

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

БОРОДАЧЕВ А. Н., ДУДИНСКИЙ В. И.

Классическая теория контактных задач, использующая результаты линейной однородной и изотропной теории упругости [1, 2], получила достаточно полное развитие. Однако современные конструкционные материалы часто обладают ярко выраженной неоднородностью упругих свойств, что существенно ограничивает возможности применения классических решений. Полученные ранее точные решения контактных задач неоднородной теории упругости основываются на предположении, что коэффициент Пуассона материала является постоянным, а модуль сдвига изменяется весьма частным образом (по степенному или экспоненциальному законам) [1–5].

В публикуемой работе предложен общий подход к решению контактных задач для изотропного упругого полупространства: модуль сдвига является постоянным, а коэффициент Пуассона — произвольная (достаточно гладкая) функция глубины. С использованием интегрального преобразования Фурье получено двумерное интегральное уравнение первого рода относительно контактного давления под жестким штампом общего вида. Решение соответствующей осесимметричной контактной задачи приведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Конкретные результаты численных расчетов представлены для кругового штампа с плоским основанием.

Ранее был предложен приближенный способ решения осесимметричной контактной задачи для полупространства с переменным коэффициентом Пуассона [6], основывающийся на использовании введенных в [7] функций напряжений. Задача о нагружении полупространства с изменяющимся по глубине коэффициентом Пуассона нормальной нагрузкой, равномерно распределенной по площади круга, рассмотрена в [8].

1. Точки полупространства R_+^3 , занимаемого упругим изотропным материалом, будем обозначать $x^0 = (x, x_3)$, где $x = (x_1, x_2)$ и $x_3 > 0$. Модуль сдвига μ материала полупространства является постоянным, а коэффициент Пуассона $\nu(x_3)$ — произвольная функция глубины (точнее $\nu \in C^1$).

Пусть в полупространство R_+^3 вдавливаются (при отсутствии сил трения) жесткий штамп, уравнение поверхности основания которого описывается функцией $f(x)$.

В линейной статической неоднородной теории упругости соответствующая смешанная краевая задача для полупространства R_+^3 формулируется следующим образом:

$$\text{grad} (m \text{ div } \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad x^0 \in R_+^3 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{13}(x, 0) = \sigma_{23}(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

$$u_3(x, 0) = w(x), \quad x \in \Omega \quad (1.3)$$

$$\sigma_{33}(x, 0) = 0, \quad x \notin \Omega \quad (1.4)$$

$$m(x_3) = [1 - 2\nu(x_3)]^{-1}, \quad w(x) = \delta - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 - f(x)$$

где $u_i(x, x_3)$ и $\sigma_{ij}(x, x_3)$ — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, Ω — площадка контакта (в общем случае заранее неизвестная), δ, β_1, β_2 — параметры перемещения штампа, как твердого тела [1].

Соотношения (1.1)–(1.4) необходимо дополнить стандартными условиями на бесконечности

$$u_i \rightarrow 0, \quad \sigma_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{при } |x^0| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

и уравнениями равновесия штампа

$$P = \int_{\Omega} p \, dx, \quad M_1 = \int_{\Omega} x_2 p \, dx, \quad M_2 = - \int_{\Omega} x_1 p \, dx \quad (1.6)$$

в которых P, M_1, M_2 — главный вектор и главные моменты приложенных к штампу сил, $p(\mathbf{x}) = -\sigma_{33}(\mathbf{x}, 0)$ — контактное давление.

Запишем также соотношение, вытекающее из (1.1):

$$\operatorname{rot} \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x}^0 \in R_+^3 \quad (1.7)$$

Далее введем обычным образом интегральный оператор Фурье [9]:

$$F\{\varphi\}(\mathbf{k}, x_3) \equiv \varphi^F(\mathbf{k}, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \varphi(\mathbf{x}^0) \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}) \, dx \quad (1.8)$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2), \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = x_1 k_1 + x_2 k_2$$

Действуя оператором F на (1.7), получаем

$$d^2 \mathbf{v} / dx_3^2 - k^2 \mathbf{v} = 0, \quad x_3 > 0 \quad (1.9)$$

$$k = |\mathbf{k}| = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}, \quad v_1 = du_2^F / dx_3 + ik_2 u_3^F$$

$$v_2 = du_1^F / dx_3 + ik_1 u_3^F, \quad v_3 = k_2 u_1^F - k_1 u_2^F$$

Решение уравнения (1.9), удовлетворяющее условиям (1.5), имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}, x_3) = \mathbf{C}(\mathbf{k}) \exp(-kx_3) \quad (1.10)$$

причем представление (1.10) является совместным лишь при $k_1 C_1 = k_2 C_2 + k C_3$.

