

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАКЛОННО ПАДАЮЩИХ УПРУГИХ ВОЛН
С ГИБКИМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

НИКИТИН И. С.

На бесконечно длинный гибкий цилиндрический стержень радиуса R , гладко вставленный в окружающую упругую среду, под углом α к оси стержня падает упругая волна. Материал стержня задан модулем Юнга E_s и плотностью ρ_s , окружающая среда имеет плотность ρ , модули Ламе λ и μ , скорости продольных волн $a = (\lambda + 2\mu/\rho)^{1/2}$ и поперечных волн $b = (\mu/\rho)^{1/2}$. Движение такого цилиндрического включения рассматривалось ранее в [1]. В публикуемой работе определяются напряжения, возникающие в среде и, в частности, на контуре цилиндра. В зависимости от вида падающей волны и угла наклона следует различать три случая — падение продольной волны, а также докритическое и закритическое падение поперечной волны. Вначале, для определенности, рассмотрим случай падения упругой продольной волны.

1. Введем подвижную декартову систему координат $x, y, z = z' + ct$, связанную со следом фронта падающей волны на поверхности цилиндра, а также цилиндрические координаты r, ϑ, z ($x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta$). Ось z совпадает с осью цилиндра, $c = a/\sin \alpha$ — скорость следа падающей волны, α — угол между фронтом продольной волны и осью z . Обозначим $\lambda_1 = (c^2/a^2 - 1)^{1/2}$ и $\lambda_2 = (c^2/b^2 - 1)^{1/2}$. В подвижной декартовой системе координат стержень испытывает поперечный изгиб в направлении оси x величины $U(z)$, описываемый уравнением Бернулли — Эйлера. Поведение внешнего упругого пространства будем описывать продольным потенциалом φ и векторным поперечным потенциалом $\psi = (\psi_r, \psi_\vartheta, \psi_z)$, вектором смещений $u = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi$ и напряжениями, связанными со смещениями законом Гука. Отнесем смещения к R , скорости — к b , напряжения — к μ . Профиль падающей волны зададим продольным потенциалом $\Phi_0(\xi_1)$ или нормальным смещением в волне $u_0(\xi_1) = (1 + \lambda_1^2)^{1/2} \partial \Phi_0 / \partial \xi_1$, где $\xi_1 = z + \lambda_1 x - \lambda_1 t$.

Связанная система уравнений для $U(z)$, φ и ψ имеет вид [1, 2]:

$$\frac{1}{4} E_s \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \rho_s (1 + \lambda_2^2) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{\pi} F(z, U), \quad (1.1)$$

$$F(z, U) = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}(z, U, \vartheta) |_{r=1} \cos \vartheta d\vartheta$$

$$\Delta_{r,\vartheta} \varphi - \lambda_1^2 \varphi_{zz} = 0, \quad \Delta_{r,\vartheta} \psi - \lambda_2^2 \psi_{zz} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\Delta_{r,\vartheta}$ и $\Delta_{r,\vartheta}$ — соответственно, скалярный и векторный операторы Лапласа по полярным переменным r и ϑ , σ_{rr} — нормальные напряжения на контуре цилиндра, вычисляемые по известным формулам через φ и ψ .
Дополнительное условие $\text{div } \psi = 0$. Граничные условия $\tau_{r\vartheta} = \tau_{rz} = 0, u_r = U(z) \cos \vartheta$ при $r = 1$.

Потребуем выполнения условий излучения типа Зоммерфельда для каждой спектральной составляющей потенциалов φ и ψ при $r \rightarrow \infty$ в той же форме, что и в [1]. Будем предполагать, что смещения в падающей волне ограничены, и строить решение задачи, в которой смещения при $|z| \rightarrow \infty$ являются функциями медленного (не выше степенного) роста.

В [1] дается решение задачи об определении изгиба цилиндра $U(z)$, основанное на выделении в распределенной поперечной силе $F(z, U)$ трех составляющих, обусловленных падающей, отраженной от жесткого гладкого цилиндра и излученной при его изгибе волнами.

Точно также и нормальные напряжения на контуре цилиндра $\sigma = \sigma_{rr}(z, U, \vartheta)$ будем искать в виде суммы $\sigma = \sigma_0(z, \vartheta) + \sigma_1(z, \vartheta) + \sigma_2(z, U, \vartheta)$.

