МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 539.3.01

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БЕЗГРАНИЧНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ОСЛАБЛЕННОМ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГРИНФЕЛЬД М. А., ЛАНГМАН С. Л.

Предлагается асимптотическая процедура расчета напряженно-деформированного состояния безграничного упругого пространства с фазовым включением при изменении температуры, а также силовом воздействии на бесконечности. В отличие от рассматриваемого обычно случая, когда вещество включения химически отлично от вещества окружающего пространства и не реагирует с ним, под фазовым включением будем подразумевать такое, материал которого представляет собой физически отличную фазу того же химического вещества, что и окружающее пространство. При этом в процессе деформирования может происходить фазовое превращение одной фазы в другую, определяя перемещение границы включения, связанное с массообменом и, следовательно, тем самым приводя при одинаковых возмущающих факторах к существенно другому напряженному состоянию, чем в случае «обычного» включения. Предполагается, что в основном состоянии изотропное вещество как включения, так и объемлющего пространства находится в неискаженной гидростатической конфигурации (такие конфигурации часто создаются искусственно, либо возникают вследствие геологической эволюции), а на границе включения имеет место фазовый переход с проскальзыванием. Показывается, что внешние возмущающие факторы в общем случае снимают вырожденность равновесия в начальной конфигурации (наличие нетривиальных решений в отсутствие каких-либо возмущений), определяя, в зависимости от того, жидкий материал включения или твердый, его форму и ориентацию. Подробно исследуется случай эллипсоидального включения, для которого приводятся явные решения.

1. В эйлеровых переменных z^i изотропное нелинейное термоупругое тело характеризуется плотностью свободной энергии на единицу массы

$$\psi=\psi(I_1,\ I_2,\ I_3,\ \theta) \tag{1.1}$$

где I_M — три функционально независимых инварианта тензора конечных деформаций U_{ij}:

$$U_{ij}={}^1/_2(u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u^{k}_{\cdot,j})={}^1/_2(z_{ij}-g_{ij}) \tag{1.2}$$

а θ — абсолютная температура. Здесь z_{ij}, z^{ij} — метрический тензор эйлеровой системы координат, с помощью которого осуществляется поднятие и опускание латинских индексов, а также определяется ковариантное дифференцирование, обозначаемое символом $_{,i}$. Через $u^i(z)$ обозначены компоненты поля перемещений сплошной среды по базису системы отсчета, g_{ij} — метрический тензор начальной конфигурации. Плотность в начальной конфигурации ρ_0 связана с плотностью в актуальной конфигурации ρ известным соотношением

$$\rho=\rho_0\sqrt{\det(g_{ij})}/\sqrt{\det(z_{ij})} \tag{1.3}$$

Тензор напряжений Коши в эйлеровых переменных P^{ji} и энтропия η даются соотношениями [1]:

$$P^{ji}=\rho(\delta^{i}_{\cdot m}-2U^{i}_{\cdot m})\,\partial\psi/\partial U_{jm},\qquad \eta=-\partial\psi/\partial\theta \tag{1.4}$$

Обозначим через ε^{ijk} кососимметричный по всем индексам экстенсив с главным значением $\varepsilon^{123}=1$. Дискриминантные тензоры начальной и актуальной конфигураций описываются соотношениями

$$z^{ijk}=\det(z_{mn})^{-1/2}\varepsilon^{ijk},\quad g^{ijk}=\det(g_{mn})^{-1/2}\varepsilon^{ijk} \tag{1.5}$$

При рассмотрении изотропного упругого тела в окрестности неискаженной гидростатической конфигурации удобен набор инвариантов

$$I_1={}^1/_2g^{ijk}g^{pgr}g_{ip}g_{jg}U_{kr},\ I_2={}^1/_2g^{ijk}g^{pgr}g_{ip}U_{jg}U_{kr}$$
$$I_3={}^1/_6g^{ijk}g^{pgr}U_{ip}U_{jg}U_{kr} \tag{1.6}$$

Наряду с инвариантами I_M рассмотрим инварианты J_M:

$$J_1={}^1/_2z^{ijk}z^{pgr}z_{ip}z_{jg}U_{kr},\ J_2={}^1/_2z^{ijk}z^{pgr}z_{ip}U_{jg}U_{kr}$$
$$J_3={}^1/_6z^{ijk}z^{pgr}U_{ip}U_{jg}U_{kr} \tag{1.7}$$

представляющие собой соответственно полиномы первой, второй и третьей степени относительно U_{ij}. Учитывая (1.2), (1.3), (1.5)—(1.7), получим

$$\rho=\rho_0G^{1/2},\quad G=1-2J_1+4J_2-8J_3 \tag{1.8}$$

$$I_1=(J_1-4J_2+12J_3)G^{-1},\ I_2=(J_2-6J_3)G^{-1},\ I_3=J_3G^{-1} \tag{1.9}$$

$$J_1=U^{k}_{\cdot k},\qquad J_2={}^1/_2(U^{k\,2}_{\cdot k}-U_{st}U^{st}) \tag{1.10}$$

$$\partial J_1/\partial U_{jm}=z^{jm},\qquad \partial J_2/\partial U_{jm}=z^{jm}U^{k}_{\cdot k}-U^{jm}$$

$$\partial J_3/\partial U_{jm}=U^{js}U_{s}^{\cdot m}-U^{jm}U^{k}_{\cdot k}+{}^1/_2z^{jm}(U^{k\,2}_{\cdot k}-U_{st}U^{st})$$

