МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1986

УДК 539.3

О СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ ШТАМПА ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

ГЛУШКО А. И.

Задачи о движении штампа в условиях плоской деформации изучены в [1]. Трудности, возникающие при решении этих задач, связаны с тем, что им соответствуют смешанные граничные условия.

В публикуемой работе решается задача о сверхзвуковом движении жесткого штампа по поверхности упругого полупространства. Контакт между штампом и полупространством осуществляется на области G, представляющей собой сектор с углом раствора $\pi/2$ (фиг. 1). Вектор скорости направлен вдоль одной из границ сектора. Предполагается, что штамп движется без трения, а вне штампа к поверхности полупространства не прикладываются внешние нагрузки. В точках контакта нормальные составляющие вектора скорости штампа и среды равны друг другу. Решение этой задачи строится применением преобразования Лапласа и метода Винера-Хопфа.

1. Будем рассматривать движения линейно-упругой среды в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3. Предположим, что среда занимает полупространство $x_3\leqslant 0$. Обозначим через t — время, ρ — плотность, a_1 — скорость продольных волн, a_2 — скорость поперечных волн, $\gamma=a_2/a_1$, u_i, $i=1, 2, 3$ — компоненты вектора скорости; σ_{ij}, $i, j=1, 2, 3$ — компоненты тензора напряжений. Уравнения движения линейно-упругой среды запишем в виде

$$\rho\, \partial u_i/\partial t=\partial\sigma_{ij}/\partial x_j \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma_{ij}}{\partial t}=(a_1^2-2a_2^2)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}+a_2^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

По поверхности полупространства $x_3=0$ движется со сверхзвуковой скоростью в отрицательном направлении оси OX_1 жесткий штамп. Считается, что в подвижной системе координат $x_1'=x_1+ct$, $x_2'=x_2$ уравнение поверхности штампа имеет вид

$$z=f(x_1', x_2')H(x_1'),\quad 0<x_1'<+\infty,\quad 0<x_2'<+\infty \tag{1.2}$$

Здесь $f=f(x_1, x_2)$ — заданная кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условию $f(0, x_2)=0$, $H(x)$ — функция Хевисайда, $c>a_1$ — скорость движения штампа.

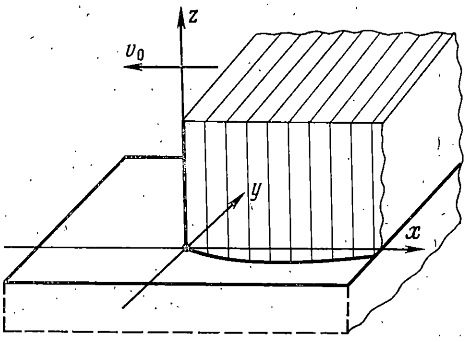
Задача состоит в том, чтобы найти решение системы (1.1), удовлетворяющее следующим граничным условиям на поверхности $x_3=0$:

$$\tau_{31}=\tau_{32}=0\quad -\infty<x_1',\ x_2'<+\infty$$

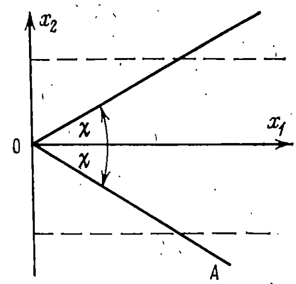
$$\sigma_{33}=0\quad x_1'<0,\quad -\infty<x_2'<+\infty;\quad x_2'<0,\quad -0<x_1'<+\infty \tag{1.3}$$

$$u_\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}-u_3=-c\frac{\partial f}{\partial x_1'}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2'}\right)^2+1\right)^{-1/2}\quad (\alpha=1, 2)$$

$$0<x_1'<+\infty,\quad 0<x_2'<+\infty$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Считая, что поверхность штампа изменяется плавно, т. е. $\partial f/\partial x_1' \ll 1$, $\partial f/\partial x_2' \ll 1$, последнее условие можно линеаризовать и записать в виде $w \equiv u_3 = c\,\partial f/\partial x_1'$. Решение поставленной задачи будем искать в классе ограниченных на бесконечности функций.

