

УДК 539.3

**ТРЕЩИНА В УПРУГОЙ СРЕДЕ С МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ,  
ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПО КООРДИНАТЕ**

**МИЛЕЙКО С. Т., ТВАРДОВСКИЙ В. В.**

На первом этапе развития композитных материалов их конструирование основывалось на полученных в опытах и затем осмысленных особенностях механизмов разрушения неоднородных тел, связанных в первую очередь с взаимодействием макротрещины с трещинами второго порядка (расслоения, обрывы волокон). Для второго этапа характерно использование количественных моделей, описывающих зависимости трещиностойкости от различных структурных параметров материала. В основе таких моделей лежат предположения о том или ином виде механизма разрушения, который наблюдался в эксперименте.

На третьем этапе неизбежно обращение к поиску новых возможностей торможения разрушения, который затруднен без предварительного анализа поведения трещин в различных по характеру структуры телах. Вряд ли можно ожидать построения некоей глобальной модели разрушения обобщенного неоднородного тела, поэтому приходится накапливать определенный набор решенных задач. Этот процесс так или иначе зависит от возможностей решения задач теории упругости неоднородного тела.

Известный метод [1, 2] дает не очень точные результаты для случая больших величин неоднородности, имеющих место в современных и перспективных композициях.

В публикуемой работе предлагается метод решения плоской задачи теории упругости для тела со специальным видом неоднородности, который иллюстрируется решением важной для механики разрушения композитов задачи о трещине в неоднородном упругом теле с периодически меняющимся модулем. Показано, что трещины, попадающие в определенные области, могут подрастать устойчивым образом. А критические (в смысле потери устойчивости трещин) напряжения могут превышать критические напряжения для соответствующих трещин в однородных телах при средних значениях упругих модулей.

1. Распределение напряжений при плоской деформации полупространства, сечение которого плоскостью  $x_1x_2$  есть область  $x_2 \geq 0$ , дается [1] (при соответствующих граничных условиях) решением уравнения:

$$\Delta \left( \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{hk} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \quad (k, i, j=1, 2) \quad (1.1)$$

к которому приводятся уравнения совместности с учетом уравнений равновесия и закона Гука в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1-\nu^2}{E} \delta_{ij} \delta_{hk} - \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{hk} \delta_{ij} - \sigma_{ij})$$

$$\sigma_{hk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (1.2)$$

который не предполагает постоянства величин  $E$  и  $\nu$  по координатам; в (1.1)  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ .

Перейдем к системе координат  $xy$ , заменяющих  $x_1, x_2$ , соответственно, и будем рассматривать случай  $\nu = \text{const}$ ,  $E = E(x)$ . Тогда (1.1) преобразуется к виду

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = \left( \sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \left[ \frac{E''}{E} - 2 \left( \frac{E'}{E} \right)^2 \right] + 2 \frac{E'}{E} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.3)$$

Пусть функция  $E(x)$  будет периодической:

$$E(x) = E_0 \exp(\kappa \cos(\lambda x)) \quad (1.4)$$

где  $\kappa$  определяет амплитуду, а  $2\pi/\lambda$  — период изменения модуля. Тогда для членов (1.3), содержащих производные  $E(x)$ , получим

$$E'(x)/E(x) = a \sin \lambda x, \quad a = -\kappa \lambda$$

$$E''(x)/E(x) - 2(E'(x)/E(x))^2 = a\lambda \cos \lambda x + 1/2 a^2 (\cos 2\lambda x - 1)$$

Проведем преобразование Фурье по координате  $x$ :

$$f^{\sim}(\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i\mu x} dx, \quad f(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\sim}(\mu, y) e^{-i\mu x} dx, \quad f^{\sim}(\mu) = F[f(x)]$$

уравнений равновесия

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y = 0 \quad (1.5)$$

и уравнения (1.3) с учетом (1.4). Уравнения (1.5) преобразуются к виду

$$\mu^2 \sigma_x^{\sim}(\mu, y) + \sigma_y^{\sim}{}''(\mu, y) = 0, \quad i\mu \tau_{xy}^{\sim}(\mu, y) = \sigma_y^{\sim}{}'(\mu, y) \quad (1.6)$$

