеют вид

$$B_i = B_{i0}(\varphi, D_t, D_\varphi) + e^{-t}B_{i1}(\varphi, D_t, D_\varphi) \quad (i=1, 2)$$

$$B_{10} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad B_{20} = -B_{10}, \quad D_t = \partial/\partial t$$

$$b_{11} = \mu[\sin 2\varphi(D_t + 1) - \cos 2\varphi D_\varphi]$$

$$b_{12} = \mu[\sin 2\varphi D_\varphi + \cos 2\varphi(D_t + 1)]$$

$$b_{21} = \lambda(D_t - 1) - \mu[2\sin^2\varphi D_t - \sin 2\varphi D_\varphi - 2\cos^2\varphi]$$

$$b_{22} = -\lambda D_\varphi + \mu[\sin 2\varphi(D_t + 1) - 2\cos^2\varphi D_\varphi]$$

Конкретный вид матричных дифференциальных операторов первого порядка  $B_{i1}$ ,  $i=1, 2$  в дальнейшем не используется, важно лишь то, что их коэффициенты — гладкие функции  $\varphi$  и не зависят от  $t$ .

Произведем в задаче (2.2) замену переменных

$$\tau = t, \quad \omega = d(t)\varphi - z(t) \quad (2.3)$$

где  $d(t) = \pi(\pi - \alpha(t))^{-1}$ ,  $z(t) = d(t)\alpha(t)$ ,  $\alpha(t)$  — уравнение кривой  $\gamma_1$ ,  $\alpha(t) = \arcsin[(1 + 16k^2e^{-2t})^{1/2} - 1](4ke^{-t})^{-1}$ . Заметим, что уравнение кривой  $\gamma_2$  имеет вид  $2\pi - \alpha(t)$ .

В результате преобразования (2.3) область  $\Pi$  перейдет в область  $\Pi_1 = \{(\tau, \omega) : 0 < \omega < 2\pi, -\infty < \tau < +\infty\}$ , а кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — в прямые  $\omega = 0$  и  $\omega = 2\pi$  соответственно. Простые вычисления показывают, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + [a_1(\tau)\omega + a_2(\tau)] \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \omega} + a_3(\tau) \frac{\partial}{\partial \omega}$$

где  $a_j(\tau) = O(e^{-\tau})$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $j=1, 2, 3$ . Следовательно, в результате замены (2.3) задача (2.2) примет вид

$$[L(D_\tau, D_\omega) + L_1(\tau, \omega, D_\tau, D_\omega)]u = 0, \quad (\tau, \omega) \in \Pi_1 \quad (2.4)$$

$$[B_{10}(D_\tau, D_\omega) + B_{11}(\tau, \omega, D_\tau, D_\omega)]u = e^{-\tau}p_1, \quad \omega = 0$$

$$[B_{20}(D_\tau, D_\omega) + B_{21}(\tau, \omega, D_\tau, D_\omega)]u = e^{-\tau}p_2, \quad \omega = 2\pi$$

где все коэффициенты операторов  $L_1$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{21}$  есть  $O(e^{-\tau})$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Таким образом, на основании работы [6] можно заключить, что предельной задачей для (2.4) при  $\tau \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow 0$ ) является задача

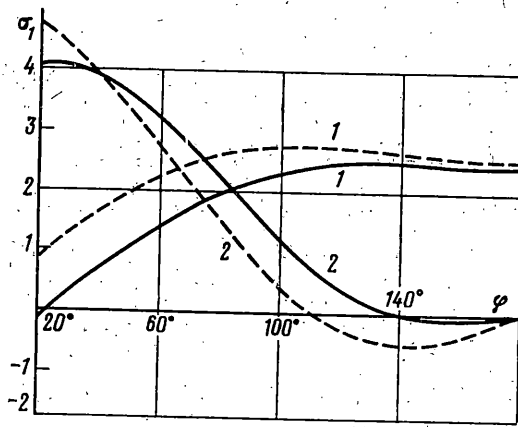
$$L(D_\tau, D_\omega)u = 0, \quad (\tau, \omega) \in \Pi_1 \quad (2.5)$$

$$B_{10}(D_\tau, D_\omega)u = g_1, \quad \omega = 0; \quad B_{20}(D_\tau, D_\omega)u = g_2, \quad \omega = 2\pi$$

