МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 531.1

КАЛИБРОВКА ДАТЧИКОВ ОРИЕНТАЦИИ

ПОТАПЕНКО Е. М.

Предложены и исследованы принципы построения простых алгоритмов калибровки позиционных и скоростных датчиков ориентации движущихся объектов без опознавания ориентиров и без использования информации об ориентации объекта.

Для оценки фактической точности датчиков, а также для уточнения ориентации движущихся объектов необходима калибровка датчиков. Классическим методом решения этой задачи является расширение вектора состояния за счет включения в него помимо параметров ориентации погрешностей датчиков и восстановление вектора состояния динамическим фильтром. В этом случае существенно возрастают вычислительные трудности, которые пропорциональны кубу порядка фильтра [1]. Другим путем, снижающим вычислительные трудности, является калибровка датчиков независимо от процесса определения ориентации. Очень просто эта задача решается, когда датчики могут замерять один и тот же вектор [2, 3]. Однако при определении ориентации чаще всего каждый датчик предназначен для измерения «своего» вектора, например астродатчики фиксируют положение различных астроориентиров, а датчик угловой скорости замеряет вектор абсолютной угловой скорости объекта. В этом случае для упрощения калибровки часто применяют специальные режимы движения: стабилизацию в инерциальном пространстве и плоские последовательные развороты вокруг трех ортогональных осей [4, 5]. Специальные калибровочные маневры уменьшают оперативность объектов. Поэтому в последнее время появилась тенденция калибровать датчики ориентации в процессе штатной работы объекта [6–8]. В работах [4–8] для калибровки необходима предварительная идентификация ориентиров. Вследствие вычислительной трудоемкости существующие алгоритмы калибровки в основном предназначены для стационарных вычислителей.

Целью публикуемой статьи является разработка и исследование принципов калибровки датчиков ориентации при помощи бортового вычислителя по неопознанным ориентирам без использования информации об ориентации объекта.

1. Взаимная калибровка позиционных датчиков. Рассматриваются два астродатчика, матрицы-столбцы выходных сигналов которых определяются уравнениями

$$\mathbf{u}_i=\mathbf{p}_i+\mathbf{v}_i \quad (i=1,\ 2) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{p}_i$ — матрица-столбец, сопоставляемая единичному вектору направления $\mathbf{S}_i$ на i-й ориентир, составленная из проекций $\mathbf{S}_i$ на оси системы, связанной с i-м датчиком (здесь и дальше все системы координат правые ортогональные), $\mathbf{v}_i$ — независимые гауссовские процессы белого шума с нулевым средним; i-й датчик установлен относительно некоторого связанного с объектом базиса с малой постоянной погрешностью, определяемой вектором $\mathbf{z}_i$. Матрица A перехода от связанного с объектом базиса к базису, связанному с i-м датчиком, определяется выражением

$$A_i=I_3-\Phi(\mathbf{z}_i) \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем $\Phi(\mathbf{r})$ означает кососимметрическую матрицу, составленную из проекций вектора $\mathbf{r}$ следующим образом (I_3 — единичная матрица):

$$\Phi(\mathbf{r})=\begin{Vmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

Если через $\mathbf{b}_i$ обозначить матрицу-столбец, записанную через проекции S_i на оси связанного с объектом базиса, то

$$p_i = A_i b_i \tag{1.4}$$

На основании (1.1)—(1.4), опуская произведения малых величин z_i, v_i, можно записать

$$u_1^T u_2 = b_1^T b_2 + b_1^T \Phi(b_2)(z_2 - z_1) + w_1 \tag{1.5}$$

$$\Phi(u_1) u_2 = \Phi(b_1) b_2 + \Phi(b_1)\Phi(b_2) z_2 - \Phi(b_2)\Phi(b_1) z_1 + w_2 \tag{1.6}$$

где T — символ транспонирования и

$$w_1 = b_1^T v_2 + b_2^T v_1, \quad w_2 = \Phi(b_1) v_2 - \Phi(b_2) v_1 \tag{1.7}$$

При получении соотношений (1.5)—(1.7) были использованы следующие свойства кососимметрических матриц: $\Phi^T(r) = -\Phi(r)$, $\Phi(r_1) r_2 = -\Phi(r_2) r_1$. В выражениях (1.5), (1.6) произведение $b_1^T b_2$ равно скалярному произведению $S_1 S_2 = \cos\alpha$, произведению $\Phi(b_1) b_2 = -\Phi(b_2) b_1 = \Delta$ соответствует векторное произведение $S_1 \times S_2 = S_{12}$, причем $|S_{12}| = \sin\alpha$, где α — постоянный угол между векторами S_1 и S_2. Матрица-столбец Δ задана проекциями вектора S_{12} на оси связанного с объектом базиса.