Введем вектор-строку $X^T = \{u_1, u_2, u_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}$.

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде $\partial X/\partial t = A_i\,\partial X/\partial x_i$. Здесь X — вектор-столбец, сопряженный к X^T: $A_1 = \|a_{ij}\|$, $a_{14} = a_{27} = a_{39} = 1$, $a_{41} = \rho a_1^2$, $a_{51} = a_{61} = \rho a_1^2(1-2\gamma^2)$, $a_{72} = a_{93} = \rho a_1^2\gamma^2$; $A_2 = \|b_{ij}\|$, $b_{17} = b_{25} = b_{38} = 1$, $b_{42} = b_{62} = \rho a_1^2(1-2\gamma^2)$, $b_{52} = \rho a_1^2$, $b_{71} = b_{83} = \rho a_1^2\gamma^2$; $A_3 = \|c_{ij}\|$, $c_{19} = c_{28} = c_{36} = 1$, $c_{43} = c_{53} = \rho a_1^2(1-2\gamma^2)$, $c_{63} = \rho a_1^2$, $c_{82} = c_{91} = \rho a_1^2\gamma^2$.

Остальные элементы равны нулю. Граничные условия (1.3) выражаются через компоненты вектора X.

2. Решение поставленной задачи будем искать в следующем виде:

$$X(t, x_1, x_2, x_3) = Y(t+cx_1, x_2, x_3) \equiv Y(x_1', x_2', x_3')$$

$x_1' \equiv x_1 + ct$ (в дальнейшем штрих у переменной x_i' будем опускать там, где это не вызывает недоразумений). Вектор $Y = Y(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет тогда системе

$$c\,\partial Y/\partial x_1 = A_i\,\partial Y/\partial x_i \tag{2.1}$$

Уравнение характеристик этой системы имеет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^3 \left[\beta_1^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right] \left[\beta_2^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right]^2 = 0$$

$$\beta_1^2 = M^2 - 1, \quad \beta_2^2 = M^2/\gamma^2 - 1, \quad M \equiv c/a_1$$

Можно видеть, что система (2.1) будет гиперболична при $M > 1$.

Введем преобразование Лапласа от вектора Y по переменным x_1, x_2:

$$Y^\vee(p_1, p_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_2x_2}\,dx_2 \int_0^{\infty} Y(x_1, x_2, x_3)\,e^{-p_1x_1}\,dx_1$$

Здесь p_1, p_2 — комплексные переменные.

Покажем, что преобразование Лапласа $Y^\vee = Y^\vee(p_1, p_2, x_3)$ существует, если

$$\beta_1 \operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re} p_2 > 0 \tag{2.2}$$

На фиг. 2 линия OA соответствует пересечению характеристического конуса системы (2.1) с углом раствора χ, $\operatorname{tg}\chi = 1/\beta_1$ и плоскости $x_3 = 0$. Из постановки задачи следует, что при $x_2 < 0$ вектор $Y = Y(x_1, x_2, x_3)$ отличен от нуля только внутри характеристического конуса. Так как вектор ограничен во всем полупространстве (за исключением быть может линии

$x_2=0$, где он имеет интегрируемую особенность), то при $x_2>0$:

$$|Y^{\vee}(p_1, x_2, x_3)| \equiv \left|\int_0^{\infty} e^{-p_1x_1}Y(x_1, x_2, x_3)\,dx_1\right| < \text{const}$$

для любых p_1, x_1, x_2. При $x_2<0$ $|Y^{\vee}(p_1, x_2, x_3)|<\text{const}\exp(-\operatorname{Re}p_1|x_2|\operatorname{ctg}\chi)$. Значит, в полосе $0<\operatorname{Re}p_2<\operatorname{ctg}\chi\operatorname{Re}p_1=\beta_1\operatorname{Re}p_1$ существует преобразование Лапласа по переменной x_2 от вектора $Y(p_1, x_2, x_3)$, т. е. существует $Y^{\vee}=Y^{\vee}(p_1, p_2, x_3)$.