Рассмотрим поведение изотропного упругого тела при малых деформациях и малом приращении температуры $T^{\vee}=\theta-\theta_0$. Разложим плотность свободной энергии (1.1) в ряд по переменным I_M, $T^{\vee}$, учитывая члены до третьего порядка малости

$$\psi=\psi_0+A_1I_1+A_2I_2+A_3T^{\vee}+{}^1/_2A_4T^{\vee2}+$$
$$+{}^1/_2A_5I_1^2+A_6I_1T^{\vee}+R(I_M,T^{\vee}) \tag{1.11}$$

где $R(I_M,\ T^{\vee})$ — остаток разложения ψ в ряд Тейлора по переменным I_M, $T^{\vee}$. Разложение соотношений (1.8), (1.9) даст

$$\rho=\rho_0(1-J_1+2J_2-{}^1/_2J_1^2+\ldots) \tag{1.12}$$

$$I_1=J_1-4J_2+2J_1^2+12J_3-12J_1J_2+4J_1^3+\ldots \tag{1.13}$$
$$I_2=J_2-6J_3+2J_1J_2+\ldots,\ I_3=J_3+\ldots$$

Учитывая теперь (1.10), получим

$$\partial I_1/\partial U_{jm}=z^{jm}+4U^{jm}+Q_1^{\,jm}+\ldots$$
$$\partial I_2/\partial U_{jm}=z^{jm}U^{k}_{\cdot k}-U^{jm}+Q_2^{\,jm}+\ldots,\ \partial I_3/\partial U_{jm}=Q_3^{\,jm}+\ldots \tag{1.14}$$

где под тензорами $Q_M^{\,jm}$ подразумевается некоторая линейная комбинация тензоров второго порядка малости $z^{jm}T^{\vee2}$, $U^{jm}T^{\vee}$, $U^{js}U_{s}^{\cdot m}$, $U^{jm}U^{k}_{\cdot k}$, $z^{jm}U^{k}_{\cdot k}T^{\vee}$, $z^{jm}U^{k\,2}_{\cdot k}$. Учитывая соотношения (1.12), (1.14), из (1.4) найдем

$$P^{ji}=\rho_0(A_1z^{ji}+U^{ji}(2A_1-A_2)+U^{k}_{\cdot k}z^{ji}(A_5+A_2-A_1)+A_6z^{ji}T^{\vee})+Q^{ji},\qquad A_3=-\eta \tag{1.15}$$

Введем обозначения

$$A_1=-p_0/\rho_0,\ A_2=-2(p_0+\mu)/\rho_0,\ A_4=-C_u$$
$$A_5=(\lambda+2\mu+p_0)/\rho_0,\ A_6=-\alpha K/\rho_0 \tag{1.16}$$

Модули λ, μ, $K=\lambda+{}^2/_3\mu$ имеют смысл изотермических модулей Ламэ и объемного сжатия в окрестности начальной конфигурации изотропного тела; p_0 — давление в начальной конфигурации, C_u — удельная теплоемкость при постоянном объеме, α — объемный коэффициент теплового расширения материала. Используя (1.11)—(1.13), (1.15), (1.16), получим

$$\psi=\psi_0-p_0\rho_0^{-1}(u^{k}_{\cdot,k}+{}^1\!/_2\,u^{k\,2}_{\cdot,k}+{}^1\!/_2\,u_{k,s}v^{s\ k}_{\cdot,\cdot})-\eta T^{\vee}+\rho_0^{-1}({}^1\!/_2\,\lambda u^{k\,2}_{\cdot,k}+$$
$$+\mu u_{(s,t)}u^{(s\ t)}_{\cdot,\cdot}-\alpha K u^{k}_{\cdot,k}T^{\vee}-{}^1\!/_2 C_u T^{\vee 2}+\ldots \quad (1.17)$$
$$P^{ji}=-p_0 z^{ji}-\alpha K T^{\vee} z^{ji}+\lambda u^{k}_{\cdot,k}z^{ji}+2\mu u^{(i\ j)}_{\cdot,\cdot})+Q^{\vee ij}+\ldots \quad (1.18)$$
$$\rho=\rho_0(1-u^{k}_{\cdot,k}-{}^1\!/_2\,u_{k,s}u^{s\ k}_{\cdot,\cdot}+{}^1\!/_2\,u^{k\,2}_{\cdot,k}+\ldots)$$

Здесь $Q^{\vee ij}$ — симметричный тензор второго порядка малости, состоящий из слагаемых типа $z^{ij}T^{\vee 2}$; $u^{(i\ j)}_{\cdot,\cdot}T^{\vee}$; $u^{k\,2}_{\cdot,k}z^{ij}$; $u^{i}_{\cdot,p}u^{j\ p}_{\cdot,\cdot}$; $u^{(i\ j)}_{\cdot,\cdot}u^{k}_{\cdot,k}$; $u^{k}_{\cdot,k}\,T^{\vee}z^{ij}$.