Вследствие постоянства векторов z_1 и z_2 в связанном базисе, вектора S_{12} в инерциальном базисе и угла α дифференцирование в связанном базисе дает

$$z_i^{\cdot} = 0, \quad \Delta^{\cdot} = -\Phi(\omega)\Delta, \quad (\cos\alpha)^{\cdot} = 0 \tag{1.8}$$

Здесь ω — вектор абсолютной угловой скорости объекта. Уравнения (1.8) можно рассматривать как уравнения вектора состояния с выходными сигналами (измерениями) (1.5), (1.6), на основании которых строится динамический фильтр. Для этого уравнения (1.5), (1.6) надо представить в следующем виде, справедливом для малых погрешностей:

$$y_I = u_1^T u_2 = \cos\alpha + u_1^T \Phi(u_2)(z_2 - z_1) + w_1 \tag{1.9}$$

$$y_{II} = \Phi(u_1) u_2 = \Delta + \Phi(u_1)\Phi(u_2) z_2 - \Phi(u_2)\Phi(u_1) z_1 + w_2 \tag{1.10}$$

Для определенности в дальнейшем в качестве базового датчика принимается первый датчик, тогда $z_1 \equiv 0$, $z_2 = z$.

Для исследования наблюдаемости системы (1.8)—(1.10) последние два уравнения записываются в виде

$$y_I = \cos\alpha + \Delta^T z + w_1 \tag{1.11}$$

$$y_{II} = \Delta + \Phi(b_1)\Phi(b_2) z + w_2 \tag{1.12}$$

Рассматривается подлежащий восстановлению четырехмерный вектор состояния $x = [z^T, \cos\alpha]^T$.

Тогда в силу уравнений (1.8), (1.11) можно записать

$$x^{\cdot} = 0, \quad y_I = Cx + w_1, \quad C = [\Delta^T, 1] \tag{1.13}$$

$$\Delta^{\cdot T} = \Delta^T \Phi(\omega) \tag{1.14}$$

В соответствии с [9] и уравнением (1.14) матрица наблюдаемости имеет следующий вид:

$$Q = \left\| \begin{matrix} C \\ C^{\cdot} \\ C^{\cdot\cdot} \\ C^{\cdot\cdot\cdot} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Delta^T & 1 \\ \Delta^T\ \Phi(\omega) & 0 \\ \Delta^T\ [\Phi^2(\omega)) + \Phi(\omega^{\cdot})] & 0 \\ \Delta^T\ [\Phi^3(\omega) + 3\Phi(\omega)\Phi(\omega^{\cdot}) + \Phi(\omega)^{\cdot\cdot})] & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Система будет наблюдаемой, если $\operatorname{rank} Q = 4$. Для наблюдаемости системы необходимо, чтобы $\Delta \neq 0$ и $\Phi(\omega)\Delta \neq 0$, т. е. чтобы опорные векторы S_1 и S_2 не были коллинеарными и вектор абсолютной угловой скорости объекта ω не был постоянно перпендикулярен плоскости, содержащей векторы S_1 и S_2.