Напряжение σ_0 определяется падающей волной:

$$\sigma_0 = \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2}$$

Напряжение σ_0 определяется падающей волной:

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial^2 \psi_\vartheta}{\partial r \partial z} \right) \quad (1.3)$$

Потенциалы φ , ψ_z и ψ_ϑ при этом находятся из системы (1.2) с условиями излучения при $r \rightarrow \infty$ и с граничными условиями при $r=1$:

$$\tau_{r\vartheta} = -2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta} \right), \quad \tau_{rz} = -2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z \partial r}, \quad u_r = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \quad (1.4)$$

при вычислении σ_1 и с граничными условиями

$$\tau_{r\vartheta} = \tau_{rz} = 0, \quad u_r = U(z) \cos \vartheta \quad (1.5)$$

при вычислении σ_2 . Функцию $U(z)$ считаем известной.

2. Решение задачи получим с помощью преобразования Фурье по z с параметром ω . Преобразованные функции обозначаются далее тем же символом, что и исходные, но с верхним индексом в виде звездочки.

Преобразованный потенциал падающей волны с использованием разложения производящей функции [3] примет вид

$$\Phi_0^*(\omega, r, \vartheta) = \Phi^*(\omega) e^{i\omega_1 r} \left[J_0(\omega_1 r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(\omega_1 r) \cos n\vartheta \right],$$

$$\Phi^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi$$

где $\Phi^*(\omega)$ — спектральная функция потенциала падающей продольной волны, J_n — функция Бесселя 1-го рода n -го порядка.

Разделяя в преобразованных уравнениях для потенциалов переменные r и ϑ с учетом условий излучения, получим выражения для потенциалов отраженных и излученных волн

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1 H_n^{(1)}(\omega_1 r) \cos n\vartheta, \quad \psi_r^* = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^2 H_{n-1}^{(1)}(\omega_2 r) + C_n^3 H_{n+1}^{(1)}(\omega_2 r)] \sin n\vartheta \quad (2.1)$$

$$\psi_\vartheta^* = C_0^2 H_1^{(1)}(\omega_2 r) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^2 H_{n-1}^{(1)}(\omega_2 r) - C_n^3 H_{n+1}^{(1)}(\omega_2 r)] \cos n\vartheta,$$

$$\psi_z^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^4 H_n^{(1)}(\omega_2 r) \sin n\vartheta$$

где $H_n^{(1)}$ — функция Ганкеля 1-го рода n -го порядка; $\omega_1 = \lambda_1 \omega$, $\omega_2 = \lambda_2 \omega$. Из дополнительного условия $\text{div} \Psi = 0$ следует, что $C_n^4 = i\lambda_2 (C_n^2 - C_n^3)$. Формулы для напряжения σ^* на контуре цилиндра получаются в сле-

дующем виде (для суммы падающей и отраженной волн):

$$\begin{aligned} \sigma_0^* + \sigma_1^* &= s_0^p + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n^p + S_n) \frac{4(-i)^{n-1} e^{i\omega_1} \cos n\vartheta}{\sqrt{1 + \lambda_1^2} \omega} u_0^*(\omega) \\ s_0^p &= \frac{2i \exp(i\omega_1)}{\sqrt{1 + \lambda_1^2} \omega} [J_1(\omega_1) h_1^{(0)} - J_0(\omega_1)] \left(\omega_1^2 + \lambda \frac{1 + \lambda_1^2}{2} \omega^2 \right) \\ S_n^p &= (n^2 + n - \omega_1^2 - \frac{1}{2} \lambda (1 + \lambda_1^2) \omega^2) J_n(\omega_1) - \omega_1 J_{n-1}(\omega_1) \\ s_n &= 2 \left\{ A_n^1 \left[n^2 + n - \frac{1}{2} \lambda (1 + \lambda_1^2) \omega^2 - \omega_1^2 - \omega_1 h_1^{(n)} \right] + \right. \\ &\quad + A_n^2 \left[-\lambda_2 (n^2 + n + \omega^2) + \omega (n - 1 + n \lambda_2^2) h_2^{(n)} \right] + \\ &\quad \left. + A_n^3 \left[(n^2 + n) \frac{(2 + \lambda_2^2)}{\lambda_2^2} - \lambda_2 \omega^2 - \omega (n + 1 + n \lambda_2^2) h_2^{(n)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этой формуле $A_n^i(\omega)$ связаны с неизвестными функциями $C_n^i(\omega)$ ($i=1, 2, 3$), входящими в общее решение (2.1): $A_n^1 = C_n^1 H_n^{(1)}(\omega_1)$, $A_n^{2,3} = i C_n^{2,3} H_n^{(1)}(\omega_2)$, и определяются с помощью граничных условий (1.4) из бесконечной системы уравнений:

$$\|E_n^{ij}\| A_n^j = B_n^i \quad (i, j=1, 2, 3; \quad n=1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