2. Согласно работам [2, 3], условия равновесия в двухфазной системе, где на межфазной границе возможен фазовый переход с проскальзыванием, имеют вид внутри каждой из фаз, во всей системе и на межфазной границе соответственно

$$P^{ji}{}_{,j}=0 \quad (2.1)$$

$$\theta=\mathrm{const} \quad (2.2)$$

$$A^{ji}_{\pm}n_j|_{\Gamma}=0, \qquad A^{ji}=P^{ji}-z^{ji}[\psi]^{+}_{-}/[\rho^{-1}]^{+}_{-} \quad (2.3)$$

где n_i — компоненты единичной нормали к границе Г (знаками плюс или минус будем отмечать величины, относящиеся к материалам, расположенным с разных сторон межфазной границы Г, при этом нормаль n_i пусть будет направлена в фазу плюс); $[a]_{-}^{+}\equiv a_{+}|_{\Gamma}-a_{-}|_{\Gamma}$, где $a_{+}|_{\Gamma}$, $a_{-}|_{\Gamma}$ — значения поля a на Г, соответственно, со стороны плюс и минус. Условие баланса масс на границе Г примем в виде

$$[\rho u^i]^{+}_{-}n_i|_{\Gamma}=d[\rho]^{+}_{-} \quad (2.4)$$

где d — смещение межфазной границы в направлении нормали n_i.

Пусть система в начальной конфигурации находилась в однородном гидростатическом состоянии, а положение границы было Γ_0. Из (2.3) получим, что для этого необходимо, чтобы

$$\psi_{0+}+p_0/\rho_{0+}=\psi_{0-}+p_0/\rho_{0-} \quad (2.5)$$

Рассмотрим возмущения в системе, состоящей из бесконечного пространства V фазы плюс с включением W фазы минус, вызываемые малым изменением температуры в ней $T^{\vee}=\varepsilon T$, а также однородным силовым воздействием на бесконечности $u^i\to\varepsilon\varkappa^{i}_{\cdot j}z^j$ при $|z|\to\infty$ (все пространство отнесено к аффинной системе координат; T, $\varkappa^{ij}\sim 1$, $\varepsilon\ll 1$). Отметим, что начальная конфигурация является вырожденной — в ней при отсутствии каких-либо возмущений существуют нетривиальные решения, соответствующие фазовым переходам на межфазной границе Γ_0. Действительно, граничная поверхность, не изменяя своей формы, может перемещаться в пространстве как твердое целое и в новом своем положении проходить через другие материальные точки, при этом гидростатическое напряженно-деформированное состояние фаз и условия равновесия на межфазной границе остаются неизменными. Каждой из указанных равновесных конфигураций будет отвечать нулевое поле перемещений вне включения и одно из отмеченных выше твердотельных движений внутри включения. Вырождение начальной конфигурации очевидным образом расширяется в случае жидкого включения — здесь при сохранении объема включения может меняться его форма. Таким образом, говоря о каком-либо включении W, необходимо иметь в виду наличие целого класса равновесных начальных конфигураций, связанных с задаваемым явно.

Поскольку в рассматриваемой ситуации естественно ожидать, что новое равновесное напряженно-деформированное состояние мало отличается от состояния начального класса, поля перемещений $u_{\pm}{}^{i}$ и уравнение раздела фаз $z^i(\xi^\alpha)$ будем искать в виде рядов по малому параметру ε [2]:

$$u^i_\pm = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \varepsilon^\gamma u_\gamma{}^i, \quad z^i(\xi^\alpha, \varepsilon) = z_0{}^i + n_0{}^i \sum_{\gamma=1}^{\infty} \varepsilon^\gamma a_\gamma(\xi^\alpha) \tag{2.6}$$

где ξ^α — координаты на поверхности, а $;\alpha$ — символ ковариантного дифференцирования по ξ^α на опорной поверхности Γ_0, принадлежащей классу начальных равновесных состояний и задаваемой уравнениями $z_0{}^i(\xi^\alpha)$ с компонентами единичной нормали $n_0{}^i(\xi^\alpha)$. Ряд $d=\sum \varepsilon^\gamma a_\gamma$ дает расстояние поверхности z^i от $z_0{}^i$ вдоль нормали к последней. Подставляя (2.6) в (2.1), (1.18) и собирая члены одного порядка по ε, получим

$$\sigma^{ij}_\pm(u_1{}^k)_{,j} = 0, \quad \sigma^{ij}_\pm(u^k) = \lambda_\pm u^k_{\cdot,k} z^{ij} + 2\mu_\pm u^{(i\,j)}_{\cdot,\cdot} \tag{2.7}$$

$$\sigma_\pm{}^{ij}(u_2{}^k)_{,j} = -Q^{ij}(u_{1k,l}, T)_{,j}, \quad Q^{ij} = \varepsilon^2 Q^{\sim ij} \tag{2.8}$$