Предположим, что вектор ω имеет постоянное направление в инерциальном пространстве, а следовательно, и в связанном с объектом базисе. Не уменьшая общности, положим, что $\omega=[00\omega]^T$. Тогда проекция вектора Δ на вектор ω, обозначенная через Δ_3, постоянна, а Δ_1 и Δ_2 (проекции на оси, перпендикулярные ω) переменные и описываются уравнениями

$$\dot\Delta_1=-\omega\Delta_2, \quad \dot\Delta_2=\omega\Delta_1, \quad \dot\Delta_3=0 \tag{1.15}$$

В этом случае измерение (1.11) будет:

$$y_\mathrm{I}=\Delta_1x_1+\Delta_2x_2+\Delta_3x_3+x_4+w_1 \tag{1.16}$$

Как следует из (1.16) и уравнения $\dot{\mathbf{x}}=0$, составляющие x_3 и x_4 (z_3 и $\cos\alpha$) неразличимы. Для понижения размерности вектора состояния вводится обозначение $\Delta_3x_3+x_4=x_3'$, с учетом которого система (1.13) записывается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}=0, \quad y_\mathrm{I}=C_0\mathbf{x}+w_1, \quad C_0=[\Delta_1\Delta_2 1], \quad \mathbf{x}=[x_1,\ x_2,\ x_3'] \tag{1.17}$$

Матрица наблюдаемости системы (1.17) с учетом (1.15) принимает вид

$$Q_0=\left\|\begin{matrix} C_0 \\ \dot C_0 \\ \ddot C_0 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 & 1 \\ -\omega\Delta_2 & \omega\Delta_1 & 0 \\ -(\dot\omega\Delta_2+\omega^2\Delta_1) & (\dot\omega\Delta_1-\omega^2\Delta_2) & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$\det Q_0=\omega^3(\Delta_1^2+\Delta_2^2)=\omega^3(1-\Delta_3^2)$$

Таким образом, условием наблюдаемости трехмерного вектора состояния при постоянном направлении вектора абсолютной угловой скорости объекта является неперпендикулярность вектора абсолютной угловой скорости объекта плоскости опорных векторов $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$. Очевидно, что, если вектор ω будет менять направление, то весь четырехмерный вектор состояния, включающий три составляющих ошибки установки второго датчика относительно первого и косинус угла между астроориентирами, будет наблюдаться. Калибровка осуществляется без опознавания астроориентиров. Более того, наблюдаемый косинус угла между астроориентирами входит в качестве одного из основных параметров в бортовые звездные каталоги, что позволяет идентифицировать звезды.

В выражении (1.9) $\cos\alpha$ может оказаться на два порядка больше второго слагаемого. Поэтому для снижения требований к вычислительной машине и повышения точности счета в качестве составляющей вектора состояния следует рассматривать не $\cos\alpha$, а величину $\cos\alpha-y_\mathrm{I}(0)$, в качестве же выходной координаты не y_I, а $y_\mathrm{I}-y_\mathrm{I}(0)$, где $y_\mathrm{I}(0)$ — значение выходной координаты в начальный момент времени. В этом случае все составляющие вектора состояния будут иметь равные порядки.

Рассмотрим теперь измерение (1.12). Вводится шестимерный вектор состояния $\mathbf{x}=[\mathbf{z}^T\Delta^T]^T$.

Дифференцирование вектора $\mathbf{x}$ в инерциальной системе координат позволяет записать систему

$$\dot{\mathbf{x}}=A_0\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_\mathrm{II}=C_0\mathbf{x}+\mathbf{w}_2 \tag{1.18}$$

$$A_0=\left\|\begin{array}{c|c} \Phi(\omega_0) & 0_{3\times3} \\ \hline 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{array}\right\|, \quad C_0=\|\Phi(\mathbf{l}_1)\Phi(\mathbf{l}_2),\ I_3\|$$

Здесь ω_0 — вектор абсолютной угловой скорости объекта, заданный проекциями на оси инерциального базиса, $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ — постоянные матрицы-столбцы, заданные проекциями на оси инерциального базиса векторов $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$.

Матрица наблюдаемости системы (1.18) определяется зависимостью [9]:

$$Q=\left\|\begin{matrix} \Phi(\mathbf{l}_1)\Phi(\mathbf{l}_2) & I_3 \\ \Phi(\mathbf{l}_1)\Phi(\mathbf{l}_2)\Phi(\omega_0) & 0 \\ \Phi(\mathbf{l}_1)\Phi(\mathbf{l}_2)[\Phi(\dot\omega_0)+\Phi^2(\omega_0)], & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \end{matrix}\right\|$$

$$\operatorname{rank} Q = 3 + \operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \Phi(\mathbf{l}_1)\,\Phi(\mathbf{l}_2)\,\Phi(\omega_0) \\ \Phi(\mathbf{l}_1)\,\Phi(\mathbf{l}_2)\,[\Phi(\omega_0^{\cdot}) + \Phi^2(\omega_0)] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{Vmatrix} \qquad (1.19)$$