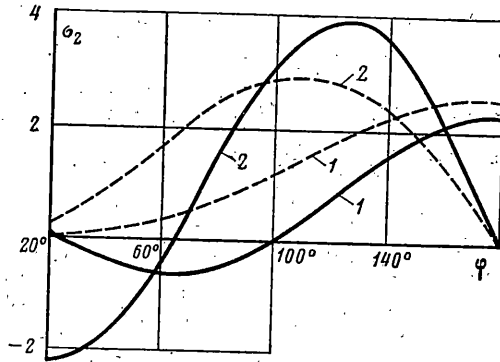
$$L(D_\tau, D_\omega) = \begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)(D_\tau^2 - 1) + \mu D_\omega^2 & -[(\lambda + \mu)D_\tau D_\omega + (\lambda + 3\mu)D_\omega] \\ (\lambda + 3\mu)D_\omega - (\lambda + \mu)D_\tau D_\omega & \mu(D_\tau^2 - 1) + (\lambda + 2\mu)D_\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$B_{10}(D_\tau, D_\omega) = \begin{vmatrix} -\mu D_\omega & \mu(D_\tau + 1) \\ [\lambda D_\tau - (\lambda + 2\mu)] & (-\lambda - 2\mu)D_\omega \end{vmatrix}, \quad B_{20} = -B_{10}$$

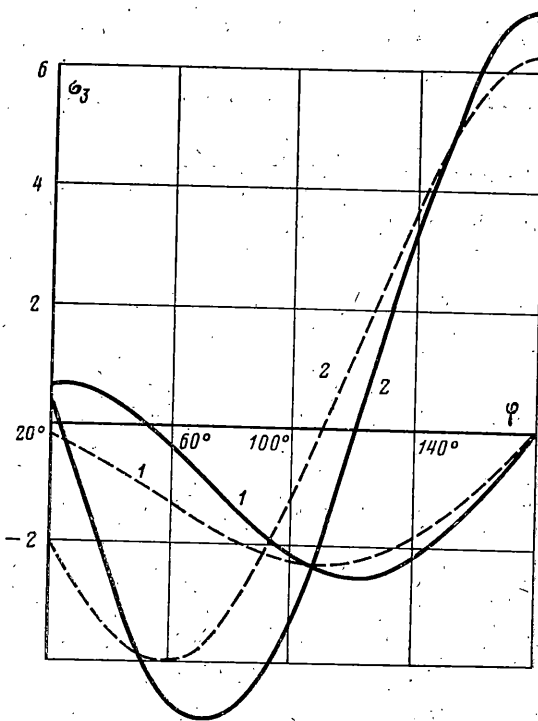
Заметим, что задача (2.5) может быть формально получена из задачи двумерной теории упругости для плоскости с прямолинейной трещиной.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для этого в (1.1), (1.2) надо сделать полярную замену  $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$ , а затем подстановку  $\tau = -\ln r$ .

Это наблюдение дает возможность использовать известное асимптотическое решение в вершине классической трещины

$$v = c_1 r^{1/2} \begin{vmatrix} \sin \frac{3\omega}{2} + (2\kappa - 1) \sin \frac{\omega}{2} \\ \cos \frac{3\omega}{2} + (2\kappa + 1) \cos \frac{\omega}{2} \end{vmatrix} + c_2 r^{1/2} \begin{vmatrix} 3 \cos \frac{3\omega}{2} + (2\kappa - 1) \cos \frac{\omega}{2} \\ -3 \sin \frac{3\omega}{2} - (2\kappa + 1) \sin \frac{\omega}{2} \end{vmatrix} + O(r |\ln r|) \quad (2.6)$$