Рассмотрим условия на границе Г. Используя (1.17), (1.18), (2.5), (2.6), найдем

$$A^{ji}(\varepsilon) = A_1{}^{ji}\varepsilon + A_2{}^{ji}\varepsilon^2 + \ldots, \quad A_1{}^{ji} = z^{ji}T(L-\alpha K) + \sigma^{ij}(u_1{}^k) \tag{2.9}$$

$$A_2{}^{ji} = \sigma^{ij}(u_2{}^k) + Q^{ij} + z^{ij}[{}^1/{}_2 C_u T^2 - U/\rho_0]^+_- / [\rho_0{}^{-1}]^+_-$$

$$L = [\eta]^+_- / [\rho_0^{-1}]^+_-, \quad U = {}^1/{}_2 \lambda u^k_{1,k}{}^2 + \mu u_{1(s,\,t)} u_1{}^{(s\,t)}_{\cdot,\cdot} + u_1{}^k_{\cdot,k} T\,(L - \alpha K)$$

Параметр L характеризует наклон кривой фазового равновесия. Условия (2.3) на границе $\Gamma(\varepsilon)$ в первом и втором приближении по ε определяются из соотношений

$$\delta^\gamma / \delta\varepsilon^\gamma (A^{ji} n_j)|_{\Gamma,\,\varepsilon=0} = 0 \quad (\gamma = 1,\ 2) \tag{2.10}$$

где $\delta/\delta\varepsilon$ — производная, определенная в [4]. Используя ее свойства, а также учитывая, что $A^{ji}(0)=0$, из (2.3), (2.9), (2.10) получим

$$A^{ji}_{1\pm} n_{0j}|_{\Gamma_0} = 0 \tag{2.11}$$

$$\{({}^1/{}_2 A_2{}^{ji} + a_1 n_0{}^k A_1{}^{ji}{}_{,k}) n_{0j} + A_1{}^{ji}(-a_{1;\alpha} z_{0j;}{}^\alpha)\}_\pm |_{\Gamma_0} = 0 \tag{2.12}$$

Уравнения (2.7), (2.11) и (2.8), (2.12) являются, соответственно, уравнениями первого и второго приближения по ε. Уравнения (2.7), (2.11) получены таким же способом в [2], где на их основе сформулирован принцип исключения расплава. Решение уравнений первого приближения внутри включения запишется в виде

$$u^i_{1-} = {}^1/{}_3(\alpha_- - L/K_-) T z^i + \theta^i_{\cdot j} z^j + c^i \tag{2.13}$$

где θ^{ij} — некоторый кососимметричный тензор, связанный с поворотом включения, а c^i — некоторый постоянный вектор. Отметим, что согласно уравнениям (2.3), (2.11) задача о фазовом включении в первом приближении эквивалентна задаче о полости под давлением $p=LT$. Уравнения второго приближения (2.8), (2.12) для включения с учетом (2.13) приобретают вид

$$\sigma_-{}^{ij}(u_2{}^k)_{,j} = 0 \tag{2.14}$$

$$\sigma^{ij}_-(u_2{}^k) n_{0j}|_{\Gamma_0} = \{Q^{ij} + z^{ij} U_+ \rho_{0+}^{-1} [\rho_0{}^{-1}]^{+\,-1}_-\} n_{0j} \tag{2.15}$$

где под тензором Q^{ij} подразумевается некоторый постоянный симметричный тензор. Уравнения (2.14), (2.15) представляют собой обычные уравнения теории упругости в задаче о равновесии тела W под действием поверхностной нагрузки, определяемой правой частью уравнения (2.15). При исследовании корректности такой задачи необходимо различать два случая:

внутри включения находится жидкость ($\mu_-=0$). Можно показать, что $Q^{ij} = \mathrm{const}\, z^{ij}$ и уравнения (2.14), (2.15) примут вид

$$u_{2-}{}^k_{\cdot,k} = \mathrm{const}, \quad \rho_{0+}[\rho_0^{-1}]^+_- \lambda_- u_{2-}{}^k_{\cdot,k} = U_+ + \mathrm{const}\,|_{\Gamma_0} \tag{2.16}$$

Таким образом, для корректности поставленной задачи необходимо

$$U_+(u_{1k,l},\ T)\,|_{\Gamma_0}=\mathrm{const} \tag{2.17}$$

материал включения твердый ($\mu_-\neq 0$). Для существования решения необходимо, чтобы суммы всех сил, действующих на тело, а также их моментов были равны нулю

$$\int\limits_{\Gamma_0} U_+ n_{0i}\, d\Gamma_0=0 \tag{2.18}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0} z^{ijk} U_+ n_{0j} z_k\, d\Gamma_0=0 \tag{2.19}$$

При выводе (2.18), (2.19) учитывалось, что ($|W|$ — объем включения):

$$\int\limits_{\Gamma_0} Q^{ij} n_{0j}\, d\Gamma_0 = Q^{ij}\int\limits_{\Gamma_0} n_{0j}\, d\Gamma_0=0$$

$$\int\limits_{\Gamma_0} z^{ijk} z_k Q_j^{\cdot p}\, n_{0p}\, d\Gamma_0 = z^{ijk} Q_j^{\cdot p} \int\limits_{\Gamma_0} n_{0p} z_k\, d\Gamma_0 = z^{ijk} Q_j^{\cdot p}\, z_{kp}\, |W|=0$$