Для упрощения исследования наблюдаемости системы (1.18) за инерциальную систему принимается трехгранник, одна ось которого (пусть ось *1*) совпадает с $\mathbf{S}_1$, вторая — лежит в плоскости векторов $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$, а третья — перпендикулярна плоскости векторов $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$. Тогда для элементов матриц $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$, соответствующих вторым индексам, можно записать $l_{12}\equiv l_{13}\equiv l_{23}\equiv 0$ и

$$\Phi(\mathbf{l}_1)\,\Phi(\mathbf{l}_2) = l_{11} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_{22} & -l_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -l_{21} \end{Vmatrix}$$

Таким образом, ранг матрицы $\Phi(\mathbf{l}_1)\Phi(\mathbf{l}_2)$ при $l_{21}\neq 0$ равен двум, при $l_{21}=0$ (вектор $\mathbf{S}_2$ перпендикулярен вектору $\mathbf{S}_1$) равен единице.

Пусть $\omega_0=\mathrm{const}$. Тогда с учетом рекуррентных соотношений

$$\Phi^3(\omega_0) = -\omega_0^2\Phi(\omega_0), \quad \Phi^4(\omega_0) = -\omega_0^2\Phi^2(\omega_0), \quad \Phi^5(\omega_0) = \omega_0^4\Phi(\omega_0) \qquad (1.20)$$

можно заключить, что в матрице, входящей в (1.19), третья и пятая строки пропорциональны первой строке, а четвертая — пропорциональна второй строке. Поэтому

$$\operatorname{rank} Q = 3 + \operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \Phi(\mathbf{l}_1)\,\Phi(\mathbf{l}_2)\,\Phi(\omega_0) \\ \Phi(\mathbf{l}_1)\,\Phi(\mathbf{l}_2)\,\Phi^2(\omega_0) \end{Vmatrix} \qquad (1.21)$$

На основании того, что ранг трехмерной кососимметрической матрицы не выше двух и $\operatorname{rank} ABC \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B, \operatorname{rank} C\}$, ранг каждой строки в матрице из (1.21) не выше двух. При принятой выше инерциальной системе координат содержательная часть матрицы из (1.21) имеет вид

$$l_{11} \begin{Vmatrix} -l_{21}\omega_3 & -l_{22}\omega_3 & l_{22}\omega_2 + l_{21}\omega_1 \\ l_{21}\omega_2 & -l_{21}\omega_1 & 0 \\ [-l_{22}\omega_3^2 - \omega_2(l_{22}\omega_2 + l_{21}\omega_1)] & [l_{21}\omega_3^2 + \omega_1(l_{22}\omega_2 + l_{21}\omega_1)] & (l_{22}\omega_1 - l_{21}\omega_2)\,\omega_3 \\ -l_{21}\omega_1\omega_3 & -l_{21}\omega_2\omega_3 & l_{21}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{Vmatrix} \qquad (1.22)$$

Здесь ω_1, ω_2, ω_3 — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_0$ на соответствующие индексам оси.

Можно показать, что любой столбец матрицы (1.22) является линейной комбинацией двух других столбцов. Следовательно, ранг матрицы (1.22) не выше двух и $\operatorname{rank} Q$ в (1.19) не выше пяти. Ненаблюдаемой является составляющая ошибки установки, коллинеарная вектору $\boldsymbol{\omega}$. Очевидно, что при переменной абсолютной угловой скорости весь вектор ошибки установки будет наблюдаем.

Для построения динамического фильтра необходимо использовать не систему (1.18), а систему, получающуюся дифференцированием вектора $\mathbf{x}$ в связанном с объектом базисе

$$\mathbf{x}^{\cdot} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_{\text{II}} = C\mathbf{x} + \mathbf{w}_2$$

$$A = \left\Vert \begin{array}{c|c} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ \hline 0_{3\times3} & -\Phi(\boldsymbol{\omega}) \end{array} \right\Vert, \qquad C = [\Phi(\mathbf{u}_1)\,\Phi(\mathbf{u}_2),\ I_3] \qquad (1.23)$$

При калибровке датчиков достоинством измерения (1.10) по сравнению с (1.9) является его работоспособность при малых углах между астроориентирами, недостатком — большая размерность вектора состояния и необходимость иметь информацию об абсолютной угловой скорости объекта, входящей в матрицу A системы (1.23).