Применяя преобразование Фурье к (1.1), получаем, в частности, уравнение $d^2 u_1^F / dx_3^2 - (k^2 + mk_1^2) u_1^F - mk_1 k_2 u_2^F - imk_1 du_3^F / dx_3 = 0$, исключая из которого u_2^F при помощи (1.10), находим

$$\frac{d^2 u_1^F}{dx_3^2} - (1+m)k^2 u_1^F - imk_1 \frac{du_3^F}{dx_3} = -mk_2 C_3 \exp(-kx_3) \quad (1.11)$$

Дифференцируя v_2 из (1.10) по x_3 , умножая полученный результат на $m(x_3)$ и складывая с (1.11), приходим к неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами относительно функции u_1^F :

$$d^2 u_1^F / dx_3^2 - k^2 u_1^F = -[2(1-\nu)]^{-1} (k_2 C_3 + k C_2) \exp(-kx_3) \quad (1.12)$$

где было использовано соотношение $m(1+m)^{-1} = [2(1-\nu)]^{-1}$.

Решение уравнения (1.12), удовлетворяющее условиям (1.5), имеет вид (где $D \equiv D(k)$ — произвольная функция):

$$u_1^F(\mathbf{k}, x_3) = \exp(-kx_3) \left\{ D + \frac{B}{(4k)} \int_0^{x_3} \frac{ds}{[1-\nu(s)]} \right\} + \\ + \frac{B}{(4k)} \exp(kx_3) \int_{x_3}^{\infty} \frac{\exp(-2ks) ds}{[1-\nu(s)]}, \quad B = k_2 C_3 + k C_2 \quad (1.13)$$

Теперь при помощи соотношений (1.10) непосредственно находим функции u_2^F и u_3^F , а именно

$$u_2^F(\mathbf{k}, x_3) = \exp(-kx_3) \left\{ \frac{k_2 D - C_3}{k_1} + \frac{k_2 B}{4k_1 k} \int_0^{x_3} \frac{ds}{[1-\nu(s)]} \right\} + \\ + \frac{k_2 B}{4k_1 k} \exp(kx_3) \int_{x_3}^{\infty} \frac{\exp(-2ks) ds}{[1-\nu(s)]} \quad (1.14)$$

$$u_3^F(\mathbf{k}, x_3) = -\frac{i}{k_1} \exp(-kx_3) \left\{ C_2 + kD + \frac{1}{4} B \int_0^{x_3} \frac{ds}{[1-\nu(s)]} \right\} + \\ + i \frac{B}{4k_1} \exp(kx_3) \int_{x_3}^{\infty} \frac{\exp(-2ks) ds}{[1-\nu(s)]}$$

Вычисляя трансформанты Фурье компонент тензора напряжений по известному вектору \mathbf{u}^F , получаем, в частности, такие представления:

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \sigma_{13}^F(\mathbf{k}, 0) &= -(C_2 + 2kD) + \frac{1}{2} B \Lambda(k) \\ \mu^{-1} \sigma_{23}^F(\mathbf{k}, 0) &= -k_1^{-1} (2k_2 k D + k_2 C_2 - k C_3) + (2k_1)^{-1} k_2 B \Lambda(k). \\ \mu^{-1} \sigma_{33}^F(\mathbf{k}, 0) &= i k_1^{-1} (2k^2 D + k C_2 - k_2 C_3) + i (2k_1)^{-1} k B \Lambda(k) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\Lambda(k) = \int_0^{\infty} [1 - \nu(s)]^{-1} \exp(-2ks) ds$$