Матрица E_n^{ij} и компоненты столбца B_n^i ($i, j=1, 2, 3$) имеют вид

$$\begin{aligned} E_n^{11} &= E_n^{31} = 2\omega_1 h_1^{(n)} - 2n, & E_n^{21} &= -2n\omega_1 h_1^{(n)} + 2n(n+1) \\ E_n^{12} &= 2\omega h_2^{(n)} + 2\lambda_2 n, & E_n^{13} &= 2\omega h_2^{(n)} - 2n(2 + \lambda_2^2)/\lambda_2 \\ E_n^{22} &= 2\omega(1 + \lambda_2^2 - n) h_2^{(n)} + \lambda_2[\omega^2(1 + \lambda_2^2) - 2n(n+1)] \\ E_n^{23} &= -2\omega(1 + \lambda_2^2 + n) h_2^{(n)} - \lambda_2[\omega^2(1 + \lambda_2^2) - 2n(n+1)(1 + 2/\lambda_2^2)] \\ E_n^{32} &= \omega(1 - \lambda_2^2) h_2^{(n)} + 2n\lambda_2, & E_n^{33} &= \omega(1 - \lambda_2^2) h_2^{(n)} - 2n/\lambda_2 \\ B_n^1 &= B_n^3 = -\omega_1 J_{n-1}(\omega_1) + n J_n(\omega_1), & B_n^2 &= n\omega_1 J_{n-1}(\omega_1) - n(n+1) J_n(\omega_1) \\ h_1^{(n)} &= H_{n-1}^{(1)}(\omega_1)/H_n^{(1)}(\omega_1), & h_2^{(n)} &= H_{n-1}^{(1)}(\omega_2)/H_n^{(1)}(\omega_2) \end{aligned}$$

Составляющая напряжения σ_2^* , определяемая излученной волной, имеет вид $\sigma_2^* = S(\omega) U^*(\omega) \cos \vartheta$, $S(\omega) = S_n(\omega)|_{n=1}$.

Величины $A_n^i|_{n=1}$ ($i=1, 2, 3$) в этой формуле определяются из системы (2.3) при $n=1$ с измененной правой частью $B_1^1=2$, $B_1^{2,3}=0$, что соответствует граничному условию (1.5). В принятых обозначениях формула для динамического изгиба стержня [1] запишется в виде

$$U_p^*(\omega) = \frac{4 \exp(i\omega_1)}{\sqrt{1 + \lambda_1^2} \omega} \frac{(s_1^p + S_1)}{[1/4 E_s \omega^4 - \rho_s (1 + \lambda_2^2) \omega^2 - S(\omega)]} u_0^*(\omega)$$

Окончательное выражение для фурье-образа нормальных напряжений на контуре включения получается сложением всех составляющих $\sigma^* = \sigma_0^* + \sigma_1^* + \sigma_2^*$.

3. Рассмотрим случай, когда падающая под углом β к оси гладко вставленного в окружающую среду цилиндрического стержня волна — поперечная. Кажущаяся скорость следа фронта волны $c = b/\sin \beta$. Необходимо различать два режима падения: докритический $c > a$, $\lambda_1^2 = c^2/a^2 - 1 > 0$ (λ_1 — действительное) и закритический $c < a$, $\eta_1^2 = 1 - c^2/a^2 > 0$ (η_1 — действительное). Падающая волна задается векторным потенциалом $\psi_{y0}(\xi_2) = \Psi_0(\xi_2)$, $\psi_{z0} = \psi_{z0} = 0$ (или в полярной системе координат $\psi_{r0} = \Psi_0 \sin \vartheta$, $\psi_{\vartheta 0} = \Psi_0 \cos \vartheta$) или касательным смещением в волне $v_0(\xi_2) = (1 + \lambda_2^2)^{1/2} \partial \Psi_0 / \partial \xi_2$, $\xi_2 = z + \lambda_2 x - \lambda_2 t$.

В случае докритического падения система уравнений и условий зада-

чи в подвижной системе координат, связанной со следом фронта падающей волны, аналогична случаю продольной волны. Нормальное напряжение σ на контуре цилиндра также представится в виде суммы составляющих того же смысла $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_0 = 2\partial/\partial r(-\partial\psi_{\theta 0}/\partial z)|_{r=1}$, а $\sigma_{1,2}$ вычисляется по формуле (1.3), в которой потенциалы φ , ψ_z и ψ_θ находятся из системы (1.2) с граничными условиями при $r=1$:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 0}}{\partial \theta \partial z} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{r0}}{\partial z} \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{r0}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi_{\theta 0}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_{\theta 0}}{r} \right) - \frac{\partial^2 \psi_{\theta 0}}{\partial r^2}, \quad u_r = \frac{\partial \psi_{\theta 0}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.1)$$

при вычислении напряжения σ_1 и граничными условиями (1.5) при вычислении σ_2 .

