

УДК 539.3

О ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

ГЕРМАНОВИЧ Л. Н.

При определенных режимах воздействия концентрированного потока энергии на твердый материал в последнем возникают термоупругие напряжения, приводящие к его хрупкому разрушению [1, 2]. Появление термоупругих напряжений обусловлено тем, что энергия, поглощаясь в материале, преобразуется в тепловую и в теле начинают действовать внутренние источники тепла. При исследовании разрушения с феноменологических позиций нахождение напряжений является наиболее трудным этапом. При использовании структурных представлений считается, что разрушение обусловлено дефектами (трещинами), развитие которых определяется макроскопическими напряжениями в микродефектном материале.

Интенсивность неконцентрированного потока энергии во многих случаях убывает в материале с глубиной экспоненциально. Поэтому наибольший интерес представляет случай экспоненциального убывания с глубиной плотности внутренних источников тепла. В поперечном сечении потока интенсивность обычно распределена по некоторому куполообразному закону [2, 3]. Это естественно аппроксимировать какой-либо функцией, достаточно быстро убывающей на бесконечности, что учитывает и более сложные случаи распределения интенсивности, так как функция распределения может иметь несколько «куполов» [4].

Разрушение концентрированными потоками энергии материалов со слабым поглощением не определяется одними термоупругими напряжениями [5], но происходит на их фоне и при том за малые времена [5]. Материалы с сильным поглощением благодаря интенсивному поглощению также разрушаются, как правило, за небольшие времена [6]. Поэтому наряду с получением точного решения необходимо выделение асимптотики при малых временах и особенно в наиболее интересном случае существенного поглощения.

Наиболее простой и естественной моделью массивного облучаемого тела является упругое полупространство. Если характерное время разрушения $\tau \gg L/c$, где L — характерный размер области, охваченной разрушением, c — скорость распространения упругих возмущений, то для определения напряжений в этой области можно пользоваться уравнениями квазистатической термоупругости.

Попытка построения приближенного решения для полупространства с источниками тепла, распределенными неравномерно, по-видимому, впервые была предпринята в [7], где рассмотрен случай осесимметричного гауссова распределения плотности источников тепла.

Несмотря на то, что реальные распределения интенсивности обладают скорее осевой симметрией, в публикуемой статье рассматривается плоская задача термоупругости, так как, во-первых, при изучении плоской ситуации получаются существенно более простые формулы, а рассмотрение плоских потоков, по-видимому, позволяет понять многие особенности разрушения (см., например, [8–10]) и, во-вторых, такая ситуация действительно встречается, когда поток сильно наклонен к поверхности разрушаемого тела или источником потока энергии служит достаточно протяженный источник.

Закон Бугера, для которого решалась задача термоупругости для полупространства, хорошо применим для описания взаимодействия неконцентрированного потока электромагнитной энергии с веществом. Если же вещество взаимодействует с потоком атомных частиц (например, электронов), то закон Бугера может нарушаться [11]. Однако, если область нарушения закона Бугера не слишком велика и, как это часто бывает [11], сосредоточена вблизи поверхности, то на больших глубинах напряжения, определенные далее, в определенной степени совпадают с реальными. Поэтому модель «закона Бугера» позволяет определять термоупругие напряжения в полупространстве, нагреваемом не только потоком электромагнитной энергии, но и потоком частиц.

Публикуемая статья является продолжением [12].

1. В декартовых координатах x, y, z рассмотрим упругое полупространство $z \geq 0$, внутри которого действуют внутренние источники тепла, плотность которых $q = c\rho Q_0 f(y) \exp(-\gamma z)$, где область значений функции

$f(y)$ — отрезок $[0, 1]$, c и ρ — теплоемкость и плотность материала полупространства, $Q_0 = \text{const}$. Требуется найти температуру и напряжения внутри полупространства, если на его свободной границе $z=0$ осуществляется конвективный теплообмен, поля температуры и напряжений не связаны и условия квазистатики выполнены.

Краевую задачу теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a\Delta T + Q_0 e^{-\gamma z} f(y) \quad (z > 0) \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= hT \quad (z=0), \quad T=0 \quad (t=0) \\ \Delta &= \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

удобно привести к безразмерным величинам, положив $T' = TaQ_0^{-1}\delta^{-2}$, $x' = x/\delta$, $y' = y/\delta$, $z' = z/\delta$, $\gamma' = \gamma\delta$, $h' = h\delta$, $t' = at\delta^{-2}$, где δ — некоторый характерный размер. Тогда в (1.1) следует положить $a=1$ и $Q_0=1$. Штрихи далее для краткости опускаются, и, где не оговорено противное, используются указанные выше безразмерные величины.

Применяя к (1.1) преобразование Лапласа по t , получим

$$sT^* = \Delta T^* + e^{-\gamma z} f(y)/s \quad (z > 0) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial z} = hT^* \quad (z=0), \quad T^* = L_s [T] = \int_0^\infty T e^{-st} dt$$

где L_s — оператор преобразования Лапласа с параметром s . Заменяя в (1.2) T^* и $f(y)$ их интегралами Фурье по y и решая получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение, найдем выражение для изображения температуры (λ — параметр интеграла Фурье)

$$T^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ -\frac{(h+\gamma)e^{-\omega z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} + \frac{e^{-\gamma z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)} \right\} g_1(\lambda, y) d\lambda \quad (1.3)$$

$$g_1(\lambda, y) = f_c(\lambda) \cos(\lambda y) + f_s(\lambda) \sin(\lambda y), \quad \omega = \sqrt{s + \lambda^2}$$

$$f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \cos(\lambda y) dy, \quad f_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \sin(\lambda y) dy \quad (1.4)$$

Отметим, что для сходимости интегралов в (1.4) достаточно, чтобы функция $f(y)$ являлась функцией ограниченной вариации и абсолютно интегрировалась на полупрямой $[0, \infty)$, что в физических задачах обычно выполняется.

