МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1986

УДК 539.3

ИЗОЛИРОВАННАЯ ДИСКЛИНАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ СЖИМАЕМОМ ТЕЛЕ

ЗУБОВ Л. М.

С точки зрения нелинейной теории упругости рассмотрена задача о напряженном состоянии полого кругового цилиндра, возникающем при образовании клиновой дисклинации. Вектор Франка дисклинации и деформации в теле не предполагаются малыми. В случае изотропного сжимаемого материала данная проблема сведена к краевой задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Исследован характер неоднозначности тензоров деформации и дисторсии, а также векторов перемещений и поворотов в двусвязном теле, содержащем прямолинейную дисклинацию. В частном случае полулинейного (гармонического) материала найдено точное решение задачи о дисклинации как для полого, так и для сплошного цилиндра. На основе этого решения установлено, что при нелинейной постановке задачи, в отличие от линейной теории упругости, напряжения остаются ограниченными на оси дисклинации. Проанализировано влияние учета нелинейности на величину энергии рассматриваемого дефекта.

1. Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации упругого тела, R, Φ, Z — цилиндрические координаты в пространстве. Единичные векторы, касательные к координатным линиям в отсчетной конфигурации и в пространстве, обозначим $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\Phi$, $\mathbf{e}_Z$.

Рассмотрим следующую деформацию сплошной среды:

$$R=R(r),\quad \Phi=\varkappa\varphi,\quad Z=z \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ — положительная постоянная.

При $\varkappa>1$ соотношения (1.1) описывают деформацию, возникающую после удаления из кругового полого цилиндра сектора $2\pi\varkappa^{-1}\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ и поворота сечения $\varphi=2\pi\varkappa^{-1}$ вокруг оси цилиндра до совмещения с плоскостью сечения $\varphi=0$. Этот поворот сопровождается радиальными перемещениями точек цилиндра. Если $\varkappa<1$, то в разрезанный полуплоскостью $\varphi=0$ цилиндр вставляется без трения абсолютно твердый клин с углом раствора $2\pi(1-\varkappa)$, что приводит к повороту сечения $\varphi=2\pi$ вокруг оси цилиндра.

Описанную деформацию можно классифицировать как образование в цилиндре клиновой дисклинации [1] с вектором Франка, направленным по оси цилиндра. Отметим, что здесь в отличие от [1] рассматривается не малый, а конечный поворот берегов разреза. Длина вектора Франка равна $2\pi(1-\varkappa^{-1})$ при $\varkappa>1$ и $2\pi(1-\varkappa)$ при $\varkappa<1$.

В случае $\varkappa>1$ имеем: $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi\varkappa^{-1}$, $0\leqslant\Phi\leqslant2\pi$. Поэтому в отсчетной конфигурации материальное тело занимает односвязную область, а в деформированной конфигурации — двусвязную. Если $\varkappa<1$, то $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $0\leqslant\Phi\leqslant2\pi\varkappa$ и тело в отсчетной конфигурации занимает двусвязную область, а в деформированном состоянии — односвязную.

Градиент деформации $\mathbf{C}$, мера деформации Коши — Грина $\mathbf{G}$, тензор искажения $\mathbf{U}$, мера деформации Фингера $\mathbf{F}$ и тензор поворота $\mathbf{A}$, соответствующие преобразованию (1.1), определяются выражениями [2, 3]:

$$\mathbf{C}=R'\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+(\varkappa R/r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z,\qquad R'=dR/dr \tag{1.2}$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T=(R')^2\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+(\varkappa^2R^2/r^2)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{U}=\mathbf{G}^{1/2}=R'\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+(\varkappa R/r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{C}^T\cdot\mathbf{C}=(R')^2\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+(\varkappa^2R^2/r^2)\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi+\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z$$

Определяющее соотношение изотропного сжимаемого упругого материала запишем в форме, предложенной в [4]

$$\mathbf{D}=\alpha_1(s_k)\mathbf{A}+\alpha_2(s_k)\mathbf{C}+\alpha_3(s_k)\mathbf{U}\cdot\mathbf{C} \tag{1.3}$$

$$\alpha_1=\frac{\partial W}{\partial s_1}-2\frac{\partial W}{\partial s_2}+3\frac{\partial W}{\partial s_3},\qquad \alpha_2=2\left(\frac{\partial W}{\partial s_2}-3\frac{\partial W}{\partial s_3}\right)$$

$$\alpha_3=3\partial W/\partial s_3,\ s_k=\operatorname{tr}[(\mathbf{U}-\mathbf{E})^k]\quad(k=1,\ 2,\ 3)$$

