УДК 531.38

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ШАРА С МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

МАРКЕЕВ А. П.

Исследуется задача о качении шара по неподвижной горизонтальной плоскости; предполагается, что шар имеет многосвязную полость с идеальной жидкостью, совершающей безвихревое движение. Показано, что решение задачи может быть сведено к квадратурам.

1. Рассмотрим движение без скольжения шара по неподвижной горизонтальной плоскости. Шар содержит многосвязную полость, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение. Центр тяжести системы считаем совпадающим с геометрическим центром шара.

Движение можно описать при помощи следующих двенадцати дифференциальных уравнений:

$$A_{*1}\omega_1^{\boldsymbol{\cdot}}+(A_{*3}-A_{*2})\omega_2\omega_3+k_3\omega_2-k_2\omega_3=M_1 \tag{1.1}$$

$$m(v_1^{\boldsymbol{\cdot}}+\omega_2v_3-\omega_3v_2)=R_1 \tag{1.2}$$

$$v_1+\rho(\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3)=0 \tag{1.3}$$

$$\gamma_1^{\boldsymbol{\cdot}}=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3 \quad \{1\ 2\ 3\} \tag{1.4}$$

Невыписанные восемь уравнений получаются из уравнений (1.1) – (1.4) круговой перестановкой индексов, указанных в фигурной скобке.

В (1.1) – (1.4) m – сумма масс твердого тела и жидкости, ρ – радиус шара, A_{*i} – момент инерции преобразованного тела для центра O шара, равный сумме момента инерции твердого тела и эквивалентного тела [1] относительно главной центральной оси инерции системы Ox_i. Через ω_i, v_i, γ_i, k_i, M_i и R_i в (1.1) – (1.4) обозначены проекции на ось Ox_i следующих векторов: угловой скорости тела; скорости центра тяжести системы; единичного вектора, направленного по вертикали вверх; момента количества циклического движения жидкости; главного момента и главного вектора внешних сил, представляющих собой силу тяжести и реакцию плоскости.

Уравнения (1.1) – (1.4) имеют ту же форму, что и уравнения движения твердого тела с ротором. При специальных предположениях о геометрии масс системы, а именно для случая полого шара с ротором внутри, задача проинтегрирована в [2]. Упрощенный вариант той же задачи изучен в [3]. Для случая однородного тела вращения с ротором, ось которого направлена вдоль оси симметрии, задача сведена к квадратурам в [4]. Если начальное движение жидкости отсутствует, то в уравнениях (1.1) – (1.4) $k_i=0$ и с математической точки зрения рассматриваемая задача сводится к задаче о качении неоднородного шара по плоскости, проинтегрированной в [5].

Цель данной работы состоит в доказательстве интегрируемости системы (1.1) – (1.4) при любом тензоре инерции преобразованного тела и произвольных значениях величин k_i.

В связанной с телом системе координат $Ox_1x_2x_3$ координаты x_i точки касания тела и плоскости будут равны $-\rho\gamma_i$ $(i=1, 2, 3)$. Используя уравнения движения центра тяжести (1.2) и условие отсутствия скольжения (1.3), можно реакцию плоскости исключить из (1.1). В результате получим уравнения

$$A_1\omega_1^{\boldsymbol{\cdot}}+(A_3-A_2)\omega_2\omega_3+A_3\Omega_3\omega_2-A_2\Omega_2\omega_3=\gamma_1(\omega_1^{\boldsymbol{\cdot}}\gamma_1+\omega_2^{\boldsymbol{\cdot}}\gamma_2+\omega_3^{\boldsymbol{\cdot}}\gamma_3) \quad \{1\ 2\ 3\} \tag{1.5}$$

$$A_i=A_{*i}/(m\rho^2)+1, \quad \Omega_i=k_i/(A_{*i}+m\rho^2) \quad (i=1, 2, 3)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) образуют замкнутую систему, описывающую движение шара относительно центра тяжести. Если она проинтегрирована, то траектория центра шара и реакция плоскости находятся из (1.3) и (1.2) при помощи квадратур. Ниже показано, что система уравнений (1.4), (1.5) также сводится к квадратурам.

2. Уравнения (1.4), (1.5) имеют интеграл энергии

$$A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2-\omega_n^2=\mathrm{const} \quad (\omega_n=\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2+\omega_3\gamma_3)$$

Интегралами будет также величина вектора кинетического момента системы шар – жидкость относительно точки касания шара и плоскости

$$[A_1(\omega_1+\Omega_1)-\omega_n\gamma_1]^2+[A_2(\omega_2+\Omega_2)-\omega_n\gamma_2]^2+[A_3(\omega_3+\Omega_3)-\omega_n\gamma_3]^2=\mathrm{const}$$

и проекция этого вектора на вертикаль

$$A_1(\omega_1+\Omega_1)\gamma_1+A_2(\omega_2+\Omega_2)\gamma_2+A_3(\omega_3+\Omega_3)\gamma_3-\omega_n=\mathrm{const}$$

Кроме того, существует геометрический интеграл $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$. Указанных четырех интегралов достаточно, чтобы интегрирование системы (1.4), (1.5) можно было свести к квадратурам. Как и в [5], для доказательства воспользуемся теорией множителя Якоби [6]. Согласно этой теории, для доказательства сводимости интегрирования системы (1.4), (1.5) к квадратурам достаточно найти последний множитель Якоби μ.