В дальнейшем штрихи означают дифференцирование по  $y$ . Из уравнения (1.3) вытекает

$$\begin{aligned} & (\sigma_x^{\sim} + \sigma_y^{\sim})'' - \mu^2 (\sigma_x^{\sim} + \sigma_y^{\sim}) = -q(\lambda, \mu, y), \\ & -q(\lambda, \mu, y) = 1/2 a \lambda [\sigma_y^{\sim}(\mu + \lambda, y) + \sigma_y^{\sim}(\mu - \lambda, y)] - \\ & - 1/2 a^2 \sigma_y^{\sim}(\mu, y) + 1/4 a^2 [\sigma_y^{\sim}(\mu + 2\lambda, y) + \sigma_y^{\sim}(\mu - 2\lambda, y)] - \\ & + a \{ (\mu - \lambda) [\sigma_x^{\sim}(\mu - \lambda, y) + \sigma_y^{\sim}(\mu - \lambda, y)] - \\ & - (\mu + \lambda) [\sigma_x^{\sim}(\mu + \lambda, y) + \sigma_y^{\sim}(\mu + \lambda, y)] \} + \nu(1 - \nu)^{-1} \{ 1/2 a^2 \sigma_x^{\sim}(\mu, y) - \\ & - 1/2 a \lambda [\sigma_x^{\sim}(\mu + \lambda, y) + \sigma_x^{\sim}(\mu - \lambda, y)] - 1/4 a^2 [\sigma_x^{\sim}(\mu + 2\lambda, y) + \sigma_x^{\sim}(\mu - 2\lambda, y)] \} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Используя (1.6), перепишем (1.7):

$$L[\sigma_y^{\sim}(\mu, y)] = q(\sigma_y^{\sim} | \mu, y) \quad (1.8)$$

$$L = \mu^{-2} \partial^4 / \partial y^4 - 2\partial^2 / \partial y^2 + \mu^2, \quad q(f | \mu, y)$$

Здесь  $L$  и  $q$  можно трактовать как линейный функционал от  $f$ .

Решение уравнения (1.8) будем строить методом последовательных приближений, предполагая, что функцию  $\sigma_y^{\sim}(\mu, y)$  можно представить в виде сходящегося ряда

$$\sigma_y^{\sim}(\mu, y) = \sigma_0(\mu, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(\mu, y)$$

в котором  $\sigma_0(\mu, y)$  является решением однородной задачи теории упругости для рассматриваемой области с данными величинами нагрузок на границе:

$$L[\sigma_0(\mu, y)] = 0 \quad (1.9)$$

$$L[\sigma_k(\mu, y)] = q_k(\mu, y), \quad q_k(\mu, y) = q(\sigma_{k-1} | \mu, y) \quad (1.10)$$

Решение краевой задачи для (1.9) представим в виде [3]:

$$\sigma_0(\mu, y) = \{ \sigma_0(\mu) (1 + |\mu|y) + i\mu \tau_0(\mu) \} \exp(-|\mu|y) \quad (1.11)$$

$$\sigma_0(\mu) = F[\sigma_y(x, 0)], \quad \tau_0(\mu) = F[\tau_{xy}(x, 0)]$$

при условии, что  $\sigma_{ij} \rightarrow 0$ ,  $(x^2 + y^2) \rightarrow \infty$ . Если на бесконечности средние напряжения стремятся к определенным величинам  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , то, прежде чем

решать задачу, необходимо вычесть решение, доставляемое формулами

$$\sigma_x^0 = \langle \sigma_x \rangle, \quad \tau_{xy}^0 = \langle \tau_{xy} \rangle, \quad \sigma_y^0 = [\langle \sigma_y \rangle / I_0(\kappa)] \exp(\kappa \cos \lambda x) \quad (1.12)$$

что естественно изменит граничные условия (здесь  $I_0(\kappa)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка).

Граничные условия на функции  $\sigma_k(\mu, y)$  имеют вид

$$\sigma_k(\mu, 0) = (\partial \sigma_k(\mu, y) / \partial y) |_{y=0} = 0, \quad \sigma_k(\mu, y) |_{y \rightarrow \infty} = (\partial \sigma_k(\mu, y) / \partial y) |_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.13)$$

Решение (1.10) при граничных условиях (1.13) можно представить в виде

$$\sigma_k(\mu, y) = -2A_k(\mu, y) \operatorname{sh} |\mu| y + [B_k(\mu, y) + y(2|\mu|A_k(\mu, 0) - B_k'(\mu, 0))] e^{-|\mu| y} \\ B_k(\mu, y) = A_k(\mu, 0) - A_k(\mu, y) \quad (1.14)$$

$$A_k(\mu, y) = -\mu^2 \int_y^\infty dz \int_z^\infty e^{-2|\mu|\xi} d\xi \int_0^z dt \int_0^t q_k(\mu, \eta) e^{|\mu|\eta} d\eta$$