Здесь $\mathbf{D}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, W — удельная потенциальная энергия деформации, представленная как симметричная функция главных относительных удлинений. Для деформации вида (1.1) на основании (1.2), (1.3) получим

$$\mathbf{D}=D_{rR}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+D_{\varphi\Phi}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+D_{zZ}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z \tag{1.4}$$

$$D_{rR}=\alpha_1(s_k)+\alpha_2(s_k)R'+\alpha_3(s_k)(R')^2$$

$$D_{\varphi\Phi}=\alpha_1(s_k)+\alpha_2(s_k)\varkappa R/r+\alpha_3(s_k)(\varkappa R/r)^2$$

$$D_{zZ}=\alpha_1(s_k)+\alpha_2(s_k)+\alpha_3(s_k)$$

Здесь в выражения функций $\alpha_m(s_1,\ s_2,\ s_3)$ $(m=1,\ 2,\ 3)$ должны быть подставлены вытекающие из (1.2) соотношения

$$s_1=R'+\varkappa R/r-2,\qquad s_2=(R'-1)^2+(\varkappa R/r-1)^2 \tag{1.5}$$

$$s_3=(R'-1)^3+(\varkappa R/r-1)^3$$

Из (1.4), (1.5) следует, что если принять за независимые переменные лагранжевы координаты r, φ, z, то компоненты тензора Пиолы в дуальном базисе будут зависеть лишь от координаты r. Отсюда вытекает, что при отсутствии массовых сил два из уравнений равновесия в форме [3] тождественно удовлетворяются, а третье имеет вид

$$D_{rR}'+r^{-1}(D_{rR}-\varkappa D_{\varphi\Phi})=0 \tag{1.6}$$

Подстановка (1.4) в (1.6) приводит к обыкновенному нелинейному уравнению второго порядка относительно функции $R(r)$. Граничными условиями для этого уравнения служат соотношения, выражающие отсутствие нагрузки на боковых поверхностях цилиндра $r=a$ и $r=b$ $(a<b)$

$$D_{rR}|_{r=a}=D_{rR}|_{r=b}=0 \tag{1.7}$$

В случае сплошного цилиндра $(a=0)$ первое условие в (1.7) заменяется требованием $R(0)=0$.

Итак, предположения (1.1) позволяют удовлетворить условиям равновесия в задаче о дисклинации путем решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В формулировку этой краевой задачи как параметр входит величина вектора Франка.

Учитывая известное [5] соотношение, связывающее тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ с тензором напряжений Пиолы $(\det\mathbf{C})\mathbf{T}=\mathbf{C}^T\cdot\mathbf{D}$, получим

$$\mathbf{T}=\sigma_R\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+\sigma_\Phi\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi+\sigma_Z\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z \tag{1.8}$$

где σ_R, σ_Φ, σ_Z — физические составляющие тензора напряжений в ортонормированном базисе эйлеровых координат.

2. При анализе поля перемещений, поворотов и деформаций в двусвязном материальном объеме, содержащем дисклинацию, будем рассматривать по отдельности случаи $\varkappa>1$ и $\varkappa<1$.

В первом случае двусвязной является область, занимаемая телом в деформированном состоянии. Некоторые из величин, определяющих деформацию, будут неоднозначными в этой области. Если превратить двусвязную область в односвязную путем проведения разреза плоскостью $\Phi=0$, то эти величины будут претерпевать скачок на поверхности разреза.

Так как векторы $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\Phi$ сохраняют непрерывность при пересечении разреза $\Phi=0$, то мера деформации Фингера, согласно (1.2), будет однозначной функцией в двусвязной области. Однозначными будут также мера деформации Альманзи $\mathbf{F}^{-1}$ и тензор деформации Альманзи $\mathbf{l}={}^1/_2(\mathbf{E}-\mathbf{F}^{-1})$.