Для получения изображений напряжений воспользуемся методом термоупругого Φ [13], изображение которого в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^* &= m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ -\frac{(h+\gamma)e^{-\omega z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} + \frac{e^{-\gamma z} - e^{-\lambda z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \lambda^2)} \right\} g_1(\lambda, y) d\lambda \\ &\quad \left(m = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения, ν — коэффициент Пуассона. Особенность в подынтегральном выражении при $\lambda = \gamma$ является устранимой (все особенности, встречающиеся ниже, устранимы и специально это далее не оговаривается).

Используя бигармоническую функцию Эри

$$F^* = \int_0^\infty \{ [A(s, \lambda) + zB(s, \lambda)] \cos(\lambda y) + [C(s, \lambda) + zD(s, \lambda)] \sin(\lambda y) \} e^{-\lambda z} d\lambda$$

граничные условия $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$ ($z=0$), формулу (1.5) и соотношения из

[13], найдем следующие выражения для изображений напряжений (E — модуль Юнга):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}^*}{D} &= -T^* + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ \frac{(h+\gamma)\lambda^2 e^{-\omega z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} - \frac{\lambda^2(e^{-\gamma z} - e^{-\lambda z})}{s(\omega^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \lambda^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(h+\gamma)(2\lambda - z\lambda^2)e^{-\lambda z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)} + \frac{(h+\gamma)[2h\lambda + (1 - hz)\lambda^2 - z\lambda^3]e^{-\lambda z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} + \\ &\quad \left. + (2\lambda - z\lambda^2)e^{-\lambda z}/[s(\omega^2 - \gamma^2)(\gamma + \lambda)] \right\} g_1(\lambda, y) d\lambda \\ \frac{\sigma_{zz}^*}{D} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ -\frac{(h+\gamma)\lambda^2 e^{-\omega z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} + \frac{\lambda^2(e^{-\gamma z} - e^{-\lambda z})}{s(\omega^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \lambda^2)} - \right. \\ &\quad - \frac{(h+\gamma)z\lambda^2 e^{-\lambda z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)} + \frac{(h+\gamma)[(1 + hz)\lambda^2 + z\lambda^3]e^{-\lambda z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} + \\ &\quad \left. + \frac{z\lambda^2 e^{-\lambda z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)(\gamma + \lambda)} \right\} g_1(\lambda, y) d\lambda \\ \frac{\sigma_{yz}^*}{D} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ -\frac{(h+\gamma)\lambda e^{-\omega z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)} + \frac{(h+\gamma)h\lambda e^{-\omega z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} + \right. \\ &\quad + \frac{\gamma\lambda e^{-\gamma z} - \lambda^2 e^{-\lambda z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \lambda^2)} + \frac{(h+\gamma)(\lambda - z\lambda^2)e^{-\lambda z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)} - \\ &\quad \left. - \frac{(h+\gamma)[h\lambda - hz\lambda^2 - z\lambda^3]e^{-\lambda z}}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} - \frac{(\lambda - z\lambda^2)e^{-\lambda z}}{s(\omega^2 - \gamma^2)(\gamma + \lambda)} \right\} g_2(\lambda, y) d\lambda \quad (1.6) \\ \sigma_{xx}^* &= \nu(\sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^*) - \alpha ET^*, \quad D = \alpha EQ_0 \delta^2 / ((1-\nu)a) \\ g_2(\lambda, y) &= f_c(\lambda) \sin(\lambda y) - f_s(\lambda) \cos(\lambda y) \end{aligned}$$

Отыскание оригиналов температуры и напряжений осуществляется обращением соотношений (1.3) и (1.6). Окончательные формулы при помощи элементарных равенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\omega^2 - \gamma^2)(h+\omega)} &= \frac{1}{\gamma^2 - h^2} \left[\frac{\gamma - h}{\omega^2 - \gamma^2} + \frac{1}{\omega + \gamma} - \frac{1}{\omega + h} \right] \\ \frac{1}{s^2(\omega^2 - \gamma^2)} &= \frac{1}{\gamma^2 - \lambda^2} \left[\frac{1}{(\gamma^2 - \lambda^2)(\omega^2 - \gamma^2)} - \frac{1}{(\gamma^2 - \lambda^2)s} - \frac{1}{s^2} \right] \\ \frac{1}{s(\omega^2 - \gamma^2)} &= \frac{1}{\gamma^2 - \lambda^2} \left[-\frac{1}{s} + \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \right] \end{aligned}$$

сводятся к табличным выражениям из [14, 15] и потому здесь не приводятся.

Таким образом получено точное решение поставленной задачи термодинамики для полупространства с источниками тепла, справедливое при любых временах нагрева, любом коэффициенте теплообмена h и любом коэффициенте поглощения γ .

2. Рассмотрим теперь выделение асимптотик при малых временах. Исследуем сначала температуру.

Из дальнейшего будет видно (см. (2.3)), что при $t \rightarrow 0$ оригинал первого слагаемого в (1.3) является величиной высшего порядка малости по сравнению с оригиналом второго. Обращая второе слагаемое, получаем асимптотически точную формулу

$$T = f(y) e^{-i^2 \varphi(t)}, \quad \varphi(t) = (e^{i^2 t} - 1) / i^2 \quad (2.1)$$

Для оценки погрешности δ_T температуры в (2.1) используем неравенство (L_i^{-1} — оператор, обратный к L_s):

$$0 \leq L_i^{-1} \frac{(h+\gamma) e^{-z\sqrt{s}}}{(s - \gamma^2)(h + \sqrt{s})} \leq \frac{2(h+\gamma)}{\sqrt{\pi}} e^{\gamma^2 t} \sqrt{t} \quad (2.2)$$

которое следует из теоремы о свертке оригиналов [16], формул [15] и решения задачи об одномерном конвективном нагреве полупространства [12]. Применяя тогда к δ_T теорему об интегрировании оригинала и теорему смещения [16], имеем

$$\delta_T = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_1(\lambda, y) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} L_{\tau}^{-1} \frac{(h + \gamma) e^{-z\sqrt{s}}}{(s - \gamma^2)(h + \sqrt{s})} d\tau$$

Из этого выражения и из (2.2) окончательно получаем

$$|\delta_T| \leq \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} (h + \gamma) e^{\gamma^2 t^{3/2}} \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda, \quad g(\lambda) = \sqrt{f_c^2(\lambda) + f_s^2(\lambda)} \quad (2.3)$$

Так как $\varphi(t)$ порядка t , то из (2.3) непосредственно видно, что $\delta_T = o(\varphi(t))$ ($t \rightarrow 0$).