Таким образом,  $\sigma_k(\mu, y)$  выражается  $\sigma_{k-1}(\mu, y)$  в квадратурах  $\sigma_k(\mu, y) = \Phi(\sigma_{k-1} | \mu, y)$  и, в конечном счете через  $\sigma_0(\mu, y)$ :

$$\sigma_k(\mu, y) = \Phi_k(\sigma_0 | \mu, y) \quad (1.15)$$

где  $\Phi_k$  определяется по известному  $\Phi$ :

$$\Phi_k(f | \mu, y) = \Phi(\Phi_{k-1} | \mu, y)$$

$$\Phi_0(f | \mu, y) = f(\mu, y), \quad \Phi_k(f | \mu, 0) = 0$$

$$\Phi_k'(f | \mu, 0) = \Phi_k(f | \mu, y) |_{y \rightarrow \infty} = \Phi_k'(f | \mu, y) |_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (k \geq 1)$$

Исходные напряжения восстанавливаются при помощи обратного преобразования Фурье. Формулы (1.11), (1.14) решают первую основную задачу теории упругости для полуплоскости с модулем Юнга, изменяющимся по закону (1.4).

2. Рассмотрим плоскую задачу о трещине отрыва, лежащей на оси  $x$  плоскости  $xy$  при  $x \in (-L, L)$ . На бесконечности приложены средние напряжения  $\langle \sigma_y \rangle = p$ ,  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0$ . Берега трещины свободны от усилий. После вычитания решения (1.12) получаем с учетом симметрии на границе полуплоскости  $y \geq 0$  следующие граничные условия:

$$|x| < L, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad \sigma_y(x, 0) = -p I_0^{-1}(\kappa) \exp(\kappa \cos \lambda x) \quad (2.1)$$

$$|x| > L, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = (\partial v(x, 0) / \partial x) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $v(x, y)$  — составляющая вектора перемещений вдоль оси  $y$ . Условия (2.2) могут быть также представлены в виде

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad (\partial \sigma_x(x, y) / \partial y) |_{y=0} = 0 \quad (2.3)$$

Уравнения (1.3), (1.5) и условия (2.1), (2.3) представляют собой задачу со смешанными граничными условиями. Поэтому функция  $\sigma_0(\mu, y)$ , фигурирующая в решении (1.11), (1.14), зависит от  $\kappa$  и подлежит определению. Представим  $\sigma_0(\mu)$  в виде бесконечного ряда, предполагая, что этот ряд сходится

$$\sigma_0(\mu) = T_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^k T_k(\mu) \quad (2.4)$$

где  $T_0(\mu)$  — преобразование Фурье  $\sigma_y(x, 0)$  для однородной среды. Считая известным  $T_0(\mu)$  — решение задачи для однородной среды, найдем рекуррентные соотношения для  $T_k(\mu)$ ,  $k \geq 1$ .

Преобразования Фурье  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$  имеют вид

$$\sigma_x(\mu, y) = -\mu^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k''(\mu, y), \quad \tau_{xy}(\mu, y) = -i\mu^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k'(\mu, y)$$

Учитывая, что  $\tau_0(\mu) = 0$ , граничные условия (2.1), (2.3) можно записать

$$\int_0^{\infty} T_k(\mu) \cos \mu x d\mu = 0 \quad (0 < x < L, k \geq 1) \quad (2.5)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ 2|\mu| T_k(\mu) + \mu^{-2} \sum_{n=1}^k \Phi_n'''(T_{k-n}|\mu, 0) \kappa^{-n} \right] \cos \mu x d\mu = 0 \quad (x > L, k \geq 1) \quad (2.6)$$

Интегрируя (2.5) по  $x$  от 0 до  $x$ , получаем

$$\int_0^x \mu^{-1} T_k(\mu) \sin \mu x d\mu = 0 \quad (0 < x < L) \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.6) по  $x$  от  $x$  до  $N$ , имеем

$$\int_0^{\infty} \left[ 2 \operatorname{sign}(\mu) T_k(\mu) + \mu^{-3} \sum_{n=1}^k \kappa^{-n} \Phi_n'''(T_{k-n}|\mu, 0) \right] \sin \mu x d\mu = R_k(N) \quad (L < x < N)$$

$$R_k(N) = \int_0^{\infty} \sin(\mu N) \left[ 2T_k(\mu) + \mu^{-3} \sum_{n=1}^k \kappa^{-n} \Phi_n'''(T_{k-n}|\mu, 0) \right] d\mu \quad (2.8)$$