Преобразованный потенциал падающей волны в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} \psi_{r0}^* &= \Psi^*(\omega) e^{i\omega_2 z} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} [J_{n-1}(\omega_2 r) + J_{n+1}(\omega_2 r)] \sin n\theta \\ \psi_{\theta 0}^* &= \Psi^*(\omega) e^{i\omega_2 z} \left\{ -iJ_1(\omega_2 r) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} [J_{n-1}(\omega_2 r) - J_{n+1}(\omega_2 r)] \cos n\theta \right\} \\ \Psi^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(\xi) e^{i\omega_2 \xi} d\xi \end{aligned}$$

Формулы для преобразованных составляющих нормального напряжения на контуре цилиндра будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_0^* + \sigma_1^* &= s_0^s + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n^s - S_n) \cos n\theta \frac{(-i)^{n-1} e^{i\omega_2 z}}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 \omega^2}} v_0^*(\omega) \\ s_0^s &= \frac{2i \exp(i\omega_2 z)}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 \omega^2}} \omega_2 [J_1(\omega_2) h_2^{(0)} - J_0(\omega_2)] \\ s_n^s &= 4 \left[\lambda_2 \left(\frac{n^2 + n}{\lambda_2^2} - \omega^2 \right) J_n(\omega_2) - \omega J_{n-1}(\omega_2) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Неизвестные величины A_n^i ($i=1, 2, 3$), входящие в выражение для S_n , в данном случае находятся из системы уравнений (2.3) с измененной правой частью (что соответствует граничным условиям (3.1)):

$$\begin{aligned} B_n^1 &= 4/\lambda_2 [\omega_2 J_{n-1}(\omega_2) - nJ_n(\omega_2)] \\ B_n^2 &= 4n/\lambda_2 [(n+1)J_n(\omega_2) - \omega_2 J_{n-1}(\omega_2)] \\ B_n^3 &= 2(1 - \lambda_2^2)/\lambda_2 [\omega_2 J_{n-1}(\omega_2) - nJ_n(\omega_2)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Как и в случае с падающей продольной волной, $\sigma_2^* = S(\omega) U^*(\omega) \cos \theta$. Выражение для $S(\omega)$ приведено выше, а формула для динамического изгиба [1] в принятых обозначениях запишется в виде

$$U_s^*(\omega) = \frac{\exp(i\omega_2 z)}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 \omega^2}} \frac{(s_1^s - S_1)}{[1/4 E_s \omega^4 - \rho_s (1 + \lambda_2^2) \omega^2 - S(\omega)]} v_0^*(\omega)$$

В случае закритического падения поперечной волны постановка задачи в подвижной системе координат $z = z' + ct$, $c = b/\sin \beta < a$ несколько изменится. Уравнение для продольного потенциала, входящее в систему (1.2), станет эллиптическим и примет вид $\Delta_r \varphi + \eta_1^2 \varphi_{zz} = 0$, где $\eta_1 = (1 - c^2/a^2)^{1/2}$.

Условие излучения для φ заменим условием затухания $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Остальные уравнения и условия, входящие в постановку задачи,

не изменятся. С учетом условия затухания общее решение уравнения для φ после применения преобразования Фурье будет $\varphi^* = \sum C_n^1 K_n(\eta_1 \omega r) \cdot \cos n\vartheta$, где K_n — функция Макдональда n -го порядка ($n=0, 1, \dots$); общее решение для поперечного потенциала останется прежним. Поэтому выражения для составляющих нормального напряжения по сравнению со случаем докритического падения изменятся следующим образом (s_0^s и s_n^s имеют прежний вид):

$$\sigma_0^* + \sigma_1^* = s_0^s + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n^s - S_n^s) \frac{(-i)^{n-1} e^{i\omega_2} \cos n\vartheta}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 \omega}} v_0^*(\omega) \quad (3.4)$$

$$S_n^s = 2 \{ A_n^1 [n^2 + n + \eta_1^2 \omega^2 - 1/2 \lambda (1 - \eta_1^2) \omega^2 + \eta_1 \omega k^{(n)}] +$$

$$+ A_n^2 [-\lambda_2 (n^2 + n + \omega^2) + \omega (n - 1 + n \lambda_2^2) h_2^{(n)}] +$$

$$+ A_n^3 [n(n+1)(2 + \lambda_2^2)/\lambda_2 - \lambda_2 \omega^2 - \omega (n + 1 + n \lambda_2^2) h_2^{(n)}] \}$$

где A_n^i ($i=1, 2, 3$) определяются из системы (2.3) с правой частью (3.3), а в матрице E_n^{ij} ($i, j=1, 2, 3$) произойдут изменения $E_n^{11} = -2(\eta_1 \omega k^{(n)} + n)$, $E_n^{21} = 2n(\eta_1 \omega k^{(n)} + n + 1)$, $E_n^{31} = E_n^{11}$, $k^{(n)} = K_{n-1}(\eta_1 \omega) / K_n(\eta_1 \omega)$.