Таким образом, T порядка t ($t \rightarrow 0$) и температура может быть рассчитана по асимптотической формуле (2.1), погрешность которой оценивается соотношением (2.3).

Асимптотическое представление напряжений при малых временах получается аналогично. Отбрасывая в подынтегральных выражениях (1.6) слагаемые высшего порядка малости по t (содержащие сомножитель s^{-2}), обращая оставшиеся слагаемые и раскладывая результат обращения в ряд по степеням t , после некоторых преобразований получим асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}}{D} &= -T + t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ -\lambda^2 \frac{e^{-\gamma z} - e^{-\lambda z}}{\gamma^2 - \lambda^2} + \frac{2\lambda - z\lambda^2}{\gamma + \lambda} e^{-\lambda z} \right\} g_1(\lambda, y) d\lambda \\ \frac{\sigma_{zz}}{D} &= t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\gamma z} - e^{-\lambda z}}{\gamma^2 - \lambda^2} + \frac{ze^{-\lambda z}}{\gamma + \lambda} \right\} \lambda^2 g_1(\lambda, y) d\lambda \\ \frac{\sigma_{xx}}{D} &= -T + 2vt \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{\gamma + \lambda} g_1(\lambda, y) d\lambda \\ \frac{\sigma_{yz}}{D} &= t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \lambda \gamma \frac{e^{-\gamma z} - e^{-\lambda z}}{\gamma^2 - \lambda^2} + \frac{z\lambda^2 e^{-\lambda z}}{\gamma + \lambda} \right\} g_2(\lambda, y) d\lambda \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используя (2.2) и аналогичное ему неравенство $0 \leq L_t^{-1} e^{-z\sqrt{s}} / (s - \gamma^2) \leq e^{\gamma^2 t + 1/2}$, можно получить оценки погрешностей формул (2.4). Опуская довольно громоздкие выкладки, приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned} |\delta_{yy}| &\leq t^2 e^{\gamma^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \lambda \left[h + 2\gamma + (h + \gamma) \frac{16h\sqrt{t}}{15\sqrt{\pi}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \left[3/2 + (h + \gamma)^{16/15} \sqrt{t/\sqrt{\pi}} \right] \right\} g(\lambda) d\lambda \\ |\delta_{zz}| &\leq t^2 e^{\gamma^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda \left[\frac{h + 3\gamma}{2e} + (h + \gamma) \frac{8h\sqrt{t}}{15e\sqrt{\pi}} \right] + \\ &\quad + \lambda^2 \left[1/2 + 1/e + (h + \gamma)^{16/15} \sqrt{t/\sqrt{\pi}} \right] g(\lambda) d\lambda \\ |\delta_{xx}| &\leq v |\delta_{yy}| + v |\delta_{zz}|, \quad |\delta_{yz}| \leq t^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \lambda \left[e^{\gamma^2 t} (h + 2\gamma + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (h + \gamma) \frac{16h\sqrt{t}}{15\sqrt{\pi}} \right) + \frac{h + \gamma}{4} \right] + \lambda^2 \left[1 + (h + \gamma) \frac{8\sqrt{t}}{15e\sqrt{\pi}} \right] e^{\gamma^2 t} \right\} g(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, σ_{ij} порядка t , а δ_{ij} порядка t^2 при $t \rightarrow 0$ ($i, j = x, y, z$).

Формулы (2.4), (2.5) весьма удобны для вычислений, так как устранимые особенности в подынтегральных выражениях имеют достаточно простой вид, легко выделяются и оцениваются, а сами интегралы для многих функций $f(y)$ быстро сходятся. Кроме того, в ряде случаев (см. далее) эти интегралы берутся в элементарных функциях.

Отметим, что температура T в (2.4) считается известной точно (для этого случая и получены оценки (2.5)). Если же для вычисления температуры используется приближенная формула (2.1), то для оценки погрешностей соотношений (2.4) в правые части неравенств (2.5) следует добавить слагаемые $|\delta_T| = O(t^2)$ (см. 2.3), что может привести к огрублению оценок. Для «выдерживания» порядка малости по t приведем еще одно асимптотически точное при $t \rightarrow 0$ выражение для температуры («следующее» приближение)

$$T = f(y) f_1(z, t) \quad (2.6)$$

которое получается из (1.3) методом выделения асимптотики при малых временах нагрева, развитым в работах [10, 14, 17]. Здесь

$$f_1(z, t) = \frac{h + \gamma}{h\gamma^2} \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{t}} + \frac{e^{hz+h^2t}}{(h-\gamma)h} \operatorname{erfc} \frac{z+2ht}{2\sqrt{t}} - \\ - \frac{e^{\gamma z t}}{2} \left\{ e^{-\gamma z} \operatorname{erfc} \frac{z-2\gamma t}{2\sqrt{t}} + \frac{h+\gamma}{h-\gamma} e^{\gamma z} \operatorname{erfc} \frac{z+2\gamma t}{2\sqrt{t}} \right\} + \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma^2} (e^{\gamma z t} - 1) \quad (2.7)$$

и оценка погрешности формулы (2.6) дается неравенством

$$|\delta_T| \leq \frac{3}{2} t^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda^2 g(\lambda) d\lambda \quad (2.8)$$

т. е. при $t \rightarrow 0$ величина $|\delta_T| = O(t^2)$ — малая нужного порядка.

