

УДК 531.8

К ТЕОРИИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ УДАРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

КРУПЕНИН В. Л.

В разработанной к настоящему времени теории виброударных систем [1, 2], как правило, основным элементом, в котором происходит удар, является традиционная ударная пара. При этом описывающая ударное взаимодействие нелинейность оказывается локализованной в пространстве. Между тем при изучении динамики разнообразных машин и конструкций оказывается принципиальным рассмотрение соударений, происходящих не в точках, а в пространственно протяженных элементах; нелинейность, описывающая удар, уже не носит локальный характер, поэтому необходимо принимать во внимание волновые процессы, проходящие в самой ударной паре.

Исследование нелинейных волновых явлений в подобных системах начато в [3, 4]. Математические аспекты проблемы рассмотрены, например, в [5].

В публикуемой работе приводится описание гипотезы мгновенного удара, происходящего в ударных элементах, составленных из струн и абсолютно жестких упругих ограничителей. Проводимый анализ основан на обобщении ряда методов теории виброударных систем [1, 6–8] на системы с распределенными ударами. Получены аналитические решения краевых задач и выделены различные типы волн, реализующиеся в рассматриваемых системах. Изучены некоторые механические эффекты, присущие виброударным системам с распределенными ударными элементами. В заключительной части работы показано, как полученные результаты могут быть распространены на неконсервативный случай.

1. Распределенные ударные элементы. Примеры изучаемых далее объектов даны на фиг. 1. Во всех случаях рассмотрены взаимодействия струн с неподвижными ограничителями. На фиг. 1, *a* показана бесконечная струна, установленная на упругом основании; поперечные смещения струны ограничивает односторонний ограничитель, установленный с зазором $\Delta > 0$. На фиг. 1, *б* имеем симметричную систему, состоящую из заземленной с обоих концов струны и симметрично установленных ограничителей. Несимметричные аналоги этой системы даны на фиг. 1, *в*, *г*, при этом на фиг. 1, *г* струна нагружена еще равномерно распределенной по всей длине постоянной силой P . Вообще говоря, ограничители не обязательно должны быть прямыми. На фиг. 1, *д* показана струна, имеющая ограничитель, профиль которого описывается гладкой функцией $\Delta(x)$. Так же могут быть рассмотрены, например, кольцевые зазоры. Решения в основном строятся для систем фиг. 1, *a–г*.

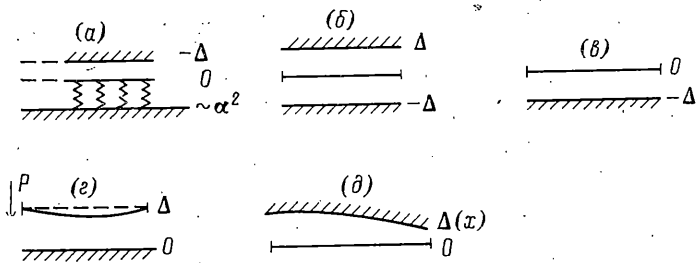
Распределенным ударным элементом будем называть систему, состоящую из струны конечной или бесконечной длины и одного или двух жестких ограничителей, расположенных вдоль всего протяжения струны и ограничивающих ее поперечное смещение. Волновые процессы в распределенном ударном элементе могут быть описаны следующим образом.

Пусть поперечное смещение струны в сечении x и в момент времени t есть $u(x, t)$. Динамику системы будем задавать при помощи линейного уравнения движения вида¹:

$$\square u + \alpha^2 u = Du, \quad (1.1)$$

где \square — даламбертиан, α — параметр (для всех систем фиг. 1, кроме системы фиг. 1, *a*, $\alpha = 0$); оператор D описывает неконсервативные силы. Для

¹ Не ограничивая общности [9], везде полагаем, что линейная плотность и сила натяжения струны равны единице.



Фиг. 1

системы фиг. 1, *г* в левой части (1.1) фигурирует еще равномерно распределенная постоянная сила P .

В зависимости от специфики задачи независимые переменные x и t изменяются на заранее заданных промежутках. К уравнению (1.1) добавляются стандартно ставящиеся линейные граничные и начальные условия, которые запишем в общем случае в виде

$$\Gamma u=0, Nu=0 \quad (1.2)$$

Ударное взаимодействие зададим введением неустойчивой связи и гипотезы удара. Будем считать, что при всех x и t , при которых определяется функция $u(x, t)$, связь задается неравенством

$$\Delta_1(x) \leq u(x, t) \leq \Delta_2(x) \quad (1.3)$$

где $\Delta_{1,2}(x)$ — гладкие функции. Предполагается, что при выполнении в (1.3) неравенства функция $u(x, t)$ удовлетворяет (1.1)–(1.2), а в случае, если в точке (x_0, t_0) реализовано равенство и система вышла на связь, функция $u(x, t)$ удовлетворяет гипотезе удара Y , согласно которой в каждой такой точке $u(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных и, кроме того

$$u_t(x_0, t_0-0) = -u_t(x_0, t_0+0) \neq 0 \quad (1.4)$$

$$u_x(x_0-0, t_0) = -u_x(x_0+0, t_0) \neq 0 \quad (1.5)$$

где индексация по независимой переменной обозначает частное дифференцирование. Условие (1.4) выражает мгновенное изменение знака скорости в точке удара, (1.5) — разрыв производной профиля волны.