В случае, когда на границе полупространства R_+^3 отсутствуют касательные напряжения, т. е. выполняются граничные условия (1.2), из первых двух соотношений (1.15) находим $C_3 = 0$, $4D = C_2 [\Lambda(k) - 2k^{-1}]$ и, следовательно

$$u_3^F(\mathbf{k}, 0) = -i (2k_1)^{-1} C_2, \quad \sigma_{33}^F(\mathbf{k}, 0) = i \mu k_1^{-1} k^2 \Lambda(k) C_2 \quad (1.16)$$

Исключая C_2 из уравнений (1.16), получаем

$$u_3^F(\mathbf{k}, 0) = -(2\mu)^{-1} k^{-2} \Lambda^{-1}(k) \sigma_{33}^F(\mathbf{k}, 0) \quad (1.17)$$

Действуя оператором F^{-1} на (1.17) и учитывая граничное условие (1.4), получаем формулу связи между нормальными перемещениями точек границы полупространства R_+^3 и (пока неизвестным) контактным давлением

$$u_3(\mathbf{x}, 0) = (2\mu)^{-1} \iint_{\Omega} K(\rho) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad K(\rho) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} k^{-1} \Lambda^{-1}(k) J_0(\rho k) dk \quad (1.18)$$

где $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, J_0 — функция Бесселя первого рода.

Удовлетворяя с помощью (1.18) граничному условию (1.3), приходим к следующему двумерному интегральному уравнению первого рода относительно контактного давления:

$$(2\mu)^{-1} \iint_{\Omega} K(\rho) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = w(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.19)$$

Таким образом, контактное давление и параметры перемещения штампа могут быть найдены в результате решения интегрального уравнения (1.19) совместно с уравнениями равновесия штампа (1.6). Для определения размеров площадки Ω (если она заранее не известна) дополнительно следует использовать условие равенства нулю контактного давления в точках граничного контура $\partial\Omega$.

Заметим, что при $\nu = \text{const}$ уравнение (1.19) переходит в классическое интегральное уравнение контакта [2].

Для эффективного применения существующих численных и аналитических методов [2, 5, 10] к решению интегрального уравнения (1.19) необходимо установить характер поведения его ядра в точке $\rho = 0$ (очевидно, что функция $K(\rho)$ является непрерывной при $\rho > 0$).

Можно показать, что если функция $\nu(s)$ разлагается в окрестности точки $s=0$ в сходящийся ряд вида $\nu(s) = \sum \nu_n s^n$ ($n=0, 1, \dots$), то $K(\rho) = (1-\nu_0) (\pi\rho)^{-1} + o(\rho^{-1})$, $\rho \rightarrow 0$, т. е. ядро интегрального уравнения (1.19) имеет в точке $\rho=0$ особенность того же типа, что и ядро классического интегрального уравнения контакта.

При некоторых конкретных законах изменения коэффициента Пуассона

сона ядро $K(\rho)$ может быть преобразовано к виду, не содержащему квадратур. Например, если $1-\nu(s)=[a+b \exp(-2\gamma s)]^{-1}$ ($\gamma \geq 0$), то $K(\rho)=[\pi(a+b)]^{-1}\{\rho^{-1+1/2} \text{ст}[H_0(h\rho)-Y_0(h\rho)]\}$, где $c=\gamma b(a+b)^{-1}$, $h=\gamma-c$, H_0 — функция Струве, Y_0 — функция Бесселя второго рода.

2. При наличии осевой симметрии для сведения двухмерного интегрального уравнения (1.19) к одномерному введем на плоскости $x_3=0$ полярные координаты r и θ , так что $\Omega=\{r, \theta: 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $p=p(r)$, $w(r)=\delta-f(r)$. Переходя в (1.19) к полярным координатам и выполняя интегрирование по θ , приходим к следующему одномерному интегральному уравнению первого рода относительно контактного давления:

$$(2\mu)^{-1} \int_0^R L(r, r') p(r') r' dr' = w(r) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (2.1)$$

$$L(r, r') = \int_0^\infty k^{-1} \Lambda^{-1}(k) J_0(rk) J_0(r'k) dk$$

Альтернативный подход к решению осесимметричной контактной задачи заключается в использовании теории парных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Ханкеля.