2. Калибровка позиционного датчика и датчика угловой скорости. Рассматривается датчик абсолютной угловой скорости объекта, вектор выходных сигналов которого определяется выражением

$$\mathbf{u}_з = (I_3 + K)\,\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d} + \mathbf{v}_3 \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости объекта, составленный из проекций на оси связанного базиса, $\mathbf{v}_3$ — гауссовский процесс белого шума, $\mathbf{d}$ — вектор уходов, причем

$$\mathbf{d}^{\bullet} = \mathbf{v}_4 \tag{2.2}$$

$\mathbf{v}_4$ — гауссовский процесс белого шума, K — матрица, учитывающая неточность масштабных коэффициентов и неточность выставки входных осей. Элементы матриц K, $\mathbf{d}$ и $\mathbf{v}_3$ предполагаются малыми.

На объекте также установлен астродатчик, выходные характеристики которого определяются выражениями (1.1)—(1.4). Для простоты написания индекс i в дальнейшем опускается.

Дифференцирование вектора $\mathbf{p}$ в базисе астродатчика дает соотношение

$$\mathbf{p}^{\bullet} = -\Phi(\boldsymbol{\omega}')\,\mathbf{p} = \Phi(\mathbf{p})\,\boldsymbol{\omega}' \tag{2.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}'$ — вектор абсолютной угловой скорости объекта, составленный из проекций на оси базиса астродатчика

$$\boldsymbol{\omega}' = A\boldsymbol{\omega} \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) и (1.2) уравнение (2.3) принимает вид

$$\mathbf{p}^{\bullet} = \Phi(\mathbf{p})\,[I_3 - \Phi(\mathbf{z})\,]\,\boldsymbol{\omega} \tag{2.5}$$

Подставляя в (2.5) значения $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\omega}$, соответственно, из (1.1) и (2.1) с учетом соотношения $(I_3+K)^{-1} \approx I_3 - K$, а также пренебрегая квадратами малых величин, можно записать

$$\mathbf{u}^{\bullet} = \Phi(\mathbf{u})\,[\mathbf{u}_3 - K\mathbf{u}_3 - \mathbf{d} + \Phi(\mathbf{u}_3)\,\mathbf{z}] + \mathbf{v}^{\bullet} - \Phi(\mathbf{u})\,\mathbf{v}_3 + \Phi(\mathbf{u}_3)\,\mathbf{v} \tag{2.6}$$

В выражении (2.6) имеется дифференцирование белого шума, что само по себе недопустимо. Однако в действительности шумы астродатчиков настолько малы по сравнению с шумами других датчиков, что ими можно пренебречь. (Обычно считают, что шум в сигнале астродатчика появляется в результате его дифференцирования.) На практике дифференцирование по времени заменяют взятием конечных разностей, что возможно и при белом шуме.

Замена в (2.6) производных конечными разностями дает

$$\mathbf{y}_{\text{III}}[n] = T\Phi(\mathbf{u}[n])\,\{\Phi(\mathbf{u}_3[n])\,\mathbf{z} - \mathbf{d} - K\mathbf{u}_3[n]\} + \mathbf{w}_3[n] \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y}_{\text{III}}[n] = \mathbf{u}[n] - \mathbf{u}[n-1] - T\Phi(\mathbf{u}[n])\,\mathbf{u}_3[n]$$

$$\mathbf{w}_3[n] = \mathbf{v}[n] - \mathbf{v}[n-1] - T\Phi(\mathbf{u}[n])\,\mathbf{v}_3[n] + T\Phi(\mathbf{u}_3[n])\,\mathbf{v}[n]$$

где n — безразмерное дискретное время, T — временной интервал между замерами.