Формула (2.6) имеет и самостоятельное значение. В самом деле, можно показать, что $f_1(z, t)$ — решение одномерной задачи теплопроводности для полупрямой $0 < z < \infty$, вдоль которой действуют источники тепла с плотностью, распределенной по закону $\exp(-\gamma z)$, а на конце $z=0$ осуществляется конвективный теплообмен со средой нулевой температуры, равной начальной температуре полупрямой. Но так как $f(y)$ — распределение плотности источников тепла в любой плоскости, параллельной поверхности полупространства (см. (2.1)), то из (2.6) следует, что при малых временах температура в плоскостях $y = \text{const}$ изменяется независимо по законам одномерной теплопроводности, а теплообменом между плоскостями $y = \text{const}$ можно пренебречь. Физически это означает, что в начальные моменты времени распределение температуры в полупространстве «повторяет» распределение плотности внутренних источников тепла, не «расплываясь» в стороны, т. е. тангенциальные тепловые потоки малы в сравнении с нормальными. Совершенно аналогично это показывается для осесимметричного и, вообще, для произвольного несимметричного случаев. Для напряжений аналогичное рассмотрение показывает, что часто используемая приближенная формула $\sigma_{yy} = \sigma_{xx} = -\alpha ET / (1-\nu)$ (точная в одномерном случае [1]; здесь T — размерная величина) асимптотически не точна при $t \rightarrow 0$ и в этом смысле вообще не является приближением. Важно отметить, что в отличие от одномерного случая, когда $\delta_{zz} = 0$ при любом значении времени, в неоднородной ситуации, вообще говоря, $\sigma_{zz} \neq 0$ ни при малых, ни при конечных временах.

В случае $\gamma = 0$ соотношения (2.4) упрощаются, так как особенности в подынтегральных выражениях исчезают. Имеем

$$\sigma_{yy} = -DT + Dt[A_{01} + B_{01} - zB_{11}], \quad \sigma_{xx} = -DT + 2Dt\nu B_{01} \quad (2.9)$$

$$\sigma_{zz} = Dt[-A_{01} + B_{01} + zB_{11}], \quad \sigma_{yz} = Dt z B_{12}$$

где использованы обозначения

$$A_{ij} = \int_0^{\infty} \lambda^i g_j(\lambda, y) d\lambda, \quad B_{ij} = \int_0^{\infty} \lambda^i e^{-\lambda z} g_j(\lambda, y) d\lambda \quad (2.10)$$

От конкретного вида функции $f(y)$ зависят только коэффициенты (2.10), а вид асимптотики (2.9) остается неизменным. В общем случае расчет коэффициентов (2.10) не представляет затруднений, если использовать методы численного интегрирования. Однако для многих распределений $f(y)$ они берутся в элементарных функциях. Так, для физически важного куполообразного распределения

$$f(y) = 1/(y^2+1)^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

на основании формул [18] можно показать, что

$$f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lambda}}{2^{2n-2}(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k-2)!(2\lambda)^k}{k!(n-k-1)!}, \quad f_s(\lambda) = 0$$

$$A_{ij} = \frac{(-1)^i}{2^{2n-2}(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!} \frac{\partial^{k+i}}{\partial r^{k+i}} \frac{(2-j)r + (j-1)y}{y^2 + r^2} \Big|_{r=1} \quad (2.12)$$

$$B_{ij} = \frac{(-1)^i}{2^{2n-2}(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!} \frac{\partial^{k+i}}{\partial r^{k+i}} \frac{(2-j)r + (j-1)y}{y^2 + r^2} \Big|_{r=1+z}$$

и нулевой производной функции считается сама функция. При этом оценки погрешности (2.3), (2.5), (2.8) также становятся элементарными и сводятся, как легко видеть, к интегралам

$$\int_0^{\infty} \lambda^k e^{-\lambda} d\lambda = k! \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

Другим примером такого «хорошего» распределения является функция $f(y) = (y^{2n}+1)^{-1}$ ($n=1, 2, \dots$). При помощи [18] можно указать еще примеры, набор которых, по-видимому, достаточен для аппроксимации практически встречающихся реальных распределений.

Рассмотрим теперь некоторые особенности поля напряжений в полупространстве с источниками тепла при $\gamma=0$ для распределения

$$f(y) = 1/(y^2+1) \quad (2.14)$$

Формулы (2.9) и (2.14) (при $n=1$) приводят к следующим простым выражениям для напряжений:

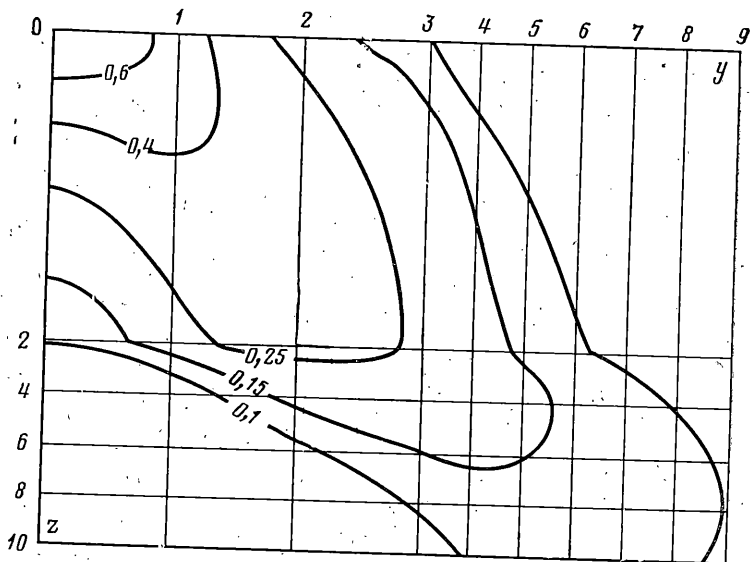
$$\frac{\sigma_{yy}}{Dt} = \frac{1+z}{y^2 + (1+z)^2} - \frac{z[(1+z)^2 - y^2]}{[y^2 + (1+z)^2]^2}$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{Dt} = -\frac{1}{y^2 + 1} + \frac{2v(1+z)}{y^2 + (1+z)^2} \quad (2.15)$$