В случае осевой симметрии соотношение (1.17) записывается следующим образом:

$$S_{0,0}\{u_3\}(k) = (2\mu)^{-1} k^{-2} \Lambda^{-1}(k) S_{0,0}\{p\}(k), \quad x_3=0 \quad (2.2)$$

$$S_{\alpha,\beta}\{\varphi\}(k) = 2^\beta k^{-\beta} \int_0^\infty r^{1-\beta} \varphi(r) J_{2\alpha+\beta}(kr) dr$$

где $S_{\alpha,\beta}$ является обобщенным интегральным оператором Ханкеля [9].

Используя тождество $\varphi=S_{0,0}S_{0,0}\varphi$ и соотношение (2.2), представим контактное давление и нормальные перемещения точек плоскости $x_3=0$ через вспомогательную функцию $\psi=S_{0,0}\{p\}$:

$$p(r) = S_{0,0}\{\psi(k)\}(r), \quad u_3(r) = (2\mu)^{-1} S_{0,0}\{k^{-2} \Lambda^{-1}(k) \psi(k)\}(r) \quad (2.3)$$

Удовлетворяя при помощи (2.3) граничным условиям (1.3) и (1.4), получаем (после некоторых преобразований) парные интегральные уравнения относительно функции ψ :

$$S_{-\nu_0, 1}\{(1+A)\psi\}(r) = 2\mu(1-\nu_0)^{-1} r^{-1} w(r) \quad (0 \leq r \leq R) \quad S_{0,0}\{\psi\}(r) = 0 \\ (R < r < \infty) \quad (2.4)$$

где $A(k)=[2(1-\nu_0)k\Lambda(k)]^{-1}-1$, причем $A(k)=O(1)$ при $k \rightarrow 0$ и $A(k)=O(k^{-1})$ при $k \rightarrow \infty$.

Парные интегральные уравнения (2.4) приводим (см., например, [9]) к симметричному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$g(t) + \int_0^1 M(t, s) g(s) ds = q(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.5)$$

$$M(t, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A\left(\frac{\eta}{R}\right) \cos(t\eta) \cos(s\eta) d\eta, \quad q(t) = \delta - \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(R\eta) \eta d\eta}{(t^2 - \eta^2)^{1/2}}$$

ядро которого имеет особенность логарифмического типа при $t=s$.

После определения функций $g(t)$ контактное давление, нормальные перемещения точек границы полупространства вне площадки контакта и главный вектор приложенных к штампу сил вычисляются по формулам

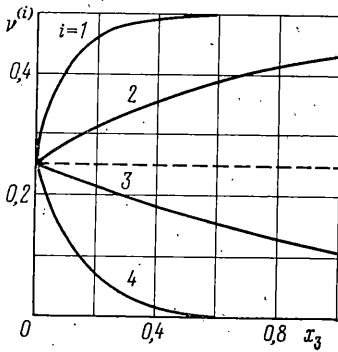
$$p(r) = \frac{2\mu}{\pi(1-\nu_0)R} \left[\frac{g(1)}{(1-r^2/R^2)^{1/2}} - \int_{r/R}^1 \frac{g'(t) dt}{(t^2 - r^2/R^2)^{1/2}} \right] \quad (0 \leq r \leq R)$$

$$u_3(r) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{g(t) dt}{(r^2/R^2 - t^2)^{1/2}} + \int_0^1 g(t) dt \int_0^\infty A\left(\frac{\eta}{R}\right) J_0\left(\frac{r\eta}{R}\right) \cos(t\eta) d\eta \right] \quad (R < r < \infty) \quad (2.6)$$

$$P = \frac{4\mu R}{1 - \nu_0} \int_0^1 g(t) dt$$

3. В качестве примера рассмотрим задачу о внедрении жесткого кругового цилиндра радиуса R с плоским основанием в неоднородное упругое полупространство под действием центральной силы P .