При деформации вида (1.1) имеют место соотношения

$$\mathbf{e}_r=\mathbf{e}_R\cos(\varkappa^{-1}-1)\Phi+\mathbf{e}_\Phi\sin(\varkappa^{-1}-1)\Phi \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{e}_\varphi=-\mathbf{e}_R\sin(\varkappa^{-1}-1)\Phi+\mathbf{e}_\Phi\cos(\varkappa^{-1}-1)\Phi$$

На основании (1.2), (2.1) тензор поворота представляется в виде

$$\mathbf{A}=(\mathbf{E}-\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z)\cos\chi+\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z-\mathbf{e}_Z\times\mathbf{E}\sin\chi, \quad \chi=(1-\varkappa^{-1})\Phi \qquad (2.2)$$

где χ — угол поворота главных осей деформации, $\chi\mathbf{e}_Z$ — вектор поворота. Обозначив квадратными скобками скачок функции, будем иметь

$$[\chi]=2\pi(1-\varkappa^{-1}), \qquad [\chi]\equiv\lim_{\Phi\to2\pi-0}\chi-\lim_{\Phi\to+0}\chi \qquad (2.3)$$

Согласно (2.3), величина скачка поля поворотов и тензора поворота одинакова во всех точках плоскости разреза. Отметим, что градиент вектора поворота $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_Z\partial\chi/\partial R+\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_Z\partial\chi/R\partial\Phi$ — однозначная функция в полом цилиндре.

Скачок вектора перемещения $\mathbf{u}=R\mathbf{e}_R-r\mathbf{e}_r$ находится с помощью (2.1): $[\mathbf{u}]=r[\mathbf{e}_R-\mathbf{e}_R\cos2\pi(1-\varkappa^{-1})+\mathbf{e}_\Phi\sin2\pi(1-\varkappa^{-1})]$.

Последнее выражение можно представить формулой конечного поворота [6] (θ — вектор Родрига):

$$[\mathbf{u}]=-\frac{4}{4+\theta\cdot\theta}\theta\times\left(\mathbf{r}+\frac{1}{2}\theta\times\mathbf{r}\right), \quad \theta=-2\mathbf{e}_Z\operatorname{tg}\pi(1-\varkappa^{-1}), \quad \mathbf{r}=r\mathbf{e}_r|_{\Phi=+0} \qquad (2.4)$$

Из (1.2), (2.1) получим

$$\mathbf{G}=\left[(R')^2\cos^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\Phi+\frac{\varkappa^2R^2}{r^2}\sin^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\Phi\right]\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+$$

$$+\left[(R')^2\sin^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\Phi+\frac{\varkappa^2R^2}{r^2}\cos^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\Phi\right]\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi+\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) показывает, что мера деформации Коши не является однозначной функцией в двусвязной области. При этом собственные значения (а следовательно, и инварианты) данного тензора, совпадающие с собственными значениями меры Фингера, однозначны. Неоднозначность тензора $\mathbf{G}$ обусловлена тем, что на разрезе $\Phi=0$ скачок имеет направления его главных осей.

Так как $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{1/2}$, то градиент деформации также претерпевает скачок на плоскости $\Phi=0$, причем величина скачка зависит от r и не является одинаковой во всех точках разреза. То же самое справедливо в отношении обратного тензора $\mathbf{C}^{-1}$ и градиента перемещения $\mathbf{e}_R\partial\mathbf{u}/\partial R+\mathbf{e}_\Phi\partial\mathbf{u}/R\partial\Phi$, называемого также тензором дисторсии [1]. Таким образом, неоднозначность тензора дисторсии при нелинейной постановке задачи о дисклинации имеет более сложный характер по сравнению с линейной теорией упругости, где приращение тензора дисторсии при обходе вокруг линии дисклинации одинаково для всех контуров, охватывающих ось дефекта [1].

Во втором случае ($\varkappa<1$) двусвязной является область, занимаемая телом в отсчетной конфигурации. В этом случае векторы $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ непрерывны при пересечении плоскости $\varphi=0$, поэтому мера деформации Коши и тензор деформаций Коши — Грина $\mathbf{L}={}^1/_2(\mathbf{G}-\mathbf{E})$ будут однозначными функциями в отсчетной конфигурации цилиндра. Скачок поля поворотов и перемещений на разрезе $\varphi=0$ определяется формулами

$$[\chi]=2\pi(\varkappa-1), \qquad [\mathbf{u}]=\frac{4}{4+\theta_1\cdot\theta_1}\theta_1\times\left(\mathbf{R}+\frac{1}{2}\theta_1\times\mathbf{R}\right) \qquad (2.6)$$

$$\theta_1=-2\mathbf{e}_z\operatorname{tg}\pi(1-\varkappa), \qquad \mathbf{R}=R\mathbf{e}_R|_{\varphi=+0}$$

Инварианты мер деформации Фингера и Альманзи непрерывны, а направления их главных осей меняются скачком при переходе через плоскость $\varphi=0$. Характер неоднозначности градиента деформации и тензора дисторсии аналогичен описанному для случая $\varkappa>1$.