Уравнения (2.17) для жидкого фазового включения и (2.18), (2.19) для твердого показывают, что внешние возмущения могут снимать вырожденность начальной конфигурации (возможность жидкому включению менять свою форму, а твердому — двигаться как единое целое), поскольку форма и ориентация включения уже не могут выбираться произвольно — они должны быть согласованы с указанными уравнениями. Полученные решения первого приближения должны удовлетворять соответствующим уравнениям, которые и служат для выделения из всего класса начальных конфигураций, определяемого включением W, той формы и ориентации, для которой возможно решение (2.6).

Уравнения высших приближений имеют структуру соотношений (2.8), (2.15), где для γ-приближения ($\gamma>2$) в левые части войдут u_γ^i, а правые — будут зависеть от решений для всех предшествующих приближений. При этом условия разрешимости уравнений γ приближения будут снимать неединственность решения задачи для точек внутри включения ($\gamma-2$)-приближения (так, для нахождения тензора θ^{ij} из соотношения (2.13) необходимы уравнения третьего приближения).

3. Пусть жидкое включение W имеет форму эллипсоида. Решение задачи о фазовом эллипсоидальном включении (как твердом, так и жидком) в безграничном пространстве в первом приближении указано (на основе техники работы [5]) в [6]. Согласно [6], перемещения фазы плюс равны

$$u_{1+}^i=\varkappa^{\cdot i}_{\cdot j} z^j+\tau^{\cdot i}_{\cdot k}\varphi,^k - s\tau_{mn}\omega,^{imn}, \qquad s=\frac{\lambda_+ + \mu_+}{2(\lambda_+ + 2\mu_+)} \tag{3.1}$$

где φ и ω — соответственно, гармонический и бигармонический потенциалы эллипсоида W единичной плотности, а постоянный симметричный тензор τ^{ij} определяется из решения уравнения

$$\tau^{kl}P_{klij}=-\sigma_{ij}^{\infty}-LTz_{ij}, \qquad \sigma_{ij}^{\infty}=-\alpha_+K_+Tz_{ij}+\lambda_+\varkappa^{\cdot k}_{\cdot k}\, z_{ij}+2\mu_+\varkappa_{(ij)}$$

$$P_{klij}=4\pi\mu_+ z_{ki} z_{lj} - \lambda_+\mu_+(\lambda_+ + 2\mu_+)^{-1} N_{kl} z_{ij} - 2\mu_+ z_{k(i} N_{j)l} + 2\mu_+ s M_{ijkl} \tag{3.2}$$

Предполагается, что центр эллипсоида расположен в начале аффинной системы координат, в которой проводятся все вычисления. Постоянные симметричные по всем индексам тензоры N_{ij} и M_{ijkl} соответствуют представлению производных потенциалов φ и ω внутри эллипсоида

$$\varphi,_i=-N_{ij}z^j, \qquad \omega,_{ijk}=-M_{ijkl}z^l, \qquad z\in W \tag{3.3}$$

и полностью определяются его формой. Для разрывов производных потенциалов φ и ω справедливы также условия совместности (3.4) и соотношения (3.5):

$$[\varphi,_{ij}]_-^+ = 4\pi n_i n_j, \qquad [\omega,_{ijkl}]_-^+ = 8\pi n_i n_j n_k n_l \tag{3.4}$$

$$\omega,_i^{\,i} = 2\varphi, \quad \varphi,_i^{\,i} = 0 \quad z \in V - W, \quad \varphi,_i^{\,i} = -4\pi \quad (z \in W) \tag{3.5}$$

Здесь и в дальнейшем для удобства записи будем писать $[a]_-^+$ и n_i вместо $[a]_-^+|_{\Gamma_0}$ и n_{0i}. Функция φ, $\varphi,_i$, ω, $\omega,_i$, $\omega,_{ij}$, $\omega,_{ijk}$ непрерывны на Γ_0, при этом φ, $\varphi,_i$, $\omega,_{ijk}$, $\omega,_{ijkl}$ и все последующие их производные стремятся к нулю на бесконечности. Постоянный тензор $\varkappa_{(ij)}$ определяет линеаризованный тензор деформации, а тензор σ_{ij}^∞ — постоянный тензор напряжений, задаваемые на бесконечности.