Вектор $Y^{\vee}$ удовлетворяет системе уравнений

$$cY^{\vee}=(p_1A_1+p_2A_2)Y^{\vee}+A_3\,\partial Y^{\vee}/\partial x_3 \tag{2.3}$$

Общее решение этой системы записывается в виде

$$Y^{\vee}=\sum_{i=1}^{6} c_iq_ie^{\lambda_ix_3} \tag{2.4}$$

Здесь λ_i — собственные числа матрицы $Q\equiv cp_1E-p_1A_1-p_2A_2-\lambda A_3$, $\lambda_1=\sqrt{(M^2-1)p_1^2-p_2^2}$, $\lambda_{2,3}=\sqrt{(M^2/\gamma^2-1)p_1^2-p_2^2}$, $\lambda_4=-\lambda_1$, $\lambda_{5,6}=-\lambda_3$; q_i — собственные векторы матрицы Q:

$$(cp_1E-p_1A_1-p_2A_2-\lambda_iA_3)q_i=0.$$

Если комплексные переменные p_1, p_2 удовлетворяют условиям $0<\operatorname{Re}p_2<\beta_1\operatorname{Re}p_1$, то, как показывается в курсах анализа [2], функция $\lambda_1=\lambda_1(p_1, p_2)$ имеет регулярную ветвь, у которой $\operatorname{Re}\lambda_1>0$. Другая регулярная ветвь будет иметь тогда отрицательную действительную часть. Так как $\gamma>1$, то аналогичными свойствами обладает и функция $\lambda_2=[(M^2/\gamma^2-1)p_1^2-p_2^2]^{1/2}$.

Известно [3], что если функция комплексного переменного $g^{\vee}=g^{\vee}(p_1)$, регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}p_1>\alpha_0=\text{const}$ и является преобразованием Лапласа функции действительного переменного $g=g(x)$, $x>0$, то $g^{\vee}(p_1)\to$ $\to 0$ **при** $p_1\to\infty$, $\arg p_1<\varphi_0<\pi/2$. **Из этих утверждений следует, что в (7) нужно положить** $c_i=0$, если $\operatorname{Re}\lambda_i<0$. Тогда преобразование Лапласа $Y^{\vee}$ можно записать в виде

$$Y^{\vee}(p_1, p_2, x_3)=\sum_{i=1}^{3} c_iq_i\exp(\theta_ix_3), \quad \theta_3=\theta_2$$

Здесь $\theta_i\equiv\lambda_i(p_1, p_2)$ $(i=1, 2)$ — регулярные функции, имеющие положительную действительную часть при $0<\operatorname{Re}p_2<\beta_1\operatorname{Re}p_1$. Собственные векторы q_i вычисляются по формулам