3. Для полулинейного (гармонического) материала [4, 5] удельная потенциальная энергия деформации задается выражением

$$W={}^1/_2\lambda s_1{}^2+\mu s_2 \tag{3.1}$$

Из (1.3)–(1.5), (3.1) имеем

$$D_{rR}=\frac{2\mu}{1-2\nu}\left[(1-\nu)R'+\frac{\nu\varkappa R}{r}-1\right],\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{3.2}$$

$$D_{\varphi\Phi}=\frac{2\mu}{1-2\nu}\left[\nu R'+\frac{\varkappa(1-\nu)R}{r}-1\right],\quad D_{zZ}=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\left(R'+\frac{\varkappa R}{r}-2\right)$$

Уравнение равновесия (1.6) для данного материала оказывается линейным и имеет вид

$$R''+R'/r-\varkappa^2R/r^2=1-\varkappa/(1-\nu)r \tag{3.3}$$

Единственным решением краевой задачи (1.7), (3.3) является функция

$$R=b\beta\left[(1-2\nu)M\rho^{\varkappa}+N\rho^{-\varkappa}+\rho\right],\quad \rho=\frac{r}{b},\quad \rho_1=\frac{a}{b} \tag{3.4}$$

$$\beta=\frac{1}{(1-\nu)(1+\varkappa)},\quad M=\frac{1-\rho_1^{\varkappa+1}}{1-\rho_1^{2\varkappa}},\quad N=\frac{\rho_1^{2\varkappa}(1-\rho_1^{1-\varkappa})}{1-\rho_1^{2\varkappa}}$$

Из (3.2), (3.4) получим

$$D_{rR}=2\mu\varkappa\beta\left(M\rho^{\varkappa-1}-N\rho^{-\varkappa-1}-1\right) \tag{3.5}$$

$$D_{\varphi\Phi}=2\mu\varkappa\beta\left(M\rho^{\varkappa-1}+N\rho^{-\varkappa-1}-\varkappa^{-1}\right)$$

$$D_{zZ}=\frac{2\mu\nu}{1-\nu}\left(\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}M\rho^{\varkappa-1}-1\right)$$

Физические составляющие напряжений (истинные напряжения) выражаются с помощью (1.8), (3.4), (3.5).

Если положить $\varkappa=1+\varepsilon$ и линеаризовать решение (3.4), (3.5), (1.8) по параметру ε, т. е. удержать только величины первого порядка относительно ε, то придем к известным [7] выражениям линейной теории упругости для напряжений в цилиндре, содержащем клиновую дисклинацию (в [7] она названа вращательной дисторсией Вольтерра)

$$\sigma_R=\frac{\mu\varepsilon}{1-\nu}\left(\ln\rho-\frac{1-\rho^2}{1-\rho_1{}^2}\frac{\rho_1{}^2}{\rho^2}\ln\rho_1\right) \tag{3.6}$$

$$\sigma_\Phi=\frac{\mu\varepsilon}{1-\nu}\left(\ln\rho+\frac{1+\rho^2}{1-\rho_1{}^2}\frac{\rho_1{}^2}{\rho^2}\ln\rho_1+1\right)$$

$$\sigma_Z=\frac{2\mu\nu\varepsilon}{1-\nu}\left(\frac{1}{2}+\ln\rho+\frac{\rho_1{}^2\ln\rho_1}{1-\rho_1{}^2}\right).$$

Решение для сплошного цилиндра получается из (3.4), (3.5) путем предельного перехода $\rho_1\to0$ и имеет вид

$$R=b\beta\left[(1-2\nu)\rho^{\varkappa}+\rho\right],\quad D_{zz}=2\mu\nu(1-\nu)^{-1}\left[2\varkappa(1+\varkappa)^{-1}\rho^{\varkappa-1}-1\right]$$