Заменяя  $\sin \mu x$  функцией Бесселя полуцелого порядка  $\sin \mu x = \sqrt{1/2\pi\mu x} J_{1/2}(\mu x)$  и вводя новую неизвестную функцию

$$z_k(\mu) = \sqrt{\mu} T_k(\mu) + g_k(\mu) - C_k / \sqrt{\mu}$$

$$g_k(\mu) = 1/2 \mu^{-5/2} \sum_{n=1}^k \kappa^{-n} \Phi_n'''(T_{k-n}|\mu, 0) \quad (2.9)$$

$$\Phi_n(T_s|\mu, y) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_n(T_s(\mu) (1 + |\mu| y) e^{-|\mu| y} |\mu, y), \quad C_k = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{\mu} g_k(\mu)$$

получаем вместо (2.7), (2.8) парные интегральные уравнения:

$$\int_0^{\infty} \mu^{-1} z_k(\mu) J_{1/2}(\mu x) d\mu = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} \left( g_k(\mu) - \frac{C_k}{\sqrt{\mu}} \right) J_{1/2}(\mu x) d\mu \quad (0 < x < L)$$

$$\int_0^{\infty} z_k(\mu) J_{1/2}(\mu x) d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} (\pi^{-1} R_k(N) - C_k) \quad (L < x < N) \quad (2.10)$$

Устремляя  $N$  к бесконечности, получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_k(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{g_k(\mu)}{\sqrt{\mu}} \sin \mu N d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} \mu^{-1} C_k \sin \mu N d\mu$$

Отсюда  $R_k(\infty) = \pi C_k$ . Таким образом, система (2.10) примет вид

$$\int_0^{\infty} \mu^{-1} z_k(\mu) J_{1/2}(\mu x) d\mu = f_k(x/L) \quad (0 < x < L)$$

$$\int_0^{\infty} z_k(\mu) J_{1/2}(\mu x) d\mu = 0 \quad (x > L) \quad (2.11)$$

Решение системы (2.11) представляется в квадратурах [4]:

$$z_k(\mu) = \mu L \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sqrt{\mu L} J_0(\mu L) \int_0^1 \frac{x^{3/2} f_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \right. \\ \left. + \int_0^1 \frac{x^{3/2} dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 f_k(tx) (\mu Lt)^{3/2} J_1(\mu Lt) dt \right\} \\ f_k(x) = \int_0^\infty \mu^{-1} J_{3/2}(\mu Lx) \left( g_k(\mu) - \frac{C_k}{\sqrt{\mu}} \right) d\mu \quad (2.12)$$

Формулы (2.12) в совокупности с (2.9) полностью определяют функцию  $\sigma_0(\mu)$ , что и решает поставленную задачу.

Определим коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  в кончике трещины. Учитывая

$$\int_0^\infty \sigma_y(x, 0) \cos \mu x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{h=0}^\infty T_h(\mu) \kappa^h, \quad K_I = \lim_{x \rightarrow L+0} [\sigma_y(x, 0) \sqrt{2\pi(x-L)}]$$

получим для  $K_I$  формулу

$$K_I = - \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt{\pi \mu} \sum_{h=0}^\infty \frac{\kappa^h T_h(\mu)}{\sin(\mu L - \pi/4)}$$

Используя выражение (2.12), получаем для  $\mu \rightarrow \infty$ :

$$T_h(\mu) = \frac{\sin(\mu L - \pi/4)}{\sqrt{\mu}} \int_0^\infty \frac{J_0(t)}{\sqrt{t}} \left( g_h(t/L) - C_h \sqrt{\frac{L}{t}} \right) dt + O(\mu^{-1})$$

Вводя коэффициент интенсивности напряжений у правого конца трещины в однородном теле при граничных условиях (2.1), (2.2)

$$K_I^0 = 2p \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^L \frac{\exp(\kappa \cos \lambda x)}{I_0(\kappa) \sqrt{L^2 - x^2}} dx$$

получим

$$K_I = K_I^0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{h=1}^\infty \int_0^1 \frac{x^{3/2} f_h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2.13)$$

или

$$K_I = K_I^0 + \sqrt{2L} \sum_{h=1}^\infty \int_0^\infty \mu^{-3/2} J_0(\mu L) (\mu^{-3/2} C_h - g_h(\mu)) d\mu$$

Уравнение (2.13) в совокупности с критерием разрушения Ирвина  $K_I = K_{Ic} = \sqrt{2E(x)\gamma/(1-\nu^2)}$  ( $\gamma$  — поверхностная энергия, не зависящая от  $x$ ) дает критическое значение напряжений  $p_*$  для данной длины трещины  $L$ .

