Разрешив уравнения (1.5) относительно $\omega_i^\bullet$, получим

$$\omega_1^\bullet=[(A_2-A_3)\omega_2\omega_3-A_3\Omega_3\omega_2+A_2\Omega_2\omega_3+F\gamma_1]/A_1 \quad \{1\ 2\ 3\} \tag{2.1}$$

$$F=\frac{1}{f}\left[\frac{(A_2-A_3)\omega_2\omega_3-A_3\Omega_3\omega_2+A_2\Omega_2\omega_3}{A_1}\gamma_1+\right. \tag{2.2}$$

$$\left.+\frac{(A_3-A_1)\omega_3\omega_1-A_1\Omega_1\omega_3+A_3\Omega_3\omega_1}{A_2}\gamma_2+\frac{(A_1-A_2)\omega_1\omega_2-A_2\Omega_2\omega_1+A_1\Omega_1\omega_2}{A_3}\gamma_3\right]$$

$$f=1-\gamma_1^2/A_1-\gamma_2^2/A_2-\gamma_3^2/A_3 \tag{2.3}$$

Множитель μ – функция переменных ω_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{3}\partial(\mu\omega_i^\bullet)/\partial\omega_i+\partial(\mu\gamma_i^\bullet)/\partial\gamma_i=0 \tag{2.4}$$

где $\omega_i^\bullet$ и $\gamma_i^\bullet$ – правые части уравнений (2.1) и (1.4) соответственно.

Учитывая (1.4), уравнение (2.4) можно преобразовать к форме

$$\mu^\bullet+\mu\left(\frac{\partial\omega_1^\bullet}{\partial\omega_1}+\frac{\partial\omega_2^\bullet}{\partial\omega_2}+\frac{\partial\omega_3^\bullet}{\partial\omega_3}\right)=0 \tag{2.5}$$

Подставив в выражение, стоящее в круглых скобках, правые части уравнений (2.1), произведя необходимые дифференцирования и упростив получающиеся выражения с использованием обозначений (2.2), (2.3), получим уравнение (2.5) в виде

$$f\mu^\bullet+\mu\left(\frac{\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3}{A_1}\gamma_1+\frac{\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1}{A_2}\gamma_2+\frac{\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2}{A_3}\gamma_3\right)=0$$

Учитывая теперь (1.4) и (2.3), имеем окончательно $2f\mu^\bullet-\mu f^\bullet=0$. Интегрируя это уравнение, найдем $\mu=cf^{1/2}$ (c – произвольная постоянная).

Таким образом показано, что интегрирование уравнений (1.4), (1.5) сводится к квадратурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Бобылев Д. К.* О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения.– Матем. сб., 1982, т. 16, вып. 3, с. 544–581.
3. *Жуковский Н. Е.* О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева.– Собр. соч. М.– Л.: Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 275–289.
4. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости.– Собр. соч. М.– Л.: Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 57–75.
5. *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости.– Собр. соч., М.– Л. Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 76–101.
6. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.– Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.V.1984

УДК 534.014

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

ЧЕРКАСОВ И. Д.

С применением стохастической функции Ляпунова найдены условия, при которых устойчива стохастическая модель маховых колебаний лопасти винта вертолета с учетом горизонтальных турбулентных пульсаций скорости воздуха. Модель, взятая из [1], имеет вид

$$x^{\bullet\bullet}+[\Omega^2(1+r\sin\nu t)x+x^\bullet(2\delta+bx^2+cxx^\bullet+\beta x^{\bullet 2})]+\Omega^2x\xi(t)=0$$

1. Пусть $w(t)$ – винеровский случайный процесс, $\xi(t)$ – случайный процесс типа белого шума с единичной интенсивностью, $dw(t)=\xi(t)dt$ – стохастический дифференциал винеровского стандартного сепарабельного процесса (берется непрерывная модификация этого процесса). Сохраняя обозначения статьи [1], рассмотрим случайный процесс, порожденный маховыми колебаниями лопасти винта вертолета. Если ввести дополнительно следующие обозначения: $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=x^\bullet(t)$, $w_t=w(t)$, то рассматриваемую стохастическую систему можно будет записать в виде двумерного стохастического уравнения Ито:

$$dx_1=x_2dt,\quad dx_2=-[\Omega^2(1+r\cdot\sin\nu t)x_1+(2\delta+bx_1^2+cx_1x_2+\beta x_2^2)x_2]dt-\Omega^2x_1dw_t \tag{1}$$