Вводя новую функцию $g_1(t) = \delta^{-1} g(t)$, преобразуем интегральное уравнение (2.5) к стандартному виду



$$g_1(t) + \int_0^1 M(t, s) g_1(s) ds = 1 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.1)$$

из третьего равенства (2.6) получим формулу связи между величинами осадки штампа и главного вектора приложенных к штампу сил

$$\delta = \frac{\varepsilon(1 - \nu_0)}{4\mu R} P \equiv \varepsilon \delta^{(0)},$$

$$\varepsilon^{-1} = \int_0^1 g_1(t) dt$$

где $\delta^{(0)}$ — величина осадки штампа в случае однородного полупространства с коэффициентом Пуассона $\nu = \nu_0$.

Из первого равенства (2.6) следует, что контактное давление имеет при $r=R$ особенность обычного корневого типа, т. е. $p(r) \sim K_1/\sqrt{2(R-r)}$, $r \rightarrow R-0$; $K_1 = \lim_{r \rightarrow R-0} \sqrt{2(R-r)} p(r) = \frac{1}{2} \varepsilon p^* R^{1/2} g_1(1)$, где K_1 является коэффициентом интенсивности контактного давления, причем $p^* = P/(\pi R^2)$.

При проведении численных расчетов принимались следующие законы изменения коэффициента Пуассона по глубине: $\nu^{(i)}(x_3) = 1 - [a_i + b_i \exp \times (-2\gamma_i x_3)]^{-1}$ ($i=1, 2, 3, 4$), где $a_1 = a_2 = 2$, $a_3 = a_4 = 1$, $b_1 = b_2 = -2/3$, $b_3 = b_4 = 1/3$, $\gamma_1 = \gamma_4 = 4$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 1/2$. Характер поведения функций $\nu^{(i)}(x_3)$ показан на фигуре, где штриховая линия соответствует случаю постоянного коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$. Отметим, что при выбранных значениях параметров $\nu^{(i)}(0) = 0,25$ для $i=1, 2, 3, 4$.

В табл. 1 приведены значения безразмерных отношений величин осадки штампа и коэффициента интенсивности контактного давления к соот-

Таблица 1

i	$\delta/\delta^{(0)}$	$K_1/K_1^{(0)}$	i	$\delta/\delta^{(0)}$	$K_1/K_1^{(0)}$
1	0,715	0,866	3	1,111	1,021
2	0,829	0,942	4	1,237	1,083

Таблица 2

i	$r/R=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,92	0,96
1	1,077	1,076	1,071	1,060	1,031	0,982	0,946
2	1,055	1,052	1,044	1,029	1,003	0,976	0,963
3	0,954	0,956	0,961	0,970	0,985	1,001	1,009
4	0,927	0,928	0,932	0,941	0,963	1,000	1,026

ветствующим характеристикам для однородного упругого полупространства с $\nu=0,25$.

В табл. 2 показано распределение по площадке контакта безразмерного отношения величины контактного давления для неоднородного полупространства, вычисленного по формуле (2.6), к величине контактного давления для однородного полупространства.

Все расчеты проводились для жесткого цилиндра единичного радиуса. Решение интегрального уравнения (3.1) строилось методом механических квадратур с выделением логарифмической особенности при $t=s$.

Представленные результаты численных расчетов свидетельствуют о существенном влиянии изменения коэффициента Пуассона на величину осадки штампа и на локальное распределение контактного давления в окрестности кромки штампа. Распределение контактного давления во внутренней области площадки контакта также зависит, хотя и в меньшей степени, от характера изменения коэффициента Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gladwell G. M. L. Contact problems in the classical theory of elasticity. Leyden: Noordhoff, 1980. 728 p.
2. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
4. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 236 с.
5. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 341 с.
6. Кузнецов Е. А. О взаимосвязи некоторых контактных характеристик с переменными упругими свойствами сопряженных тел. — Трение и износ, 1983, т. 4, № 2, с. 238–248.
7. Плевако В. П. К теории упругости неоднородных сред. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 853–860.
8. Gibson R. E., Sills G. C. On the loaded elastic half-space with a depth varying Poisson's ratio. — Z. angew. Math. Phys., 1969, v. 20, No. 5, p. 691–695.
9. Davies B. Integral transforms and their applications. N. Y.: Springer, 1978. 440 p.
10. Александров В. М., Мзитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.

Киев

Поступила в редакцию
9.IV.1984