$$D_{rR}=2\mu\varkappa\beta\left(\rho^{\varkappa-1}-1\right),\quad D_{\varphi\Phi}=2\mu\beta\left(\varkappa\rho^{\varkappa-1}-1\right) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{L}=\frac{1}{2}\left[(1-2\nu)^2\beta^2\left(\varkappa\rho^{\varkappa-1}+\frac{1}{1-2\nu}\right)^2-1\right]\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\varkappa^2(1-2\nu)^2\beta^2\left(\rho^{\varkappa-1}+\frac{1}{1-2\nu}\right)^2-1\right]\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\Big[1-\frac{(1-\nu)^2(1+\varkappa)^2}{((1-2\nu)\varkappa\rho^{\varkappa-1}+1)^2}\Big]\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+$$
$$+\frac{1}{2}\Big[1-\frac{(1-\nu)^2(1+\varkappa)^2}{\varkappa^2((1-2\nu)\rho^{\varkappa-1}+1)^2}\Big]\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi$$
$$\sigma_R=\frac{2\mu(\rho^{\varkappa-1}-1)}{(1-2\nu)\rho^{\varkappa-1}+1},\quad \sigma_\Phi=\frac{2\mu(\varkappa\rho^{\varkappa-1}-1)}{(1-2\nu)\varkappa\rho^{\varkappa-1}+1}$$
$$\sigma_Z=\frac{2\mu\nu(1-\nu)(1+\varkappa)(2\varkappa\rho^{\varkappa-1}-1-\varkappa)}{[(1-2\nu)\varkappa\rho^{\varkappa-1}+1][(1-2\nu)\rho^{\varkappa-1}+1]\varkappa}$$

Выражения (3.7) можно получить и другим способом, решив уравнение (3.3) при граничных условиях $R(0)=0$, $D_{rR}(b)=0$.

В линейной теории упругости, как показывают формулы (3.6), напряжения для сплошного цилиндра имеют логарифмическую особенность на оси дисклинации, т. е. при $\rho\to 0$.

В [8] задача о клиновой дисклинации в сплошном цилиндре рассмотрена в рамках теории конечных деформаций в предположении несжимаемости материала. Так как в этом случае $R=\varkappa^{-1/2}r$, то инварианты тензоров деформаций постоянны, а напряжения имеют при $\rho\to 0$ логарифмическую особенность [8].

Для (3.7) в случае $\varkappa>1$ деформации и напряжения остаются ограниченными при $\rho\to 0$, т. е. не имеют особенности на оси дисклинации.

Если $\varkappa<1$, то согласно (3.7) компоненты тензора деформаций Коши — Грина и его инварианты неограниченно возрастают при $\rho\to 0$. В частности, локальное относительное изменение объема $\det \mathbf{C}-1$ при приближении к оси дисклинации растет как $\rho^{2(\varkappa-1)}$. Несмотря на это, истинные напряжения σ_R, σ_Φ, σ_Z, как видно из (3.7), остаются ограниченными при $\rho\to 0$ и в случае $\varkappa<1$.

Для малых значений параметра $\varepsilon=\varkappa-1$ линейная теория упругости дает правильное решение задачи о дисклинации во всех точках тела, за исключением прямой $\rho=0$. На самой оси дисклинации линеаризация неприменима. Это объясняется тем, что разложение функции ρ^ε по степеням ε несправедливо при $\rho=0$. По этой причине характер сингулярности деформаций и напряжений при $\rho\to 0$, предсказываемый линейной теорией, неправилен при сколь угодно малой величине вектора Франка.

Потенциальная энергия, приходящаяся на единицу длины цилиндра с дисклинацией, вычисляется на основании (3.1), (3.7)

$$\Pi=\omega\int_0^b Wr\,dr=\frac{\omega\mu b^2(1-\varkappa)^2}{2(1-\nu)(1+\varkappa)^2},\quad \omega=\begin{cases}2\pi & (\varkappa<1)\\ 2\pi\varkappa^{-1} & (\varkappa>1)\end{cases}\tag{3.8}$$

Линейная теория упругости, согласно (3.6), при $\rho_1=0$ дает следующее значение для энергии дисклинации:

$$\Pi={}^1/_4\pi\mu b^2\varepsilon^2/(1-\nu)\tag{3.9}$$

Сравнивая (3.8) и (3.9), видно, что при $\varkappa>1$ линейная теория упругости дает завышенное значение для энергии изолированной дисклинации, а при $\varkappa<1$ — заниженное.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вит Р., Де* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
2. *Зубов Л. М.* Универсальные квазистатические деформации для изотропных несжимаемых тел с памятью.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 57–62.
3. *Зубов Л. М.* Полуобратный метод в квазистатических задачах нелинейной термовязкоупругости.– Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 3, с. 556–559.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости для полулинейного материала.– ПММ, 1968, т. 32, вып. 6, с. 1053–1069.
5. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. *Весоловский З.* Динамические задачи нелинейной теории упругости. Киев: Наук. думка, 1981. 216 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 26.XII.1983