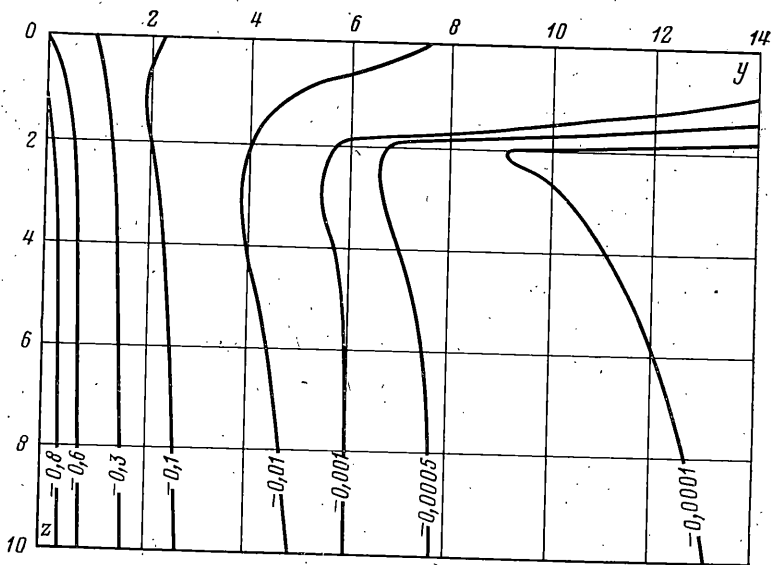
$$\frac{\sigma_{zz}}{Dt} = -\frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1+z}{y^2 + (1+z)^2} + \frac{z[(1+z)^2 - y^2]}{[y^2 + (1+z)^2]^2}$$

$$\sigma_{yz}/Dt = 2yz(1+z)/[y^2 + (1+z)^2]^2$$

где использовано соотношение (2.1) и очевидная асимптотическая формула $\varphi(t) = t$, погрешность δ_φ которой удовлетворяет неравенству $0 \leq \delta_\varphi < t^2 e^{-t^2}/2$. Пренебрегая теплообменом, как это часто делают для небольших времен (как в статических [7], так и в динамических [19] задачах), и полагая $h=0$, из (2.3), (2.5) получаем оценку $|\delta_{ij}| \leq 7t^2/2$, где $i, j=x, y, z$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Если $h \neq 0$, то для оценки погрешности¹ можно непосредственно использовать (2.5) и (2.13).

Отметим, что можно получить оценки погрешности формул (2.4) меньшего порядка малости, чем (2.5) (порядка $t^{3/2}$), но не содержащие множители $\exp(\gamma^2 t)$.

Из формул (2.15) можно видеть, что напряженное состояние качественно отличается от напряженного состояния, возникающего в полупространстве при его конвективном нагреве [12]. Так, в сравнении со случаем конвективного нагрева в значительной части полупространства напряжения поменяли знак. Например, если в (2.15) положить $y=0$ (рассмотреть плоскость симметрии), то получим, что напряжения σ_{zz} и σ_{xx} сжимающие, а напряжение σ_{yy} растягивающее во всем полупространстве, тогда как при конвективном нагреве напряжение σ_{zz} всюду растягивающее, напряжение σ_{xx} сжимающее лишь вблизи поверхности, а напряжение σ_{yy} растягивающее только начиная с некоторой глубины [12]. Кроме того, при конвективном нагреве полупространства напряжения на бесконечности равны нулю [12]. В данном же случае, когда полупространство нагревается источниками тепла, на бесконечности ($z \rightarrow \infty$) $\sigma_{zz} = \sigma_{xx} = -Dt$, что не является результатом приближенности решения, так как эти напряжения порядка t , а погрешности порядка t^2 . Отметим, что, так как на беско-

¹ В практических расчетах относительная погрешность формул (2.15) не превосходит нескольких процентов.

нечности действуют источники тепла с конечной плотностью, то появление там конечных напряжений совершенно естественно. Поэтому с физической точки зрения ненулевые на бесконечности напряжения объясняются тем, что идеальный материал ($\gamma=0$) является моделью реального материала (γ мало, но конечно), т. е. бесконечности в идеальном материале отвечает некоторое конечное расстояние в реальном материале, на котором напряжения конечно же ненулевые.

На фиг. 1 представлены изолинии максимального главного напряжения σ_1 , а на фиг. 2 — распределение минимального главного напряжения σ_3 . Расчеты производились по формулам (2.15).

Строго говоря, случай $\gamma=0$ в известной степени гипотетичен. Например, при нагревании материала концентрированным потоком энергии он противоречит закону сохранения энергии: материал нагревается, а плотность потока энергии не уменьшается. Ему можно придать, однако, указанный выше смысл. Если γ мало, но конечно, то наряду с соотношениями (2.4) можно построить решение методом малого параметра. При этом формулы (2.9), (2.15) играют роль нулевого приближения.

Асимптотика напряжений и оценка погрешности при малых t и больших γ определяются соотношениями (2.4), (2.5). Однако значительно более простые соотношения получаются непосредственно из решения задачи термоупругости для подходящим образом подобранной температуры. Перейдем к изучению этого случая.

3. Пусть в полупространстве $z \geq 0$ имеется распределение температуры (2.1). Используем тот факт, что γ велико. Для этого термоупругий потенциал примем в виде

$$\Phi = mf(y)e^{-\gamma z} \varphi(t) / \gamma^2 \quad (3.1)$$

откуда следует, что

$$\Delta \Phi = mf(y)e^{-\gamma z} \varphi(t) [1 + \varepsilon(y)] \quad (3.2)$$

$$\varepsilon(y) = 1 / (\gamma^2 f(y)) d^2 f(y) / dy^2$$

т. е. (3.1) будет частным решением уравнения $\Delta \Phi = mT$ [13], если реальное распределение температуры (2.1) заменить распределением

$$T = f(y)e^{-\gamma z} \varphi(t) [1 + \varepsilon(y)] \quad (3.3)$$

Ограничимся далее случаем функций $\varepsilon(y)$, принимающих конечные значения² на всем интервале изменения y . Тогда $\varepsilon(y) \rightarrow 0$ при $\gamma^2 \rightarrow \infty$, а так как краевая задача термоупругости корректна (устойчива к малым изменениям температуры), то при больших γ^2 малая добавка к температуре (2.1) в (3.3) приводит также к небольшому изменению напряжений, т. е. напряжения, соответствующие температурам (2.9) и (3.3), отличаются на малые величины, если

$$\gamma^2 \gg |f''(y)/f(y)| \quad (|\varepsilon(y)| \ll 1) \quad (3.4)$$

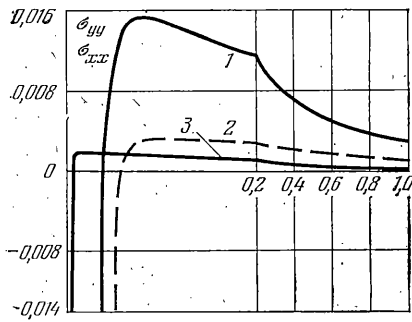
и именно это будем иметь в виду, говоря, что γ велико.