где  $\kappa = 3 - 4\nu$  для случая плоской деформации,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для случая плоского напряженного состояния,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Из (2.3) следует, что  $\omega = \pi(\varphi - 2kr)/(\pi - 2kr)$ . Таким образом, из (2.6) вытекает, что в рассматриваемом нами случае главный член асимптотики имеет вид

$$u = c_1 r^{1/2} \begin{vmatrix} \sin \frac{3\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} + (2\kappa - 1) \sin \frac{\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} \\ \cos \frac{3\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} + (2\kappa + 1) \cos \frac{\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} \end{vmatrix} + \\ + c_2 r^{1/2} \begin{vmatrix} 3 \cos \frac{3\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} + (2\kappa - 1) \cos \frac{\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} \\ -3 \sin \frac{3\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} - (2\kappa + 1) \sin \frac{\pi(\varphi - 2kr)}{2(\pi - 2kr)} \end{vmatrix} + O(r |\ln r|) \quad (2.7)$$

В формуле (2.7) первый член соответствует симметричному напряженному состоянию, а второй — кососимметричному,  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные, зависящие от геометрии области, нагрузок и физических постоянных материала.

**3. Анализ полученных решений.** Заметим, что главный член асимптотики (2.7) стремится к классическому решению (2.6) при приближении к вершине трещины ( $r \rightarrow 0$ ). Аналогичный результат имеет место при стремлении кривизны граничной кривой к нулю ( $k \rightarrow 0$ ), что соответствует приближению границы к прямолинейному разрезу. Отметим также, что асимптотическая формула (2.7) справедлива только при малых величинах  $2kr$ .

На фиг. 1–3 изображены распределения напряжений  $\sigma_1 = \sigma_{rr}(1 + \nu) \times (1 - 2\nu)/E$  (фиг. 1),  $\sigma_2 = \sigma_{\varphi\varphi}(1 + \nu)(1 - 2\nu)/E$  (фиг. 2),  $\sigma_3 = \sigma_{r\varphi}(1 + \nu)/E$  (фиг. 3),  $E$  — модуль Юнга, для случая плоской деформации вдоль окружности радиуса  $r = 0,01$  с центром в вершине трещины при  $k = 2$ ,  $\nu = 0,3$ . Штриховым кривым отвечают напряжения в случае прямолинейной трещины, полученные из классической формулы (2.6), а сплошным кривым — напряжения, полученные из формулы (2.7) (1 — напряжения, соответствующие симметричному напряженному состоянию, 2 — кососимметричному). Начало отсчета соответствует границе области  $\varphi_0 = 20,53^\circ$  при  $r = 0,01$ . Несовпадение при  $\varphi = \pi$  значений классических напряжений и напряжений, полученных из (2.7), объясняется тем, что в последних отброшены члены, имеющие порядок  $O(r^{1/2})$ .

Из приведенных результатов видно, что в малых окрестностях берегов трещины напряжения, полученные из (2.7), как правило, качественно отличаются от напряжений, полученных из (2.6). Особенно сильно это отличие проявляется у тангенциальной составляющей поля напряжений (фиг. 2), где возникает достаточно широкая зона, в которой  $\sigma_{\varphi\varphi}$  имеют знак, противоположный знаку классических тангенциальных напряжений.

Аналогично можно исследовать главный член асимптотики в том случае, когда в окрестности точки  $(0, 0)$  граница задается уравнением  $|y| = f(x)$ ,  $x > 0$ , где  $f(x)$  — произвольная функция, удовлетворяющая условиям  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ . Тот же подход можно использовать для исследования трещин в тонких пластинках и в некоторых нелинейных средах.

В заключение авторы выражают благодарность А. М. Проценко за полезное обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
2. *Баренблатт Г. И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 434—444; вып. 4, с. 706—721; вып. 5, с. 893—900.
3. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. *Мазья В. Г., Морозов Н. Ф., Пламеневский Б. А.* О нелинейном изгибе пластин с трещиной. — В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1979, с. 145—163.
5. *Бережницкий Л. Т., Деляский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
6. *Кондрачев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.

Москва

Поступила в редакцию  
9.VII.1984