На фиг. 1 приведены зависимости  $p^0 = p_* \pi \sqrt{(1-\nu^2)/(\lambda \langle E \rangle \gamma)}$  при  $\nu = 0,25$ ; отдельным кривым отвечают следующие значения  $\kappa$ : 1 — 0, 2 — (-3,5), 3 — (-1,5), 4 — 1,5, 5 — 3,5.

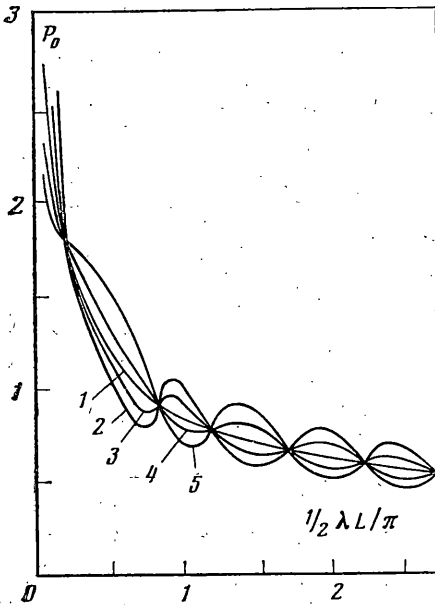
При малых длинах трещин ( $\lambda L \ll 1$ ) расчетные значения совпадают с теоретическими:

$$K_{I_1} \approx \frac{p\sqrt{\pi L} e^{\kappa}}{I_0(\kappa)}, \quad K_{I_2} \approx \frac{2\langle E \rangle \gamma e^{\kappa}}{I_0(\kappa) (1-\nu^2)}, \quad p_* \approx \sqrt{\frac{2\langle E \rangle I_0(\kappa) \gamma}{\pi L e^{\kappa} (1-\nu^2)}}$$

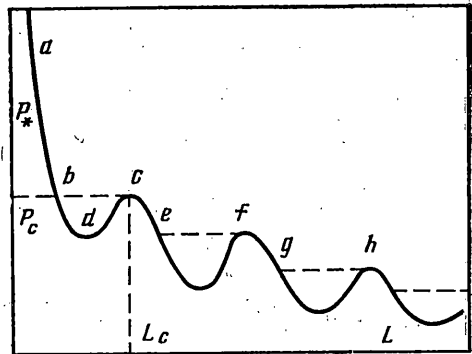
Для больших длин трещин ( $\lambda L \gg 1$ ) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$p_* \approx (2\langle E \rangle \gamma I_0(\kappa) \exp(\kappa \cos \lambda L))^{1/2} / \left[ \sqrt{\pi L} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \sum_{n=0}^k \frac{1}{(k-n)! n!} J_0(\lambda L(k-2n)) \right]$$

На фиг. 2 схематично изображен вид кривой, критические напряжения — длина трещины. На участке  $ab$  трещина аналогична трещине Гриффитса — достижение критических напряжений при  $L < L_c$  ведет к неустойчивому развитию трещины. На участках типа  $dc$  трещина устойчиво подрастает до длины  $L_c$ . На участках типа  $Bd$  имеет место локально неустойчивое развитие трещины. Трещина, начав распространяться на  $bd$ , тормозится на  $dc$ , далее устойчиво



Фиг. 1



Фиг. 2

подрастает до величины нагрузки  $p_c$ , при достижении которой происходит уже неустойчивое динамическое развитие трещины до бесконечности. Таким образом, критические, в смысле полной потери устойчивости, напряжения представляются ломаной линией  $abcegh$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Плоская задача теории упругости микронеоднородных тел.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 3, с. 72–77.
2. Ломакин В. А., Шейнин В. И. О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 33–39.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. Busbridge I. W. Dual integral equations.— Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1938, v. 44, p. 115–129.

Москва

Поступила в редакцию  
15.X.1984