Для нахождения напряжений в полупространстве с температурой (3.3) используем термоупругий потенциал (3.1) и функцию Эри, использованную выше. После преобразований получаем простые формулы

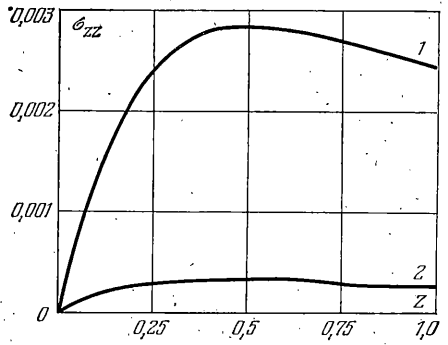
$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}}{D} &= \frac{\varphi(t)}{\gamma^2} \{-\gamma^2 e^{-\gamma z} f(y) + 2\gamma B_{11} - (1 + \gamma z) B_{21} + z B_{31}\} \\ \frac{\sigma_{xx}}{D} &= \frac{\varphi(t)}{\gamma^2} \{e^{-\gamma z} [A_{21} - \gamma^2 f(y)] + 2\nu [\gamma B_{11} - B_{21}]\} \\ \frac{\sigma_{zz}}{D} &= \frac{\varphi(t)}{\gamma^2} \{e^{-\gamma z} A_{21} - (1 - \gamma z) B_{21} - z B_{31}\} \\ \frac{\sigma_{yz}}{D} &= \frac{\varphi(t)}{\gamma^2} \{\gamma e^{-\gamma z} A_{12} - \gamma B_{12} + \gamma z B_{22} - z B_{32}\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где коэффициенты A_{ij} , B_{ij} определяются формулами (2.10). Вид соотношений (3.5) не зависит от конкретного распределения плотности источников тепла $f(y)$, от которого по-прежнему зависят лишь коэффициенты

² По существу, именно ограниченность величины, аналогичной ε , позволила авторам работы [7] использовать похожую аппроксимацию температуры для случая осесимметричного гауссова распределения плотности внутренних источников тепла.



Фиг. 3



Фиг. 4

A_{ij} , B_{ij} , а их вычисление, как отмечено выше, не вызывает затруднений³. Так, для распределения (2.14) они представляют собой элементарные функции (2.12), и условие (3.4) имеет вид $\gamma^2 \gg 2n$.

Рассмотрим далее те точки полупространства, для которых коэффициенты B_{ij} не равны нулю (обычно в физических задачах все точки полупространства такие).

Пусть $z \geq z_0$, где z_0 — некоторое положительное число, которое может быть сколь угодно малым. Тогда можно выписать более простое, чем (3.5), асимптотическое представление решения при $\gamma \rightarrow \infty$.

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= D\varphi(t) \frac{1}{\gamma} [2B_{11} - zB_{21}], & \sigma_{xx} &= D\varphi(t) \frac{2\nu}{\gamma} B_{11} \\ \sigma_{zz} &= D\varphi(t) \frac{1}{\gamma} zB_{21}, & \sigma_{yz} &= D\varphi(t) \frac{1}{\gamma} [-B_{12} + zB_{22}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

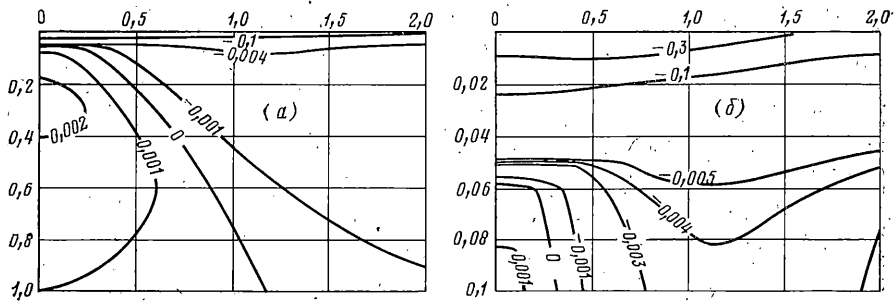
Аналогично для тех точек границы полупространства, для которых $f(y) \neq 0$, имеем при $\gamma \rightarrow \infty$:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -D\varphi(t) f(y) \quad (z=0) \quad (3.7)$$

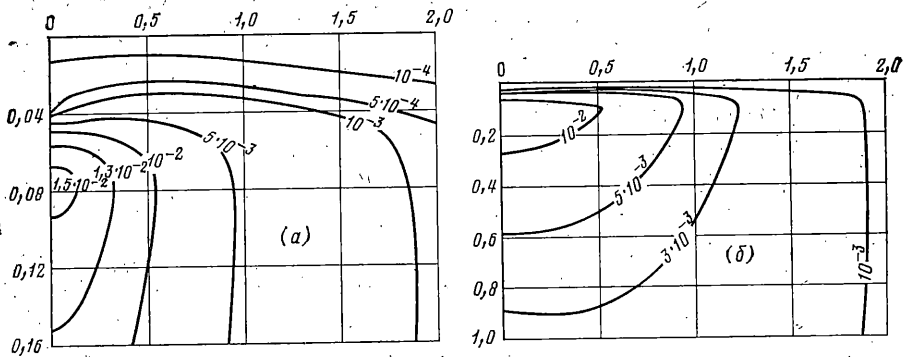
тогда как для точек границы, в которых $f(y)$ обращается в нуль, асимптотическое представление напряжений σ_{xx} и σ_{yy} дается при $\gamma \rightarrow \infty$ также формулами (3.6) (напряжения σ_{zz} и σ_{yz} на границе полупространства известны точно: $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0$).