Задача заключается в том, чтобы установить область стохастической устойчивости этой системы (в слабом смысле). При решении этой задачи применяются результаты из [2]. В публикуемой работе рассмотрен также вопрос об устойчивости системы в сильном смысле и об асимптотической слабой устойчивости по вероятности системы (1) при отсутствии периодического возмущения.

Отметим, что исследование системы (1) осложняется фактом ее нелинейности. Однако современные механические системы чаще всего являются нелинейными, для них решаются различные задачи оптимизации и управления [1]. Управляемость и прочность конструкций летательных аппаратов находятся в тесной связи с устойчивостью их функционирования. Поэтому в последнее время стали появляться работы, посвященные устойчивости таких систем и основанные на результатах типа [3]. Важное значение имеют публикации [4, 5], в которых рассмотрена линейная стохастическая модель данного класса.

2. Обозначим через $L(t,\ \mathbf{x})$ производящий дифференциальный оператор двумерного случайного процесса $\mathbf{X}(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$, управляемого системой (1):

$$L(t,\ \mathbf{x})=\partial_t+x_2\partial_1-[\Omega^2(1+r\sin\nu t)x_1+$$
$$+(2\delta+bx_1^2+cx_1x_2+\beta x_2^2)x_2]\partial_2+{}^1/_2\Omega^4x_1^2\partial_{22} \tag{2}$$
$$\partial_t=\partial/\partial t,\ \partial_i=\partial/\partial x_i\ (i=1,\ 2),\ \partial_{22}=(\partial_2)^2,\ \mathbf{x}=(x_1,\ x_2)$$

Для применения теоремы 4.1 из [2] построим функцию $V(t,\ \mathbf{x})$, такую, что при всех $t\geqslant0$, $\mathbf{x}\in R^2$, $R=(-\infty,\ \infty)$:

$$V(t,\ \mathbf{x})\geqslant0;\ V(t,\ 0)=0,\ V(t,\ \mathbf{x})\neq0,\ |\mathbf{x}|=0 \tag{3}$$
$$L(t,\mathbf{x})V(t,\mathbf{x})\leqslant0,\qquad \inf_{|\mathbf{x}|>\rho}V(t,\mathbf{x})\to\infty\qquad(\rho\to\infty)$$

Введем для краткости обозначения

$$r_0=\max\{{}^1/_4[\Omega^2(1-|r|)-1]^2,\ {}^1/_4[\Omega^2(1+|r|)-1]^2\}$$
$$v_0=\delta-{}^1/_4\Omega^4-\sqrt{r_0+(\delta+{}^1/_4\Omega^4)^2},\quad C=\text{const}>0$$
$$\omega(t)=C\exp[2v_0(t-t_0)],\quad V(t,\ \mathbf{x})=\omega(t)(x_1^2+x_2^2)\equiv\omega(t)|\mathbf{x}|^2\ (t\geqslant t_0)$$

Функция $V(t,\ \mathbf{x})$ удовлетворяет 1–3-му и 5-му соотношениям из (3) очевидным образом. Для доказательства 4-го соотношения найдем производные этой функции

$$\partial_tV=2v_0\omega(t)|\mathbf{x}|^2,\quad \partial_kV(t,\ \mathbf{x})=2\omega(t)x_k\ (k=1,\ 2)$$
$$\partial_{22}V=2\omega(t),\quad L(t,\ \mathbf{x})V=2\omega(t)\{(v_0+{}^1/_2\Omega^4)x_1^2+$$
$$+[1-\Omega^2(1+r\sin\nu t)]x_1x_2+(v_0-2\delta)x_2^2-$$
$$-(bx_1^2+cx_1x_2+\beta x_2^2)x_2^2\}$$