$$q_1^T=\left\{1, \frac{p_2}{p_1}, \frac{\theta_1}{p_1}, \frac{\rho a_1}{M}\frac{p_1^2+(1-2\gamma^2)(p_2^2+\theta_1^2)}{p_1^2},\right.$$
$$\frac{\rho a_1}{M}\frac{p_2^2+(1-2\gamma^2)(p_1^2+\theta_1^2)}{p_1^2}, \frac{\rho a_1}{M}\frac{(1-2\gamma^2)(p_1^2+p_2^2)+\theta_1^2}{p_1^2},$$
$$\left.\frac{2\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{p_2}{p_1}, \frac{2\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{p_2\theta_1}{p_1^2}, \frac{2\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{\theta_1}{p_1}\right\}$$
$$q_2^T=\left\{1, 0, -\frac{1}{\theta_2}, \frac{2\rho a_1\gamma^2}{M}, 0, -\frac{2\rho a_1\gamma^2}{M}, \frac{\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{p_2}{p_1},\right.$$
$$\left.\frac{\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{p_2}{p_1\theta_2}, \frac{\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{\theta_2^2-1}{\theta_2}\right\}$$
$$q_3^T=\left\{0, 1, -\frac{p_2}{p_1\theta_2}, 0, \frac{2\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{p_2}{p_1}, -\frac{2\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{p_2}{p_1},\right.$$
$$\left.\frac{\rho a_1\gamma^2}{M}, \frac{\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{\theta_2^2-(p_2/p_1)^2}{\theta_2}, \frac{\rho a_1\gamma^2}{M}\frac{p_2}{p_1\theta_2}\right\}$$

Так как на поверхности $x_3=0$ заданы смешанные граничные условия, то коэффициенты c_1, c_2, c_3 не могут быть выражены непосредственно через граничные условия при $x_3=0$. Однако, используя условия $\sigma_{31}=\sigma_{32}=0$ при $x_3=0$, можно получить уравнение, справедливое для всех p_1, p_2, удовлетворяющих неравенствам (2.2)

$$\sigma^{\vee}(p_1, p_2)=G(p_1, p_2)v^{\vee}(p_1, p_2) \tag{2.5}$$

$$\sigma^{\vee}(p_1, p_2)=\int_0^{\infty} e^{-p_1x_1}dx_1\int_0^{\infty} e^{-p_2x_2}\sigma_{33}(x_1, x_2, 0)\,dx_2$$

$$v^{\vee}(p_1, p_2)=\int_0^{\infty} e^{-p_1x_1}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_2x_2}u_3(x_1, x_2, 0)\,dx_2, \quad G(p_1, p_2)=\frac{4\gamma^4\rho a_1}{M^3}\times$$

$$\times\frac{[(M^2/2\gamma^2-1)p_1^2-p_2^2]^2+(p_1^2+p_2^2)\sqrt{(M^2-1)p_1^2-p_2^2}\sqrt{(M^2/\gamma^2-1)p_1^2-p_2^2}}{p_1^3\sqrt{(M^2-1)p_1^2-p_2^2}}=$$

$$=\frac{4\gamma^4\rho a_1}{M^3}\,\frac{(M^2/2\gamma^2-1-\theta^2)^2+(1+\theta^2)\sqrt{M^2-1-\theta^2}\sqrt{M^2/\gamma^2-1-\theta^2}}{\sqrt{M^2-1-\theta^2}}=G(\theta)$$

$$\theta\equiv p_2/p_1$$

В числителе последней формулы стоит выражение

$$R(\theta)\equiv(M^2/2\gamma^2-1-\theta^2)^2+(1+\theta^2)\sqrt{M^2-1-\theta^2}\sqrt{M^2/\gamma^2-1-\theta^2}$$

Можно показать, что функция $R(\theta)$ регулярна во всей плоскости комплексного переменного θ, за исключением двух разрезов на действительной оси $(-\sqrt{M^2/\gamma^2-1}, -\sqrt{M^2-1})$, $(\sqrt{M^2-1}, \sqrt{M^2/\gamma^2-1})$; $R(\theta)$ обращается в нуль только в двух точках: $\theta_1=+\theta_*$, $\theta_2=-\theta_*$.

Здесь $\theta_*=\sqrt{(c/c_R)^2-1}$, c_R — скорость волн Релея. При $\theta\to\infty$ $R(\theta)\to\to{}^1/{}_2M^2(\gamma^2-1)\theta^2/\gamma^2$.