В частном случае (2.14) соотношения (3.5) приобретают вид дробно-рациональных функций (как и вообще в случае (2.11)) и имеют смысл при $\gamma^2 \gg 2$. На фиг. 3 показана зависимость напряжений σ_{yy} (сплошные линии) и σ_{xx} (пунктирная линия) от глубины z в плоскости симметрии $y=0$. Кривые 1 и 2 рассчитаны для значения $\gamma=100$, кривая 3 — для $\gamma=1000$. Кривая, изображающая напряжение σ_{xx} для случая $\gamma=1000$, качественно такая же, но в масштабе фиг. 3 сливается с осями координат. Зависимости σ_{yy} и σ_{xx} от z гладкие, а излом кривых на фиг. 3 обусловлен изменением масштаба в правой части фигуры. На фиг. 4 представлены зависимости напряжений σ_{zz} от глубины также при $y=0$ для $\gamma=100$ (кривая 1) и $\gamma=1000$ (кривая 2). Вычисления для значений $\gamma=10-10^6$ показывают, что вблизи поверхности напряжения σ_{xx} и σ_{yy} сжимающие, а на глубине переходят в растягивающие. Напряжение σ_{zz} — растягивающее во всем полупространстве, возрастает при удалении от поверхности от нуля до некоторой величины, а затем убывает (на бесконечности до нуля). Наибольшее сжимающее напряжение реализуется на поверхности полупространства в точке $y=z=0$. Им является напряжение σ_{yy} , которое близко в этой точке к σ_{xx} (в асимптотике (3.7) они равны). Наибольшее растягивающее напряжение реализуется в плоскости симметрии $y=0$. Им также является напряжение σ_{yy} . Формула для σ_{zz} в (3.6) и исследо-

³ В [7] приближенное решение для случая осесимметричного гауссова распределения плотности внутренних источников тепла получено в виде бесконечных рядов по функциям, аналогичным A_{ij} и B_{ij} .



Фиг. 5



Фиг. 6

вание соотношений (3.5) для случая больших γ и малых z позволяют определить в асимптотике величины наибольших напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} и координаты точек их действия. Имеем.

$$\begin{aligned} \max \sigma_{zz} &= 8/27 \gamma^{-1} D\varphi(t), & y=0, & z=z_1=1/2 \\ \max \sigma_{yy} &= 2\gamma^{-1} D\varphi(t), & y=0, & x=z_2=\gamma^{-1} \ln \gamma^2/6 \\ \max \sigma_{xx} &= (2\nu/\gamma) D\varphi(t), & y=0, & z=z_3=\gamma^{-1} \ln \gamma^2/(4\nu) \end{aligned} \quad (3.8)$$

На фиг. 5 и 6 представлены в двух разных масштабах распределение изолиний максимального σ_1 и минимального σ_3 главных напряжений для случая $\gamma=100$, рассчитанных по формулам (3.5), (2.14), (2.12). Как видно, при больших γ напряженное состояние в полупространстве качественно похоже на напряженное состояние, возникающее в полупространстве при его конвективном нагреве (см. [12]).

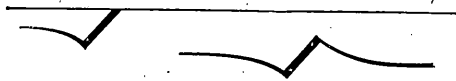
Сравнение результатов расчетов по формулам (3.5)–(3.8) с контрольными расчетами по асимптотическим формулам (2.4), для которых имеются оценки погрешности (2.5), показывает, что погрешность формул (3.5)–(3.8) в указанном диапазоне γ не превышает нескольких процентов, если безразмерное время t не превосходит по порядку величины $1/\gamma^2$.

4. В заключение рассмотрим простейшее применение полученных результатов к качественному анализу некоторых эффектов хрупкого разрушения слабо прозрачных тел концентрированными потоками энергии. Для определенности аппроксимируем интенсивность I в поперечном сечении потока энергии формулой типа (2.14), т. е. положим $I=I_0\delta^2/(y^2+\delta^2)$, где δ – некоторая постоянная, имеющая размерности длины и характеризующая «ширину» потока (здесь и далее используются размерные величины). Условие (3.4) справедливости (3.5) будем считать выполненным.

Тогда поле напряжений характеризуется кривыми, изображенными на фиг. 3–6. Как видно, сжимающие напряжения сосредоточены в тонком поверхностном слое и по абсолютной величине резко убывают от поверхности в глубь полупространства. Под этим слоем находится зона действия растягивающих напряжений, меняющихся значительно более медленно. Причем минимальное напряжение σ_{\min} в сжатом слое и максимальное напряжение σ_{\max} в области растяжения связаны, как это следует из формул (3.7), (3.8), соотношением $\sigma_{\min}=-\delta\gamma\sigma_{\max}/2$. Но $(\delta\gamma)^2 \gg 2$. Поэтому наибольшее сжимающее напряжение по меньшей мере в несколько раз превосходит наибольшее растягивающее. А так как прочность хрупкого тела на сжатие также в несколько раз (с учетом масштабного эффекта [1]) по крайней мере на порядок)

больше прочности на растяжение, то в хрупком режиме разрушения энергетически пучками слабопрозрачных материалов могут наблюдаться (и наблюдаются в действительности [20]) два качественно различных типа разрушения: мелкомасштабное, сосредоточенное в сжатом слое, и крупномасштабное, приуроченное к области растяжения. Действительно, если бы прочность на сжатие была близка к прочности на растяжение, то благодаря тому, что σ_{\min} по абсолютной величине существенно превосходит σ_{\max} , имел бы место только мелкомасштабный тип разрушения. На самом же деле встречается и тот, и другой [2, 20].

Следует отметить, что феноменологические критериальные представления позволяют только зафиксировать факт разрушения в некоторый момент времени, что, однако, небесполезно. Так, мелкомасштабное разрушение непосредственно не угрожает несущей способности элементов конструкций, однако, и оно может быть нежелательно (например, в зеркалах оптических систем). Используя полученные выше



Фиг. 7

результаты и какой-либо критерий прочности, легко выписать простые достаточные условия отсутствия разрушения.