В дальнейшем считаются выполненными условия

$$b\geqslant0,\quad 4b\beta-c^2\geqslant0,\quad \Omega^2>0,\quad \beta\geqslant0 \tag{4}$$

В результате преобразований получаем следующее неравенство:

$$L(t,\ \mathbf{x})V\leqslant-2\omega(t)\{-(v_0+0{,}5\Omega^4)x_1^2+(2\delta-v_0)x_2^2+[\Omega^2(1+r\sin\nu t)-1]x_1x_2\} \tag{5}$$

Так как $v_0\leqslant-0{,}5\Omega^4$, то $-(v_0+0{,}5\Omega^4)\geqslant0$. Рассмотрим квадратичную форму в фигурных скобках равенства (5). Определитель второго порядка, соответствующий этой форме, равен

$$\Delta=\begin{vmatrix}-(v_0+0{,}5\Omega^4) & (1/2)[\Omega^2(1+r\sin\nu t)-1]\\ (1/2)[\Omega^2(1+r\sin\nu t)-1] & (2\delta-v_0)\end{vmatrix}$$

Отсюда можно получить следующее выражение: $\Delta=r_0-(1/4)[\Omega^2(1+r\sin\nu t)-1]^2\geqslant0$, т. е. выражение в фигурных скобках равенства (5) неотрицательно. Значит, при условиях (4) функция $V(t,\ \mathbf{x})$ удовлетворяет всем условиям (3). Поэтому по теореме 4.1 из [2] заключаем, что для любых начальных данных

$$x_1(t_0)=x_{10},\quad x_2(t_0)=x_{20}\quad(t_0\geqslant0) \tag{6}$$

существует единственный диффузионный процесс $\mathbf{X}(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$, удовлетворяющий системе (1), начальным условиям (6) и являющийся марковским процессом. Кроме того, по той же теореме

$$\omega(t)M|\mathbf{X}(t)|^2/C\leqslant x_{10}^2+x_{20}^2\equiv|\mathbf{x}_0|^2 \tag{7}$$

---

[1] См.: *Черкасов И. Д.* Алгоритм вычисления оптимального управления одной нелинейной стохастической системой.– В кн.: Оптимальное управление в механических системах. Тез. 3-й Всес. конф. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1979, т. 2, с. 231–232.

Это означает p-устойчивость процесса $\mathbf{X}(t)$ при $p=2$ (а следовательно, и при любом $p \in (0,\ 2]$). С применением неравенства Чебышева получаем слабую устойчивость по вероятности

$$P_{\mathbf{x}_0}\{|\mathbf{X}(t)| \leqslant \varepsilon\} \to 1, \quad |\mathbf{x}_0| \to 0 \quad (\varepsilon = \mathrm{const} > 0) \tag{8}$$

3. В случае $r=0$ процесс $\mathbf{X}(t)$ однороден по времени и его производящий дифференциальный оператор будет $A(\mathbf{x}) = x_2\partial_1 - [\Omega^2 x_1 + cx_1x_2^2 + x_2(2\delta + bx_1^2 + \beta x_2^2)]\partial_2 + (1/2)\Omega^4 x_1^2 \partial_{22}$. Исследуем процесс $\mathbf{X}(t)$ на устойчивость при условиях

$$\Omega=1, \quad \beta \leqslant 0, \quad c^2 \leqslant 4b\beta, \quad \delta < \delta^*, \quad b \leqslant 0, \quad \delta^* = -(\sqrt{0{,}5} - 0{,}5)^2 \tag{9}$$

Возьмем отрицательное число α и функцию $V(\mathbf{x})$ такими: $\alpha \in [2\delta + 0{,}5 - 2(-\delta)^{1/2},\ \alpha^*)$, $V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{2\alpha}$, $\alpha^* = \min(0, 2\delta + 0{,}5 + 2\sqrt{-\delta})$. Найдем производные функции $V(\mathbf{x})$:

$$\partial_k V = 2\alpha x_k |\mathbf{x}|^{2(\alpha-1)} \quad (k=1,\ 2), \quad \partial_{22} V = 2\alpha(|\mathbf{x}|^2)^{\alpha-2}[x_1^2 + (2\alpha - 1)x_2^2]$$