Тогда ясно, что функция $W(\theta)=[2\gamma^2/(M^2(\gamma^2-1))]R(\theta)/(\theta^2-\theta_*^2)$ не имеет нулей и полюсов в полосе $0<\mathrm{Re}\,p_2<\beta_1\,\mathrm{Re}\,p_1$ и $W(\theta)\to 1$ при $|\theta|\to\infty$.

Отмеченные свойства функции $W(\theta)$ позволяют представить ее в виде произведения двух функций $R^+(\theta)$, $R^-(\theta)$:

$$W(\theta)=R^+(\theta)R^-(\theta)$$

$$R^+(\theta)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\beta_2}^{-\beta_1} g(t)\frac{dt}{t-\theta}\right),\quad R^-(\theta)=\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2} g(t)\frac{dt}{t-\theta}\right)$$

$$g(t)=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{(1+t^2)\,[(t^2+1-M^2)(M^2/\gamma^2-1-t^2)]^{1/2}}{M^2/(2\gamma^2)-1-t^2)^2}$$

Представим функцию $v^{\vee}$ в виде суммы

$$v^{\vee}(p_1, p_2)=v^+(p_1, p_2)+v^-(p_1, p_2)$$

$$v^+(p_1, p_2)=\int_0^{\infty} e^{-p_1x_1}dx_1\int_0^{\infty} e^{-p_2x_2}u_3(x_1, x_2, 0)\,dx_2$$

$$v^-(p_1, p_2)=\int_0^{\infty} e^{-p_1x_1}dx_1\int_{-\infty}^{0} e^{-p_2x_2}u_3(x_1, x_2, 0)\,dx_2$$

Функция $v^+(p_1, p_2)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p_2>0$, а $v^-(p_1, p_2)$ — в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p_2<0$, при любых p_1 $\mathrm{Re}\,p_1>0$.

Запишем уравнение (2.5) в виде $\sigma^{\vee}(p_1, p_2)-G(p_1, p_2)v^-(p_1, p_2)=G(p_1, p_2)v^+(p_1p_2)$. Решение этого уравнения при фиксированном p_1 в полосе $0<\mathrm{Re}\,p_2<\beta_1\,\mathrm{Re}\,p_1$ получим методом Винера — Хопфа [4].

Представим функцию $G(\theta) \equiv M \cdot G(p_1, p_2)/(2pa_1(\gamma^2-1)\gamma^2)$ в виде произведения

$$G(\theta) = G^+(\theta) G^-(\theta) \tag{2.6}$$

$$G^+(\theta) = R^+(\theta) \frac{\theta_* + \theta}{\sqrt{\beta_1 + \theta}}, \quad G^-(\theta) = R^-(\theta) \frac{\theta - \theta_*}{\sqrt{\beta_1 - \theta}}$$

Функция $G^+(\theta)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p_2 > 0$ и $G^+(\theta) \to \mathrm{const}\, \theta^{1/2}$ при $\theta \to \infty$, а $G^-(\theta)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} p_2 < \beta_1 \operatorname{Re} p_1$ и $G^-(\theta) \to \mathrm{const}\, \theta^{1/2}$ при $\theta \to \infty$. Подставим разложение (2.6) в уравнение (2.5). Тогда получим

$$\sigma(p_1, p_2)/G^+(p_1, p_2) = v^-(p_1, p_2) G^-(p_1, p_2) + v^+(p_1, p_2) G^-(p_1, p_2)$$

$$\sigma = M\sigma^{\vee}/(2\rho a_1(\gamma^2-1)\gamma^2) \tag{2.7}$$

Функция $h(p_1, p_2) \equiv v^+(p_1, p_2) G^-(p_1, p_2) \to \mathrm{const}\, p_2^{-1/2}$ при $p_2 \to \infty$; $0 < \operatorname{Re} p_2 < \beta_1 \operatorname{Re} p_1$. Это следует из того, что $v^+(p_1, p_2)$ есть преобразование Лапласа кусочно-гладкой функции и поэтому $v^+ \to \mathrm{const}\, p_2^{-1}$ при $p_2 \to \infty$ в полосе (2.2). Тогда функцию $h = h(p_1, p_2)$ можно представить в виде суммы