Составляющая σ_2^* примет вид $\sigma_2^* = S'(\omega) U^*(\omega) \cos \vartheta$, где $S'(\omega) = -S_n^s(\omega) |_{n=1}$ в предположении, что в правой части системы (2.3) $B_1^1 = 2$, $B_1^2 = B_1^3 = 0$. Формула для динамического изгиба будет

$$U_e^*(\omega) = \frac{e^{i\omega_2}}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 \omega}} \frac{(s_1^s - S_1^s)}{[1/4 E_s \omega^4 - \rho_s (1 + \lambda_2^2) \omega^2 - S'(\omega)]} v_0^*(\omega)$$

4. Полученные решения при соответствующем выборе падающих волн можно рассматривать как решение краевой задачи о стационарном движении (сверхзвуковом или трансзвуковом) подвижной нагрузки по поверхности полупространства с расположенным на глубине H параллельно направлению распространения нагрузки цилиндрическим включением радиуса R . Это оправдано при $H \gg R$, когда можно пренебречь отраженными от поверхности полупространства вторичными и т. д. волнами, а также затухающими с глубиной составляющими (в трансзвуковом случае) в поле падающих на включение волн. Падающие волны берутся из решения задачи о стационарной нормальной нагрузке заданного профиля $P_0(z)$, движущейся со скоростью c по поверхности упругого полупространства ($z = z' + ct$). Ее фундаментальное решение получено в [4]. Применяя преобразование Фурье, получаем, что смещения в падающих на включение волнах для сверхзвуковой нагрузки $c > a > b$ распределены следующим образом:

$$u_0^*(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - 1}{(\lambda_2^2 - 1)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2} \sqrt{1 + \lambda_1^2} \frac{i P_0^*(\omega)}{\omega}$$

в поперечной волне

$$v_0^*(\omega) = \frac{2\lambda_1}{(\lambda_2^2 - 1)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2} \sqrt{1 + \lambda_2^2} \frac{i P_0^*(\omega)}{\omega}$$

Точки прихода волн к включению разделены расстоянием $\Delta z = (H - R)(\text{ctg } \beta - \text{ctg } \alpha) \sim H(\lambda_2 - \lambda_1)$. Поэтому решение краевой задачи получается сложением решений для падающей продольной и поперечной волн со сдвигом на расстояние Δz .

Для трансзвуковой нагрузки $a > c > b$ действительных продольных волн нет (а комплексные затухают с глубиной). Смещения в подходящих к включению поперечных волнах распределены следующим образом:

$$v_0^*(\omega) = \frac{2\eta_1}{(\lambda_2^2 - 1)^4 + 16\eta_1^2 \lambda_2^2 [4\eta_1 \lambda_2 + i(\lambda_2^2 - 1)^2 \text{sign } \omega]} \sqrt{1 + \lambda_2^2} \frac{i P_0^*(\omega)}{\omega}$$

Заметим, что в это поле смещений кроме обычной поперечной волны, в которой напряжения повторяют форму поверхностной нагрузки (первое слагаемое в скобках), входит составляющая (второе слагаемое в скобках),

связанное с переносом возмущений поверхности полупространства, возникающих в комплексных продольных волнах, вдоль характеристик $z + \lambda_2 x = \text{const}$.

Образы составляющих $\sigma_0^* + \sigma_1^*$ и σ_2^* искомой функции $\sigma_{rr}(z, \vartheta)$ на контуре включения имеют особенность при $\omega = 0$, которая появляется в функциях $u_0^*(\omega)$ и $v_0^*(\omega)$ для финитной, но несбалансированной нагрузки $P_0(z)$. Преобразование Фурье при этом понимается в обобщенном смысле [5]. Поэтому вначале умножением функций $u_0^*(\omega)$ и $v_0^*(\omega)$ на $(-i\omega)$ вычисляются образы производных от $\sigma_0 + \sigma_1$ и σ_2 . Решение будет линейно зависеть от формы поверхностной нагрузки $P_0^*(\omega)$.