Применим оператор $A(\mathbf{x})$ к функции $V(\mathbf{x})$. В результате получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered} A(\mathbf{x})V = 2\alpha(|\mathbf{x}|^2)^{\alpha-2} J(\mathbf{x}) \\ J(\mathbf{x}) \geqslant 0{,}5x_1^4 + (\alpha - 0{,}5 - 2\delta)x_1^2x_2^2 - 2\delta x_2^4 \\ J(\mathbf{x}) = 0{,}5x_1^4 + (\alpha - 0{,}5 - 2\delta)x_1^2x_2^2 - 2\delta x_2^4 - \\ -[bx_1^4 + cx_1x_2|\mathbf{x}|^2 + (b+\beta)x_1^2x_2^2 + \beta x_2^4]x_2^2 \end{gathered} \tag{10}$$

Найдем определитель, соответствующий квадратичной форме, находящейся справа в (10):

$$\Delta(\alpha,\ \delta) = -(1/4)[\alpha^2 - (4\delta+1)\alpha + 1/4 + 6\delta + 4\delta^2]$$

Наименьший корень этого квадратичного трехчлена относительно α при $\delta \equiv -z^2$ равен $\alpha_1(\delta) = 2\delta + 0{,}5 - 2\sqrt{-\delta} = -2|z|^2 + 0{,}5 - 2|z|$. Наибольший корень этого трехчлена от $|z|$ есть $z_2 = (0{,}5)^{1/2} - 0{,}5$, поэтому $\alpha_1(\delta) < 0$ при $z > z_2$, $\delta < \delta^*$. Так как $\alpha > \alpha_1(\delta)$, а наибольший корень трехчлена $\Delta(\alpha,\ \delta)$ относительно α равен $\alpha_2(\delta) = 2\delta + 0{,}5 + 2(-\delta)^{1/2}$, то при $\alpha \in [\alpha_1(\delta),\ \alpha^*) \subset [\alpha_1(\delta),\ \alpha_2(\delta)]$ имеем $\Delta(\alpha,\ \delta) \geqslant 0$.

В результате получаем, что форма (10) неотрицательна, $J(\mathbf{x}) \geqslant 0$, т. е. при условии (9) существует число $\alpha \in [\alpha_1(\delta),\ \alpha^*)$, такое, что при введенных обозначениях $V(\mathbf{x}) \to \infty$ $(|\mathbf{x}| \to 0)$, $A(\mathbf{x})V(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $V(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Применяя теорему 2.3 из [3], заключаем, что стохастическая система (1) неустойчива по вероятности в сильном смысле.

Отметим, что при $r=0<r_0$, $(1/4)\Omega^2 < \delta$ можно доказать асимптотическую слабую устойчивость по вероятности системы (1) при условии (4).

В качестве физической интерпретации полученных результатов можно отметить следующее. При условиях (4) малые отклонения лопасти винта от нормального положения при малых скоростях этих отклонений в некоторый момент времени t_0 вероятнее всего с течением времени $t > t_0$ погашаются устойчивостью функционирования рассматриваемого винта вертолета (в рабочем режиме).

Неустойчивость по вероятности в сильном смысле системы (1) при $r=0$ означает то, что при отсутствии периодического возмущения и при условиях (9) малые начальные отклонения от нормального вращения винта с течением времени могут и не затухнуть. В целях физического обоснования добавим, что если выражение $bx^2 + cx\dot{x} + \beta\dot{x}^2$, создающее нелинейность функционирования системы, положительно определено, т. е. выполнено условие (4), то система функционирует примерно как линейная, т. е. она слабо устойчива. В противном случае, т. е. при условиях (9), устойчивость в сильном смысле иногда (например, при $r=0$) может быть нарушена.