Если аналогичным образом феноменологически исследовать переход материала полупространства в пластическое состояние, то естественно ожидать, прежде всего, мелкомасштабной пластичности в сжатом поверхностном слое (так как пределы пластичности большинства материалов на сжатие и растяжение отличаются не слишком сильно). В этом случае совершенно оправданы одномерные модели (см., например, [21]) нагрева полупространства источниками тепла.

Точно также одномерная модель оправдана при изучении мелкомасштабного приповерхностного разрушения в сжатом слое при больших коэффициентах поглощения. В самом деле при больших γ и достаточно малых z напряжения σ_{zz} и σ_{yz} , как это следует из (3.5), невелики по сравнению с напряжениями σ_{xx} и σ_{yy} . Вместе с тем согласно (3.7) на поверхности полупространства одномерная и неодномерная модели дают один и тот же результат. Наконец, в одномерной модели сжимающие напряжения $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, пропорциональные температуре (2.7), также резко убывают по абсолютной величине с глубиной, а $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0$.

Напротив, при изучении крупномасштабного глубинного разрушения одномерная модель неприменима в принципе, так как растягивающие напряжения в области растяжения возникают именно благодаря неодномерности нагрева, т. е. неоднородности распределения интенсивности энергии в поперечном сечении потока.

Для описания развития процессов мелко- и крупномасштабного разрушения и их влияния друг на друга необходимо явное введение дефектной структуры материала и расчет ее изменений. Так, в материале с хаотическими редко расположенными трещинами качественная картина мелкомасштабного разрушения выглядит следующим образом. Приповерхностная трещина сдвига начинает, как это следует из теории [1] и из экспериментов (см., например, [22]), расти по механизму отрыва так, что ее концы двигаются навстречу сжимающим напряжениям. При этом отрезки от первоначальной трещины ориентируются параллельно оси сжатия (правая трещина на фиг. 7). Так как в данном случае поверхность полупространства практически перпендикулярна площадке, на которой действует наибольшее сжимающее напряжение, то отрезки ориентируются параллельно поверхности [22]. По-видимому, аналогичным образом происходит развитие поверхностных трещин (левая трещина на фиг. 7). Таким образом, от поверхности отслаивается пластинка, которая подвержена продольному сжатию и поэтому может в какой-то момент потерять устойчивость, если только в силу каких-либо причин она не отделится от основного массива раньше (например, из-за слияния трещин). Следовательно, результатом разрушения материала концентрированными потоками энергии может быть шелушение его поверхности, продуктом которого являются тонкие пластинки (чешуйки). Это и наблюдается в экспериментах [2, 20].

Автор благодарен И. Д. Киллю и О. В. Сенкевич за обсуждение результатов работы. Автор признателен Д. С. Красновскому за построение графиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cherempanov G. P. Mechanics of Brittle Fracture.* N. Y.: McGraw-Hill, 1979: 952 p.
2. *Соболь Э. Н., Углов А. А. Лазерная обработка горных пород.* Физика и химия обраб. материалов, 1983, № 2, с. 3-17.
3. *Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Кокора А. Н. Лазерная обработка материалов.* М.: Машиностроение, 1975. 296 с.
4. *Tomlinson W. J., Gordon J. P., Smith P. W., Kaplan A. E. Reflection of a Gaussian beam at a Nonlinear Interface.* — Appl. Optics, 1982, v. 21, No. 11, p. 2041-2051.
5. *Баренблатт Г. И., Всеволодов Н. Н., Миркин Л. И., Пилипецкий Н. Ф., Райзер Ю. П. и др. О разрушении прозрачных материалов под действием лазерного*

- излучения. Возникновение газовых пузырьков и расклинивание материала газовым давлением.— Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 5, вып. 3, с. 85—87.
6. Lauriello P. J., Chen Y. Thermal Fracturing of Hard Rock.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, v. 40, No. 4, p. 909—914.
 7. Даниловская В. И., Шефгер Э. М. Температурные поля и напряжения, возникающие в упругом полупространстве под действием осесимметричного лучистого потока.— Физика и химия обраб. материалов, 1969, № 3, с. 13—19.
 8. Никифоровский В. С., Серяков В. М. К вопросу о тепловом и напряженном состоянии и разрушении составных тел при нагревании.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн., 1975, № 3, вып. 1, с. 109—114.
 9. Колодко А. Я. Термонапряженное состояние и разрушение горного массива при неравномерном поверхностном нагреве.— Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых, 1983, № 5, с. 37—43.
 10. Германович Л. Н. О напряженном состоянии в окрестности скважины, проходимой огневым способом.— Физ.-техн. проблемы разработки полезн. ископаемых, 1984, № 4, с. 7—16.
 11. Рыкалин Н. Н., Зуев И. В., Углов А. А. Основы электронно-лучевой обработки материалов. М.: Машиностроение, 1978. 240 с.
 12. Германович Л. Н. О температурных напряжениях в упругом полупространстве.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 36—43.
 13. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
 14. Килль И. Д. О термоупругих напряжениях внутри полупространства.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 1, с. 140—144.
 15. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. школа, 1965. 466 с.
 16. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
 17. Германович Л. Н., Килль И. Д. О термонапряжениях в упругом полупространстве.— Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1983, № 3, с. 159—164.
 18. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
 19. Conners G. H., Thompson R. A. A continuum mechanical model for laser — induced fracture in transparent media.— J. Appl. Phys., 1966, v. 37, No. 9, p. 3434—3440.
 20. Наумов К. И. Исследование импульсного лазерного излучения с целью термомеханического разрушения горных пород.— В кн.: Физические и химические процессы горного производства. М.: Изд-е горн. ин-та 1977, с. 115—116.
 21. Шестериков С. А., Юмашева Ю. А. К проблеме терморазрушения при быстром нагреве.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 1, с. 128—135.
 22. Nemat-Nasser S., Horri H. Compression — induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst.— J. Geophys. Res., v. 27, No. 88, p. 6805—6821.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1985