Вследствие постоянства идентифицируемых параметров

$$\mathbf{z}[n] = \mathbf{z}[n-1], \quad \mathbf{d}[n] = \mathbf{d}[n-1] + \mathbf{v}_4[n], \quad K[n] = K[n-1] \tag{2.8}$$

На основании системы (2.7), (2.8) можно записать динамический линейный фильтр, идентифицирующий неидеальность системы. Для исследования возможностей этого фильтра перейдем в системе (2.7), (2.8) к непрерывному времени и проделаем преобразования, справедливые в рамках линейной постановки задачи. Тогда

$$\mathbf{z}^{\bullet} = 0, \quad \mathbf{d}^{\bullet} = \mathbf{v}_4, \quad K^{\bullet} = 0 \tag{2.9}$$

$$\mathbf{y}_{\text{III}} = \Phi(\mathbf{b})\,[\Phi(\boldsymbol{\omega})\,\mathbf{z} - \mathbf{d} - K\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{w}_3$$

Вводится 15-мерный вектор состояния

$$\mathbf{x}=[\mathbf{d}^T,\ \mathbf{z}^T,\ \mathbf{k}_1^T,\ \mathbf{k}_2^T,\ \mathbf{k}_3^T]^T \qquad (2.10)$$

где $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ — векторы, составленные из элементов первой, второй и третьей строк матрицы K. Тогда система (2.9) представляется в виде

$$\dot{\mathbf{x}}=[\mathbf{v}_4^T,\ 0_{1\times 12}]^T, \quad \mathbf{y}_{III}=C\mathbf{x}+\mathbf{w}_3,$$
$$C=\Phi(\mathbf{b})\,[-I_3,\ \Phi(\boldsymbol{\omega}),\ -D(\boldsymbol{\omega})], \quad D(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{diag}[\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}^T] \qquad (2.11)$$

Матрица наблюдаемости для системы (2.11) размера 45×15 и вектор $\mathbf{b}$ определяются следующим образом [9]:

$$Q=[C^T,\ \dot{C}^T,\ \ddot{C}^T,\ldots,\ (C^T)^{(14)}]^T, \quad \dot{\mathbf{b}}=-\Phi(\boldsymbol{\omega})\mathbf{b}.$$

Пусть объект вращается с постоянной скоростью. С учетом (2.11) матрица наблюдаемости принимает вид

$$Q=\left\|\begin{matrix}\Phi(\mathbf{b}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\Phi[\Phi(\boldsymbol{\omega})\mathbf{b}] & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi[\Phi^2(\boldsymbol{\omega})\mathbf{b}] & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\Phi[\Phi^3(\boldsymbol{\omega})\mathbf{b}]\\ \vdots & & & \end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}-I_3 & \Phi(\boldsymbol{\omega}) & -D(\boldsymbol{\omega})\\ -I_3 & \Phi(\boldsymbol{\omega}) & -D(\boldsymbol{\omega})\\ -I_3 & \Phi(\boldsymbol{\omega}) & -D(\boldsymbol{\omega})\\ -I_3 & \Phi(\boldsymbol{\omega}) & -D(\boldsymbol{\omega})\\ \vdots & & \end{matrix}\right\| \qquad (2.12)$$

Ранг кососимметрических матриц третьего порядка, стоящих на диагонали первой матрицы в (2.12), при неколлинеарности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{S}$ равен двум. В этом легко убедиться применив соотношения (1.20). Поэтому первая матрица в (2.12) имеет ранг, равный тридцати. Ранг второй матрицы в (2.12) равен трем. Так как для матриц A и B $\mathrm{rank}\,AB\leqslant\min\{\mathrm{rank}\,A,\ \mathrm{rank}\,B\}$, то ранг матрицы наблюдаемости Q не выше трех. Таким образом, при постоянном векторе абсолютной угловой скорости объекта наблюдаемы не более трех линейных комбинаций координат вектора состояния (2.10). Рассмотрим линейную комбинацию

$$\mathbf{r}=\Phi(\boldsymbol{\omega})\mathbf{z}-\mathbf{d}-K\boldsymbol{\omega} \qquad (2.13)$$