4. При больших скоростях вращения лопасти винта вертолета, т. е. при $\Omega > 1$, рассмотрение случая $r=0$ усложняется. Для этого введем функцию Ляпунова вида

$$V(\mathbf{x}) = (x_1^2 + \Omega^{-2}x_2^2)^\alpha \tag{11}$$

и вычислим производные, входящие в производящий дифференциальный оператор. Тогда получим $A(\mathbf{x})V(\mathbf{x}) = 2\alpha(x_1^2 + \Omega^{-2}x_2^2)^{\alpha-2}\{x_1x_2(x_1^2 + \Omega^{-2}x_2^2) - \Omega^{-2}x_2(x_1^2 + \Omega^{-2}x_2^2) \cdot [\Omega^2 x^1 + x_2(2\delta + bx_1^2 + cx_1x_2 + \beta x_2^2)] + 0{,}5\Omega^2 x_1^2[x_1^2 + (2\alpha - 1)x_2^2/\Omega^2]\}$. Последниее выражение, заключенное в фигурные скобки, при выполнении условий (9), относящихся к b, c, β, будет не меньше выражения

$$J(\mathbf{x}) = 0{,}5x_1^4 + [(1/2)(1-4\delta)/\Omega^2 + \alpha - 1]x_1^2x_2^2 - 2\delta x_2^4/\Omega^4 \tag{12}$$

Найдем условия, обеспечивающие неотрицательную определенность этой квадратичной формы (относительно x_1^2 и x_2^2):

$$-\frac{\delta}{\Omega^4} - \frac{1}{4}\left(1 - \alpha - \frac{1-4\delta}{2\Omega^2}\right)^2 \geqslant 0, \qquad \frac{-2\sqrt{-\delta}}{\Omega^2} \leqslant 1 - \alpha - \frac{1-4\delta}{2\Omega^2} \leqslant \frac{2\sqrt{-\delta}}{\Omega^2} \tag{13}$$

Если ввести обозначения $\delta^* = -(\Omega(0{,}5)^{1/2} - 0{,}5)^2$, $\alpha^* = \min(0, 1 + (2\Omega^2)^{-1}\{4[\delta + (-\delta)^{1/2}] - 1\})$, то при $\delta < \delta^*$, $1 + (2\Omega^2)^{-1}[4(\delta - |\delta|^{1/2}) - 1] \leqslant \alpha < \alpha^*$ соотношение (13) будет выполнено. Значит, форма (12) будет неотрицательной, а функция (11) будет стохастической функцией Ляпунова, т. е. при $\Omega > 1$ условия (9) дают неустойчивость в сильном смысле.

Пусть $\Omega=10$, $r=0,5$, $\nu=1$, $\delta=0,2$, $b=3$, $c=2$, $\beta=2,5$, $t_0=0$. Требуется исследовать систему на устойчивость. Для анализа модели на слабую устойчивость вычислим дискриминант квадратичной формы, определяющей нелинейность системы: $c^2-4b\beta=-26<0$. Таким образом, условия (4) выполнены и система слабо устойчива по вероятности. Найдем стохастическую функцию Ляпунова: $\alpha_1=600,25$, $\alpha_2=5550,25=r_0$, $v_0=-5001,1$, $C=\text{const}>0$, $V(t, \mathrm{x})=C(x_1^2+x_2^2)\exp(-10002,2t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг М. Ф., Исиков Н. Е., Модель Р.* Колебания системы с кубически нелинейным демпфированием при одновременном периодическом и случайном параметрическом возбуждении.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 22–24.
2. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
3. *Хасьминский Р. З.* Об устойчивости траекторий марковских процессов.– ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с. 1025–1032.
4. *Lin Y. K., Fujimori Y., Ariaratnam S. T.* Rotor blade stability in turbulent flows. Pt 1.– AIAA Journal, 1979, v. 17, N 6, p. 545–552.
5. *Fujimori Y., Lin Y. K., Ariaratnam S. T.* Rotor blade stability in turbulent flows. Pt 2.– AIAA Journal, 1979, v. 17, N 7, p. 673–678.

Саратов

Поступила в редакцию
20.IX.1984