Используя соотношения (3.1), (3.3)—(3.5), находим

$$u_{1+}{}^{i}{}_{\cdot,}{}^{j}{}_{\cdot}|_{\Gamma_0} = \varkappa^{ij} + \tau^{i}_{\cdot k}(4\pi n^k n^j - N^{kj}) - s\tau_{kl}(8\pi n^k n^l n^i n^j - M^{klij}) \tag{3.6}$$

$$u_{1+}{}^{k}{}_{\cdot, k}|_{\Gamma_0} = \varkappa^{k}_{\cdot k} + \mu_+(\lambda_+ + 2\mu_+)^{-1}\tau_{kl}(4\pi n^k n^l - N^{kl}) \tag{3.7}$$

Учитывая соотношения (3.6), (3.7), а также используя (3.2), получим

$$U_+|_{\Gamma_0} = 8\pi^2\mu_+\{2s(\tau^{kl}n_k n_l)^2 - \tau^{pk}\tau_{p\cdot}^{\;l} n_k n_l\} + \mathrm{const} \tag{3.8}$$

В случае жидкого эллипсоидального включения, на основании (2.17), (3.8), необходимо, чтобы тензор τ^{ij} имел вид $\tau^{ij} = cz^{ij}$, где c — некоторая константа. Из (3.2) с учетом (3.3), (3.5) получим

$$c = -(\lambda_+ + 2\mu_+)(3LT + \sigma^{\infty k}_{\cdot\, k})/(16\pi\mu_+^2) \tag{3.9}$$

$$N_{ij} = 4\pi z_{ij} - 8\pi(LTz_{ij} + \sigma_{ij}^\infty)/(3LT + \sigma^{\infty k}_{\cdot\, k})$$

Отметим, что если напряжения, задаваемые на бесконечности, имеют вид $\sigma_{ij}^\infty = -LTz_{ij}$, то вырождение по форме включения не снимается. В этом случае, как видно из соотношений (1.18), (2.3), (2.9), решением первого приближения (как внутри включения, так и вне его) будет однородное гидростатическое состояние с давлением $p = p_0 + \varepsilon LT$, поэтому вся неединственность задачи, связанная с гидростатичностью начальной конфигурации, сохраняется.

Из уравнений (3.9) видно, что оси эллипсоида должны совпадать с главными осями тензора напряжений σ_{ij}^∞. В системе координат, связанной с этими осями

$$N_{II}/4\pi = 1 - 2(LT + \sigma_{II}^\infty)/\left(3LT + \sum_{J=1}^{3}\sigma_{JJ}^\infty\right) \quad (I = 1, 2, 3) \tag{3.10}$$

По повторяющимся индексам I, J суммирования нет. Для того, чтобы нашелся эллипсоид с внутренним потенциалом, определяемым тензором N_{ij}, согласно [7], необходимо

$$\sum_{J=1}^{3} N_{JJ} = 4\pi, \qquad N_{II} \geqslant 0 \quad (I = 1, 2, 3) \tag{3.11}$$

В соответствии с (3.10) это означает, что решение в указанной форме существует при выполнении системы неравенств

$$\sigma_{II}^\infty \geqslant -LT \quad (I = 1, 2, 3), \quad LT + \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty - \sigma_{33}^\infty \geqslant 0 \tag{3.12}$$

$$LT + \sigma_{11}^\infty + \sigma_{33}^\infty - \sigma_{22}^\infty \geqslant 0, \quad LT + \sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty - \sigma_{11}^\infty \geqslant 0$$

или другой системы, в которой знаки «больше» заменены на «меньше». Решение неравенств (3.12) в системе декартовых координат, где по осям откладываются σ_{11}^∞, σ_{22}^∞, σ_{33}^∞, представляет собой область, заключенную внутри трехгранных углов, задаваемых пересечением плоскостей $\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty - \sigma_{33}^\infty = -LT$, $\sigma_{11}^\infty + \sigma_{33}^\infty - \sigma_{22}^\infty = -LT$, $\sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty - \sigma_{11}^\infty = -LT$. В случае однородного гидростатического напряжения, задаваемого на бесконечности, решение всегда существует и, за исключением уже описанного случая $\sigma_{ij}^{\infty}=-LTz_{ij}$, форма включения — сфера. В области существования решения системы (3.12) форма эллипсоида будет находиться из уравнений (3.10), а также из соотношений, связывающих полуоси эллипсоида a_I, $I=1,2,3$ и тензор N_{ij} (в системе координат, совпадающей с осями эллипсоида) [5, 7]:

$$N_{II}=2\pi a_1a_2a_3\int_0^{\infty}\Delta^{-1}(a_I^2+u)^{-1}\,du \quad (I=1,2,3) \tag{3.13}$$

$$\Delta=\sqrt{(a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)}$$

Случаю $N_{11}=N_{22}=N_{33}=4\pi/3$ ($\sigma_{11}^{\infty}=\sigma_{22}^{\infty}=\sigma_{33}^{\infty}$) соответствует включение в форме сферы, при $N_{11}\to 0$, $N_{22}=N_{33}\to 2\pi$ ($\sigma_{22}^{\infty}=\sigma_{33}^{\infty}$, $\sigma_{11}^{\infty}\to LT+2\sigma_{22}^{\infty}$) — включение в форме «иглы» ($a_2=a_3\ll a_1$), а при $N_{11}\to 4\pi$, $N_{22}=N_{33}\to 0$ ($\sigma_{11}^{\infty}\to -LT$, $\sigma_{22}^{\infty}=\sigma_{33}^{\infty}$) получим «диск» ($a_2=a_3\gg a_1$). Учитывая соотношения (3.6), (3.9), можно подсчитать в первом приближении тензор напряжений на поверхности фазового жидкого включения:

$$\sigma_{kl+}|_{\Gamma_0}=\sigma_{kl}^{\infty}-(3LT+\sigma^{\infty}{}^{p}_{\cdot p})(16\pi\mu_+)^{-1}C_{ijkl+}\{4\pi n^in^j-4\pi z^{ij}+$$

$$+8\pi(LTz^{ij}+\sigma^{\infty ij})/(3LT+\sigma^{\infty}{}^{p}_{\cdot p})\}={}^1/_2(3LT+\sigma^{\infty}{}^{p}_{\cdot p})(z_{kl}-n_kn_l)-LTz_{kl} \tag{3.14}$$

где $C_{ijkl+}=\lambda_+z_{ij}z_{kl}+\mu_+(z_{ik}z_{jl}+z_{il}z_{jk})$ — тензор модулей упругости материала бесконечного пространства. Используя (3.14), получим, что усилия, действующие на любую площадку, содержащую нормаль (растягивающие усилия), вне зависимости от формы поверхности и ориентации самой площадки одинаковы:

$$\sigma=\sigma_{kl+}|_{\Gamma_0}d^kd^l={}^1/_2(LT+\sigma^{\infty}{}^{k}_{\cdot k}), \qquad d_kd^k=1, \qquad d_kn^k=0 \tag{3.15}$$

Из соотношений (3.1), (3.6) следует, что вне включения дивергенция перемещений будет постоянна: $u_{+}{}^{k}_{\cdot,k}=\varkappa^{k}_{\cdot k}$.

Подсчитаем массу вещества J, испытавшего фазовое превращение при деформировании. Из (3.1) с учетом (3.3), (3.5), (3.9) получим

$$u_+^i|_{\Gamma_0}=\varkappa^{i}_{\cdot j}z^j+c\mu_+(\lambda_++2\mu_+)^{-1}\varphi,^i=z^i(-\alpha_+K_+T+LT+(\lambda_++2\mu_+)\varkappa^{k}_{\cdot k})/(4\mu_+) \tag{3.16}$$

Используя соотношения (2.13) (3.16), найдем

$$J=\int_{\Gamma_0}[u^i]_-^+n_i[\rho_0^{-1}]_-^{+\,-1}d\Gamma_0=3|W|[\rho_0^{-1}]_-^{+\,-1}\{(-\alpha_+K_+T+$$

$$+LT+(\lambda_++2\mu_+)\varkappa^{k}_{\cdot k})/4\mu_+-T(\alpha_-K_--L)/3K_-\} \tag{3.17}$$

Таким образом, масса вещества, испытавшего фазовое превращение при деформировании, зависит только от объема включения $|W|$ и возмущающих факторов.

4. В случае твердого эллипсоидального включения для равновесия необходимо выполнение уравнений (2.18), (2.19), при этом соотношения (3.1)—(3.8) остаются в силе. Уравнение (2.18) выполняется для любого эллипсоидального включения, поскольку

$$\int_{\Gamma_0}n_sn_ln_ln_kn_i\,d\Gamma_0=\int_{\Gamma_0}n_kn_ln_i\,d\Gamma_0=0 \tag{4.1}$$

Справедливость соотношений (4.1) следует из того, что каждой точке поверхности эллипсоида z^i соответствует точка $-z^i$, также принадлежащая поверхности; нормали в этих точках имеют одинаковые по величине компоненты, но с разными знаками. Суммируя соответствующие подынтегральные функции в точках z^i и $-z^i$ и учитывая равенство соответствующих элементарных площадок, получим требуемый результат. Покажем, что для удовлетворения уравнения (2.19) достаточно, чтобы тензор τ_{ij} имел главные оси, совпадающие с осями эллипсоида. Рассмотрим уравнение (2.19) в декартовой системе координат (X, Y, Z), связанной с осями эллипсоида, и пусть тензор τ_{ij} в этой системе координат имеет компоненты τ_{II}, $I=1, 2, 3$; $\tau_{IJ}=0$, $I\neq J$. С учетом (3.8) величина U_+ будет зависеть от $\tau_{11}{}^{\gamma}n_x^2+\tau_{22}{}^{\gamma}n_y^2+\tau_{33}{}^{\gamma}n_z^2$ $(\gamma=1, 2)$. Рассмотрим произвольную точку на поверхности эллипсоида с координатами (x, y, z) и соответствующие ей точки $(x, y, -z)$, $(x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(-x, -y, -z)$, также принадлежащие поверхности. Во всех них значение величины U_+ будет одно и то же, поскольку компоненты внешней нормали в этих точках будут одинаковы по абсолютной величине, но с разными знаками. Учитывая, так же как и в предыдущем случае, равенство в этих точках элементарных площадок, получим, что суммарный их вклад, например, в первую компоненту момента будет $U(x, y, z)d\Gamma_0\times$ $\times(yn_z-zn_y-yn_z+zn_y-yn_z+zn_y+yn_z-zn_y+yn_z-zn_y-yn_z+zn_y-yn_z+zn_y+yn_z-$ $-zn_y)=0$. Аналогично доказательство проводится и для остальных компонент. Собирая при интегрировании в (2.19) все соответствующие точки, получим искомый результат. Соотношения (3.2) в системе координат, связанной с осями эллипсоида, приводят к равенствам

$$\tau_{IJ}=2\varkappa_{(IJ)}(N_{II}+N_{JJ}-4sM_{IIJJ}-4\pi)^{-1}, \quad I\neq J \tag{4.2}$$