Для того чтобы изгиб выключений можно было описывать уравнением Бернулли — Эйлера, необходимо, по крайней мере, чтобы характерный пространственный размер L действующих на него нагрузок был велик по сравнению с радиусом R , $L \gg R$ и нагрузки были достаточно гладкими. В этом случае спектр распределения напряжений быстро убывает по частоте ω и тем быстрее, чем выше гладкость этого распределения. Поэтому можно пренебречь вкладом частот, превышающих некоторую максимальную частоту Ω , так, чтобы наибольшая погрешность в описании исходного распределения напряжений после применения обратного преобразования Фурье на конечном интервале $[0, \Omega]$ равнялась некоторой допустимой погрешности ε . Удобно за характерный размер L принять длину волны, соответствующую максимальной частоте Ω , $L = 2\pi/\Omega$. Таким образом, спектр должен быть сосредоточен в полосе $[0, 2\pi]$. Поэтому выберем функцию $P_0(z)$ в форме сглаженного с непрерывной первой производной несимметричного «треугольника» амплитуды P_{\max} , временем нарастания $\tau_1 \gg 1$ и временем убывания $\tau_2 \gg \tau_1$.

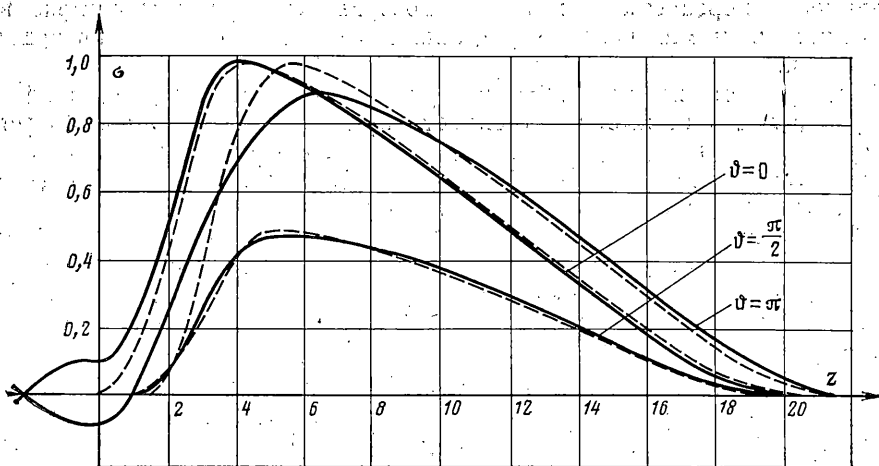
Суммирование рядов, которыми представляется решение (2.2), (3.2) или (3.4), производится численно. Известно [6], что такого рода ряды сходятся при всех ω , но количество членов ряда, которое следует учитывать для практической сходимости имеет порядок ω . Асимптотические оценки с использованием дебаевских разложений цилиндрических функций [7] показывают, что в данном случае необходимо учитывать порядка $n \sim \omega_1$ членов ряда в случае падающей продольной и $n \sim \omega_2$ членов ряда в случае падающей поперечной волн при каждом фиксированном $\omega \in [0, \Omega_0]$, $\Omega_0 \geq 2\pi$. В практических расчетах на ЭВМ суммировали, соответственно, $n \approx 2\omega_1$ и $n \approx 2\omega_2$ членов ряда для каждого фиксированного значения частоты ω . Затем, используя вычисленные на дискретном множестве точек $\omega_l = \Omega_0 l/N$, $l = 0, 1, \dots, N-1$ значения образа определяемой величины $\sigma_z^*(\omega_l)$, численно проводилось обратное преобразование (Ω_0 — верхняя граница частоты, N — общее число точек). Полагалось $\sigma_z^* \equiv 0$ при $\omega_l > 2\pi$. Из формулы обратного преобразования

$$\sigma_z(z) = \text{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_0} \sigma_z^*(\omega) \exp(-i\omega z) d\omega$$

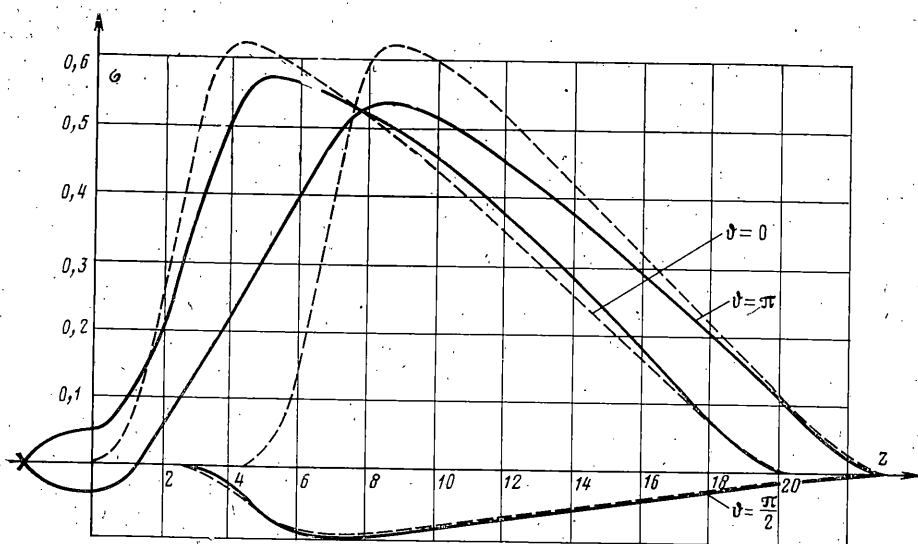
с помощью квадратурной формулы трапеций можно получить значения определяемой функции на множестве точек $z_m = 2\pi m/\Omega_0$, $m = 0, 1, \dots, N-1$ в следующем виде:

$$\sigma_z(z_m) = \frac{\Omega_0}{2\pi N} \text{Re} \sum_{l=0}^{N-1} \left[\sigma_z^*(\omega_l) + \exp\left(-\frac{2\pi i m}{N}\right) \sigma_z^*(\omega_{l+1}) \right] \exp\left(-\frac{2\pi i m l}{N}\right) \quad (4.1)$$

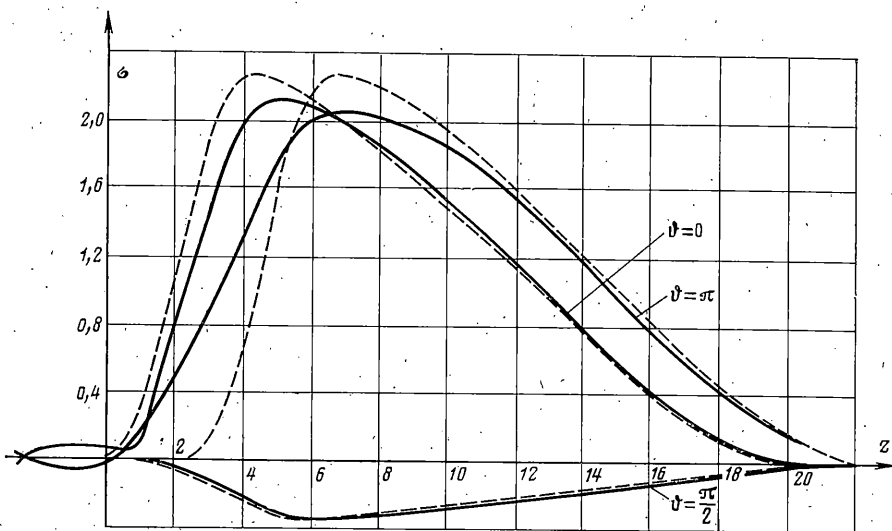
Квадратурная формула трапеций для интегрирования осциллирующей функции работает, только когда минимальный период колебаний функции много больше интервала интегрирования. Отсюда получаем ограничение $m < N/4$. Таким образом, для достаточно больших N полученные суммы (4.1) хорошо описывают обратное преобразование Фурье до величин аргумента $z_{\max} \sim \pm \pi N / (2\Omega_0)$. Эти суммы являются стандартными для эффективных алгоритмов быстрого преобразования Фурье [8]. Проверка работы алго-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ритма в данном случае производилась следующим образом: для типичных функций $P_0(z)$ единичной амплитуды по ее известному спектру $P_0^*(\omega)$ при $N=4024$, $\Omega_0=8\pi$ производилось численное обратное преобразование. Точное и вычисленное значения совпали в трех десятичных знаках.

Полученные после вычисления обратного преобразования производные искомыми функциями $\sigma(z, \vartheta)$ интегрировались по z с условием $\sigma(z, \vartheta) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Приведем типичные результаты расчетов при следующих безразмерных параметрах задачи $\rho_s/\rho=1$, $E_s/\mu=30$, $\lambda/\mu=2$. Падающие продольная и докритическая поперечная волны берутся от поверхностной сверхзвуковой нагрузки формы $P_{\max}=1$, $\tau_1/R=4$, $\tau_2/R=16$, $a/c=0,8$; $b/c=0,4$, а закритическая поперечная — от аналогичной трансзвуковой нагрузки $a/c=1,2$; $b/c=0,6$. На фиг. 1–3 сплошными линиями проведены распределения напряжения $\sigma_{rr}(z, \vartheta)$ на контуре цилиндра для продольной (фиг. 1), докритической поперечной (фиг. 2) и закритической поперечной (фиг. 3) волн при трех значениях угла: $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi/2$, $\vartheta=\pi$.