При постоянном векторе $\boldsymbol{\omega}$ система (2.9) перепишется в виде $\dot{\mathbf{r}}=-\mathbf{v}_4$, $\mathbf{y}_{III}=\Phi(\mathbf{b})\mathbf{r}+\mathbf{w}_3$ с матрицей наблюдаемости

$$Q=\left\|\begin{matrix}\Phi(\mathbf{b})\\ -\Phi[\Phi(\boldsymbol{\omega})\mathbf{b}]\\ \Phi[\Phi^2(\boldsymbol{\omega})\mathbf{b}]\end{matrix}\right\| \qquad (2.14)$$

Нетрудно убедиться, что ранг матрицы наблюдаемости (2.14) при неколлинеарности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{S}$ равен трем, т. е. вектор $\mathbf{r}$ из (2.13) наблюдаем. При изменении вектора $\boldsymbol{\omega}$ по модулю без изменения направления становится наблюдаемым вектор $[(\Phi(\boldsymbol{\omega})\mathbf{z}-K\boldsymbol{\omega})^T,\ \mathbf{d}^T]^T$.

Матрицу K можно представить в виде суммы симметрической матрицы K' и кососимметрической матрицы K'':

$$K=K'+K'', \quad K'={}^1/_2(K+K^T), \quad K''={}^1/_2(K-K^T)$$

Исследование алгебраической системы, получающейся из (2.13) заданием различных значений $\boldsymbol{\omega}$, позволяет заключить, что при изменении направления вектора $\boldsymbol{\omega}$ и использовании измерения (2.1) наблюдаем следующий вектор состояния: $[\mathbf{d}^T,\ \mathbf{k}_1',\ \mathbf{k}_2',\ \mathbf{k}_3',\ (z_1-k_{23}''),\ (z_2+k_{13}''),\ (z_3-k_{12}'')]^T$, где $\mathbf{k}_1'$, $\mathbf{k}_2'$, $\mathbf{k}_3'$ — строки матрицы K', $k_{ij}''=-k_{ji}''$ — элементы матрицы K'', z_1, z_2, z_3 — элементы вектора $\mathbf{z}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмидт Дж.* Линейные и нелинейные методы фильтрации.– В кн.: Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. М.: Мир, 1980, с. 49–73.
2. *Парусников Н. А.* Некоторые задачи определения ориентации приборных трехгранников.– Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6, с. 27–35.

3. *Дейст Дж., Мл., Сатерленд А. Мл.* Выставка бесплатформенной инерциальной системы с использованием статистических фильтров: упрощенная постановка задачи.— Ракетн. техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 4, с. 45–51.
4. *Yong K., Headly R. P.* Real Time Precision Attitude Determination System (RETPAD) for Highly Maneuverable Spacecrafts.— In: AIAA Guid. and Contr. Conf., Palo Alto, Calif., 1978, Collect. Techn. Pap., 1978, p. 48–58.— Рус. перев.: э-и. Астронавт. и ракетодин., 1979, № 23, с. 23–41.
5. *Murrell J. W.* Precision Attitude Determination for Multimission Spacecraft.— AIAA Paper, No. 78–1248; AIAA Guid. and Contr. Conf., Palo Alto, Calif., 1978, Collect. Techn. Pap., 1978, p. 7–9.
6. *Huong W. H., Zietz R. P.* Precision Attitude Determination for Agile Spacecraft Using MMS Modular Attitude Control System.— In: AIAA Guid. and Contr. Conf., Danvers, Mass, 1980, Collect. Techn. Pap. New York, N. Y., 1980, p. 105–110.— Рус. перев.: э.-и. Астронавт. и ракетодин., 1981, № 35, с. 1–9.
7. *Shuster M. D., Chitre D. M., Niebur D. P.* In-Flight Estimation of Spacecraft Attitude Sensor Accuracies and Alignments.— J. Guid., Contr. and Dynam., 1982, v. 5, No. 4, p. 339–343.
8. *Hayati S. A., Lai J. Y.* Science Platform and Attitude Subsystem In-Flight Calibration for the Galileo Spacecraft.— J. Guid., Contr. and Dynam., 1984, v. 7, No. 1, p. 29–35.
9. *Д'Анжело Г.* Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез. М.: Машиностроение, 1974. 287 с.

Запорожье

Поступила в редакцию
22.V.1985