Разрешив уравнения (1.5) относительно $\omega_i^{\bullet}$, получим

$$\omega_1^{\bullet}=[(A_2-A_3)\omega_2\omega_3-A_3\Omega_3\omega_2+A_2\Omega_2\omega_3+F\gamma_1]/A_1 \quad \{1\ 2\ 3\} \tag{2.1}$$

$$F=\frac{1}{f}\left[\frac{(A_2-A_3)\omega_2\omega_3-A_3\Omega_3\omega_2+A_2\Omega_2\omega_3}{A_1}\gamma_1+\right. \tag{2.2}$$

$$\left.+\frac{(A_3-A_1)\omega_3\omega_1-A_1\Omega_1\omega_3+A_3\Omega_3\omega_1}{A_2}\gamma_2+\frac{(A_1-A_2)\omega_1\omega_2-A_2\Omega_2\omega_1+A_1\Omega_1\omega_2}{A_3}\gamma_3\right]$$

$$f=1-\gamma_1^2/A_1-\gamma_2^2/A_2-\gamma_3^2/A_3 \tag{2.3}$$

Множитель μ – функция переменных ω_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{3}\partial(\mu\omega_i^{\bullet})/\partial\omega_i+\partial(\mu\gamma_i^{\bullet})/\partial\gamma_i=0 \tag{2.4}$$

где $\omega_i^{\bullet}$ и $\gamma_i^{\bullet}$ – правые части уравнений (2.1) и (1.4) соответственно.

Учитывая (1.4), уравнение (2.4) можно преобразовать к форме

$$\mu^{\bullet}+\mu\left(\frac{\partial\omega_1^{\bullet}}{\partial\omega_1}+\frac{\partial\omega_2^{\bullet}}{\partial\omega_2}+\frac{\partial\omega_3^{\bullet}}{\partial\omega_3}\right)=0 \tag{2.5}$$

Подставив в выражение, стоящее в круглых скобках, правые части уравнений (2.1), произведя необходимые дифференцирования и упростив получающиеся выражения с использованием обозначений (2.2), (2.3), получим уравнение (2.5) в виде

$$f\mu^{\bullet}+\mu\left(\frac{\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3}{A_1}\gamma_1+\frac{\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1}{A_2}\gamma_2+\frac{\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2}{A_3}\gamma_3\right)=0$$

Учитывая теперь (1.4) и (2.3), имеем окончательно $2f\mu^{\bullet}-\mu f^{\bullet}=0$. Интегрируя это уравнение, найдем $\mu=cf^{1/2}$ (c – произвольная постоянная).

Таким образом показано, что интегрирование уравнений (1.4), (1.5) сводится к квадратурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Бобылев Д. К.* О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения.– Матем. сб., 1982, т. 16, вып. 3, с. 544–581.
3. *Жуковский Н. Е.* О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева.– Собр. соч. М.– Л.: Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 275–289.
4. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости.– Собр. соч. М.– Л.: Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 57–75.
5. *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости.– Собр. соч., М.– Л. Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 76–101.
6. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.– Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

Москва — Поступила в редакцию 7.V.1984

УДК 534.014

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

ЧЕРКАСОВ И. Д.

С применением стохастической функции Ляпунова найдены условия, при которых устойчива стохастическая модель маховых колебаний лопасти винта вертолета с учетом горизонтальных турбулентных пульсаций скорости воздуха. Модель, взятая из [1], имеет вид

$$x^{\bullet\bullet}+[\Omega^2(1+r\sin\nu t)x+x^{\bullet}(2\delta+bx^2+cxx^{\bullet}+\beta x^{\bullet 2})]+\Omega^2x\xi(t)=0$$

1. Пусть $w(t)$ – винеровский случайный процесс, $\xi(t)$ – случайный процесс типа белого шума с единичной интенсивностью, $dw(t)=\xi(t)dt$ – стохастический дифференциал винеровского стандартного сепарабельного процесса (берется непрерывная модификация этого процесса). Сохраняя обозначения статьи [1], рассмотрим случайный процесс, порожденный маховыми колебаниями лопасти винта вертолета. Если ввести дополнительно следующие обозначения: $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=x^{\bullet}(t)$, $w_t=w(t)$, то рассматриваемую стохастическую систему можно будет записать в виде двумерного стохастического уравнения Ито:

$$dx_1=x_2dt,\ dx_2=-[\Omega^2(1+r\cdot\sin\nu t)x_1+(2\delta+bx_1^2+cx_1x_2+\beta x_2^2)x_2]dt-\Omega^2x_1dw_t \tag{1}$$