Следовательно, $\varkappa_{(IJ)}=0$ $(I\neq J)$ и главные оси тензора напряжений $\sigma_{ij}{}^{\infty}$, задаваемого на бесконечности, и оси эллипсоида должны совпадать. Таким образом, твердое фазовое эллипсоидальное включение при внешних возмущениях, не меняя своей формы, должно ориентироваться по осям этого возмущения. Естественно, что в случае гидростатического напряжения, задаваемого на бесконечности, вырожденность по ориентации твердого включения не снимается, а для включения в форме сферы решение существует при любых внешних возмущениях.

Найдем тензор напряжений на поверхности эллипсоида в форме диска $(a_2=a_3\gg a_1)$. Пусть f^i, p^i, g^i — единичные векторы, направленные по полуосям эллипсоида a_1, a_2, a_3, и $\nu=\pi a_1/a_2$ $(\varepsilon\ll\nu\ll1)$. Поскольку эллипсоид должен быть ориентирован в соответствии с тензором $\sigma_{ij}{}^{\infty}$, то

$$\sigma_{ij}{}^{\infty}=af_if_j+bp_ip_j+cg_ig_j \tag{4.3}$$

где a, b, c — некоторые скаляры, характеризующие внешнее возмущение. Используя соотношения (3.15), (4.8), (4.14) из [6], получим, что тензор τ_{ij} в этом случае имеет вид

$$\tau_{ij}=-(LT+a)\nu^{-1}(2f_if_j+\lambda_+\mu_+{}^{-1}z_{ij})/(8\pi s\mu_+)+O(1) \tag{4.4}$$

Подставляя соотношения (4.3), (4.4) в (3.6), найдем

$$\begin{gathered}\sigma_{kl+}|_{\Gamma_0}=-(LT+a)\nu^{-1}\{2\lambda_+(\lambda_++\mu_+)^{-1}(n_kn_l+z_{kl}(h^2-1))+\\ +2s^{-1}hf_{(k}n_{l)}-4h^2n_kn_l-s^{-1}f_kf_l\}+O(1), \quad h=f_kn^k\end{gathered} \tag{4.5}$$

На полюсе диска $(n_i=f_i)$ $\sigma_{kl}=O(1)$, а на «острие» $(h=0)$ тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{kl}=(LT+a)\nu^{-1}\left\{\frac{2\lambda_+}{\lambda_++\mu_+}(z_{kl}-n_kn_l)+s^{-1}f_kf_l\right\}+O(1) \tag{4.6}$$

Таким образом, на поверхности твердого фазового диска может быть концентрация напряжений, определяемая параметрами ν и $a=\sigma_{ij}{}^{\infty}f^if^j$. В случае «обычного» контактного включения этого явления нет.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о совершенно различном поведении фазового включения по сравнению с включением, материал которого химически отличен от вещества окружающего пространства и не реагирует с ним. Уравнения первого (линейного) приближения приводят к замене задачи о фазовом включении задачей о полости под давлением, в которой давление меняется в соответствии с параметром L, характеризующим наклон кривой фазового равновесия. При этом упругие модули фазового включения не влияют на поведение внешних точек, здесь все определяется параметром L и модулями внешней фазы. Внутри фазового включения напряженное состояние всегда, независимо от его формы и физических свойств, оказывается гидростатическим $\sigma_{ij-}=LTz_{ij}$.

Исследование уравнений второго приближения показывает, что внешние возмущения снимают вырождение основной равновесной конфигурации, так что форма и ориентация фазового включения, вообще говоря, не могут быть выбраны произвольно — они зависят от внешних возмущений и физических свойств материала включения. Эта зависимость рассматривалась в классе эллипсоидальных включений, для которого оказалось, что внешние возмущения полность определяют геометрию включения в случае, когда его материал жидкий (для возмущений, при которых подобное решение существует), а в случае твердого включения (при сохранении исходной формы) определяются его ориентация.

Авторы выражают глубокую признательность Б. В. Кострову и Р. В. Гольдштейну за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. *Гринфельд М. А.* К теории фазовых переходов первого рода в изотропных упругих материалах.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272. № 3, с. 571–575.
3. *Гринфельд М. А.* Условия равновесия на фазовой границе упругих тел.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1982, № 1, с. 39–47.
4. *Гринфельд М. А.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 883–898.
5. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит. 247 с.
6. *Гринфельд М. А., Лангман С. Л.* Осредненные термоупругие модули двухфазных сред.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1985, № 8, с. 36–49.
7. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.: Гостехиздат, 1946. 318 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.I.1984