$$h \equiv v^+(p_1, p_2) G^-(p_1, p_2) = N^+(p_1, p_2) + N^-(p_1, p_2) \tag{2.8}$$

$$N^+(p_1, p_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{h(p_1, t)}{t - p_2} dt, \quad t = \sigma_1 + iv$$

$$N^-(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{h(p_1, t)}{t - p_2} dt, \quad t = \sigma_2 + iv$$

$$0 < \sigma_1 < \beta_1 \operatorname{Re} p_1, \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \beta_1 \operatorname{Re} p_1, \quad \sigma_1 < \operatorname{Re} p_2 < \sigma_2$$

Функция $N^-(p_1, p_2)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p_2 < \beta_1 \operatorname{Re} p_1$ и $N^- \to \mathrm{const}\, p_2^{-1}$ при $p_2 \to \infty$, а $N^+(p_1, p_2)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} p_2 > 0$ и $N^+ \to \mathrm{const}\, p_2^{-1}$ при $p_2 \to \infty$.

С учетом разложения (2.8) уравнение (2.5) приводится к виду

$$\sigma(p_1, p_2)/G^+(p_1, p_2) - N^+(p_1, p_2) = v^-(p_1, p_2) G^-(p_1, p_2) + N^-(p_1, p_2) \tag{2.9}$$

Левая часть уравнения (2.9) — функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} p_2 > 0$, которая стремится к нулю при $p_2 \to \infty$. Правая часть — регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p_2 < \beta_1 \operatorname{Re} p_1$, которая стремится к нулю при $p_2 \to \infty$. Следовательно, по теореме Лиувилля левая и правая части уравнения (2.9) равны нулю. Тогда имеем

$$\sigma(p_1, p_2) = N^+(p_1, p_2) G^+(p_1, p_2), \quad v^-(p_1, p_2) = -N^-(p_1, p_2)/G^-(p_1, p_2)$$

3. В результате решения уравнения (2.5) определено преобразование Лапласа от функции $\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3)$ на поверхности полупространства $x_3 = 0$. Коэффициенты c_1, c_2, c_3 определяются по формулам

$$c_1 = \frac{\sigma^{\vee}}{\Delta} \left(\frac{M^2}{2\gamma^2} - 1 - \theta^2 \right), \quad c_2 = -\frac{\sigma^{\vee}}{\Delta} \sqrt{M^2 - 1 - \theta^2} \sqrt{\frac{M^2}{\gamma^2} - 1 - \theta^2}$$

$$c_3 = -\frac{\sigma^{\vee}}{\Delta} \theta \sqrt{M^2 - 1 - \theta^2} \sqrt{\frac{M^2}{\gamma^2} - 1 - \theta^2}, \quad \Delta \equiv \frac{2\gamma^4 \rho a_1 R(\theta)}{M} \tag{3.1}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим выражение для вектора $X^T = \{u_1, u_2, u_3 \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}$.

Остановимся подробнее на частном случае задачи, когда функция $f = f(x_1, x_2)$ не зависит от x_2, т. е. $f = f(x_1) H(x_2)$, $0 < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < +\infty$. Получим формулы для скорости $u_3 = u_3(x_1, x_2, 0)$ и напряжений $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2, 0)$ на поверхности полупространства. Имеем

$$v^+(p_1, p_2) = \frac{f^{\vee}(p_1)}{p_2}, \quad f^{\vee}(p_1) = \int_0^{\infty} e^{-p_1 x_1} w(x_1) dx_1$$