5. Из общих решений (2.2), (3.2), (3.4) в случае низких частот $\omega \rightarrow 0$ (длинные волны $\tau_1 \gg 1$) были получены формулы для напряжения на контуре цилиндра. Для падающей продольной волны его составляющие имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_0^* + \sigma_1^* &= \left[-\frac{4\lambda_1(1+\lambda_2^2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2(2+\lambda_1^2+\lambda_2^2)}} \frac{1}{\ln \omega} \cos \vartheta - i \frac{\lambda_2^2 - 1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \omega - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{6\lambda_1^2(1+\lambda_2^2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2(3+2\lambda_2^2+\lambda_1^2)}} \cos 2\vartheta \omega + o(\omega) \right] u_0^*(\omega) \\ \sigma_2^*(\omega) &= \left[\frac{4(1+\lambda_2^2)}{(2+\lambda_1^2+\lambda_2^2)} \frac{1}{\ln \omega} \cos \vartheta + O(\omega) \right] V_{1,2}^*(\omega) \end{aligned}$$

В формуле для $\sigma^*(\omega)$ главные члены формул для составляющих с учётом выражения для $U_p^*(\omega)$ сократятся. Выражая форму падающей волны $u_0^*(\omega)$ через поверхностную нагрузку $P_0^*(\omega)$ и возвращаясь к оригиналам, получим ($\gamma=\lambda_2^2-1$):

$$\sigma_p(z, \vartheta) \sim \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 4\lambda_1\lambda_2} \left[1 + 6 \frac{\lambda_1^2}{\gamma} \frac{\lambda + 2}{[1 + 2(\lambda + 2)]} \cos 2\vartheta \right] P_0(z)$$

Аналогичным образом для докритической поперечной волны (сверхзвуковой режим движения поверхностной нагрузки) получаем

$$\sigma_s(z, \vartheta) \sim \frac{4\lambda_1\lambda_2}{\gamma^2 + 4\lambda_1\lambda_2} \left[1 + 3 \frac{\lambda + 2}{[1 + 2(\lambda + 2)]} \cos 2\vartheta \right] P_0(z)$$

Для закритической поперечной волны (трансзвуковой режим движения поверхностной нагрузки):

$$\sigma_e(z, \vartheta) \sim \frac{16\eta_1^2\lambda_2^2}{\gamma^4 + 16\eta_1^2\lambda_2^2} \left[1 + 3 \frac{\lambda + 2}{[1 + 2(\lambda + 2)]} \cos 2\vartheta \right] P_0(z)$$

Результаты расчетов по этим формулам с прежними значениями параметров приведены на фиг. 1–3 (штриховые кривые). Видно, что длинноволновое приближение неплохо описывает качественное распределение напряжений и зависимость от параметров задачи. Погрешность в определении максимума напряжения наиболее велика при $\vartheta=\pi$ и достигает $\sim 6\%$ для продольной волны (фиг. 1) и 12% для поперечной (фиг. 2, 3) при $\tau_1=4$. Из расчетов следует, что при изменении τ_1 и фиксированном $\tau_2 \gg \tau_1$ эта погрешность изменяется приблизительно линейно по τ_1 . Из длинноволновых формул также получается, что при падении поперечной волны в боковой части цилиндра ($\vartheta=\pi/2$) нормальное напряжение обязательно сменит знак (см. фиг. 2, 3). Для падающей продольной волны условие изменения знака напряжений при $\vartheta=\pi/2$ имеет вид $\lambda_1^2(1-2\lambda) > 2\lambda(\lambda+2,5)/(\lambda+2)$. Из него видно, что в типичном случае $\lambda > 1/2$ изменения знака не произойдет.

Сформулируем теперь условия, при которых обосновано применение уравнений для описания движения стержня. Во-первых, необходима малость характерного поперечного размера стержня R по сравнению с характерным размером воздействующей на него нагрузки L , т. е. с характерным пространственным размером падающей на него волны: $R/L \ll 1$. Во-вторых, в динамической задаче характерное время изменения нагрузки τ_* должно быть больше величины L/b_s (b_s — скорость поперечных волн в стержне). В рассматриваемой стационарной задаче величина τ_* однозначно связана с L : $\tau_* = L/c$. Отсюда следует условие $b_s > c$ или в терминах модулей упругостей $\mu_s > \rho_s c^2 > \mu(\rho_s/\rho)$. Как правило, $\rho_s > \rho$. Таким образом, возникает требование к соотношению свойств материалов включения и окружающей его среды, а именно: стержень должен быть существенно более жестким.

Автор выражает признательность Н. В. Зволинскому, А. Н. Ковшову, Л. М. Флитману за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин И. С. Стационарная задача об изгибе цилиндрического стержня под действием упругой волны.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 169–178.
2. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 606 с.
4. Cole J.; Huth J. Stresses produced in a half plane by moving loads.— J. Appl. Mech., 1958, v. 25, No. 4, p. 433–436.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
6. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1975. 631 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.1.1985