После несложных вычислений получим

$$N^{+}(p_1, p_2) = -\frac{f^{\vee}(p_1)}{p_1}\frac{G^{-}(0)}{\theta}, \quad N^{-}(p_1, p_2) = \frac{f^{\vee}(p_1)}{p_1}\frac{G^{-}(\theta) - G^{-}(0)}{\theta}$$

$$\sigma(p_1, p_2) = -\frac{f^{\vee}(p_1)}{p_1}\frac{G^{-}(0)}{\theta}\frac{\theta_* + \theta}{\sqrt{\beta_1 + \theta}}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\beta_2}^{-\beta_1} g(t)\frac{dt}{t-\theta}\right)$$

$$v^{-}(p_1, p_2) = -\frac{f^{\vee}(p_1)}{p_1}\frac{G^{-}(\theta) - G(0)}{\theta}\frac{\sqrt{\beta_1 - \theta}}{\theta_* - \theta}\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2} g(t)\frac{dt}{t-\theta}\right)$$

Нормальная составляющая скорости u_3 на поверхности полупространства $x_3=0$ вне штампа $x_2<0$ определяется по формуле

$$u_3(x_1, x_2, 0) = \frac{G^{-}(0)c}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{-x_1/x_2} f(x_1 + x_2\theta)\frac{\sqrt{\theta - \beta_1}}{\theta(\theta - \theta_*)}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2} g(t)\frac{dt}{t-\theta}\right)[H(\theta - \beta_2) + H(\theta - \beta_1)H(\beta_2 - \theta)\cos(g(\theta))]\,d\theta \tag{3.2}$$

Нормальное напряжение на поверхности полупространства под штампом $x_2>0$ определяется по формуле

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = \frac{2\rho a_1^{\prime}\gamma^2(\gamma^2 - 1)c}{M}\left\{-G_0\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1) + \right.$$

$$+\frac{G(0)}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1/x_2} f(x_1 - \theta x_2)\frac{\theta_* + \theta}{\theta\sqrt{\beta_1 + \theta}}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\beta_1}^{-\beta_2} g(t)\frac{dt}{t-\theta}\right)\times$$

$$\times[H(\theta - \beta_2) + H(\theta - \beta_1)H(\beta_2 - \theta)\cos(g(\theta))]\,d\theta \tag{3.3}$$

$$G^{-}(0) = \frac{\gamma}{M}\sqrt{\frac{2R(0)}{\beta_1(\gamma^2 - 1)}}, \quad G_0 = \frac{2\gamma^2}{M^2(\gamma^2 - 1)}\frac{R(0)}{\beta_1}$$

$$R(0) = (M^2/2\gamma^2 - 1)^2 + \beta_1\beta_2$$

Из формулы для напряжений следует, что при $x_2 \to 0+0$:

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 1)\rho a_1 G^{-}(0)\,\partial f/\partial x_1(0)}{M\pi}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + Q(x_1, x_2)$$

$$|Q(x_1, x_2)| < \text{const}$$

Постоянную перед радикалом называют коэффициентом интенсивности напряжений. В формулу (3.3) входят два слагаемых — первое, не зависящее от x_2, и второе, обращающееся в нуль при $x_1<\beta_1 x_2$. Это означает, что напряженное деформированное состояние в среде есть суперпозиция плоских волн и конической волны.

Из (3.2) видно, что величина скорости u_3 ограничена при $x_2 \to 0-0$, но, вообще говоря, разрывна на линии $x_2=0$. Под знаком интеграла в (3.2) знаменатель обращается в нуль при $\theta=\theta_*$. Можно показать, что эта особенность приводит к тому, что при $-x_1/x_2 \to \theta_*$ и $x_1<-\theta_* x_2$ получим $u_3(x_1, x_2, 0) \to \text{const}\ln(1+\theta_* x_2/x_2)$, т. е. скорость имеет логарифмическую особенность на прямой $x_1=-\theta_* x_2$. Если $x_1>-\theta_* x_2$, то интеграл в (14) сходится в смысле главного значения.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. Отв. ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
4. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Москва — Поступила в редакцию 27.IX.1984