Условия удара в распределенном элементе (1.3)–(1.5) можно внести в уравнение движения (1.1) как при рассмотрении традиционных ударных пар [1]. Так можно записать

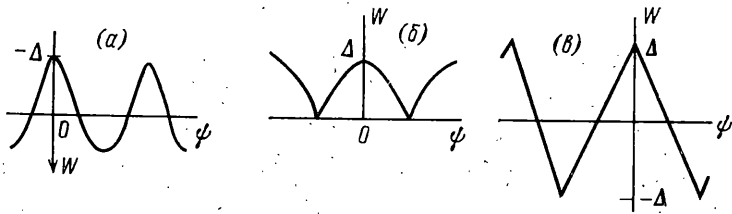
$$\square u + \alpha^2 u = \mathbf{D}u - \Phi(u) \quad (1.6)$$

где $\Phi(u)$ — распределение ударных сил, выражаемое через δ -функции Дирака (см. дальше).

Выписанные соотношения (1.1)–(1.5), или (1.6), (1.2), (1.3), и определяют волновые процессы, происходящие в распределенных ударных элементах. Уравнение типа (1.6) описывает эти элементы и в случае, когда удар предполагается немгновенным; функция $\Phi(u)$ при этом непрерывна (см. [3]).

2. Периодические волны. Пусть в уравнении (1.6) $\mathbf{D}=0$, условия (1.2) отсутствуют и $-\infty < x < \infty$. Рассмотрим периодические волновые пакеты, реализующиеся в системах рассматриваемого вида. Чтобы найти решение в виде стационарных бегущих волн вида $u(x, t) = W(\psi)$, $\psi = kx - \omega t$, где k — волновое число, ω — частота волны, $\omega^2 > k^2$, предположим, что в (1.3) функции $\Delta_{1,2}(x)$ постоянны. Тогда для несимметричной системы вместо (1.3) будем иметь неравенство типа $u(x, t) \geq -\Delta$, а для симметричной $-\Delta \leq u(x, t) \leq \Delta$, $\Delta > 0$ (несимметричные системы с двухсторонними ограничителями не рассматриваются).

В сделанных предположениях для функции $W(\psi)$ можно получить уравнение «ударного осциллятора» [10]. Пусть ψ_0 — фаза, соответствующая



Фиг. 2

щая выходу системы на ограничитель. Условия (1.4), (1.5) дают $W'(\psi_0-0) = -W'(\psi_0+0)$ (штрихи обозначают дифференцирование по аргументу). Отыскивая τ -периодические режимы; из (1.6) найдем подстановкой $u(x, t) = W(\psi)$, $\psi = kx - \omega t$:

$$(\omega^2 - k^2) W'' + \alpha^2 W + \Phi[W(\psi)] = 0 \quad (2.1)$$

Для симметричной системы $\Phi[W(\psi)] = I\delta^{\tau/2}(\psi - \psi_0)$, для несимметричной $\Phi[W(\psi)] = -I\delta^{\tau}(\psi - \psi_0)$ [1], где $I = 2|W'(\psi_0 - 0)|$ — «импульс» удара в сопровождающей системе координат; $\delta^{\tau/2}(\psi) = 2\tau^{-1}\sum \exp[i(2n+1)\Omega\psi]$, $\delta^{\tau}(\psi) = \tau^{-1}\sum \exp[in\Omega\psi]$ ($n=0, \pm 1, \dots$) — симметричная и несимметричные τ -периодические последовательности δ -функций Дирака, $\Omega = 2\pi\tau^{-1}$. Отсюда

$$W(\psi) = -I(\omega^2 - k^2)^{-1}\chi_{\alpha}(\psi - \psi_0) \quad (2.2)$$

причем в симметричном случае периодическая функция Грина $\chi_{\alpha}(\psi) = (2\alpha_1 \cos^{1/4}\alpha_1\tau)^{-1} \sin \alpha_1(\psi - 1/4\tau)$ ($0 \leq \psi < 1/2\tau$), $\alpha_1 = (\omega^2 - k^2)^{-1/2}\alpha$, $-\chi_{\alpha}(\psi + 1/2\tau) = \chi_{\alpha}(\psi)$; $I = 2\alpha_1\Delta \operatorname{ctg}^{1/4}\alpha_1\tau$; в несимметричном случае периодическая функция Грина $-\chi_{\alpha}(\psi) = (2\alpha_1 \sin^{1/2}\alpha_1\tau)^{-1} \cos \alpha_1(\psi - 1/2\tau)$ ($0 \leq \psi < \tau$), $\alpha_1 = (\omega^2 - k^2)^{-1/2}\alpha$, $\chi_{\alpha}(\psi + \tau) = \chi_{\alpha}(\psi)$; $I = -2\alpha_1\Delta \operatorname{tg}^{1/2}\alpha_1\tau$.

Решение (2.2) аналогично решению, подробно проанализированному в [1] при рассмотрении сосредоточенных систем. При $\alpha \rightarrow 0$ в симметричной системе возможен предельный переход и входящая в (2.2) функция

$$\chi_0(\psi) = 1/2\psi - 1/8\tau \quad (0 \leq \psi < 1/2\tau) \quad (2.3)$$

оказывается пилообразной, в этом случае $I = 8\Delta(\omega^2 - k^2)\tau^{-1}$.

В несимметричной системе при $\alpha = 0$ бегущие волны не существуют. Они существуют, однако, для систем с равномерно распределенной силой P . Уравнение движения имеет вид: $\square u + P - \Phi(u) = 0$; уравнение для определения функции $W(\psi)$ такое: $(\omega^2 - k^2)W'' + P - \Phi[W(\psi)] = 0$. Отсюда, отсчитывая смещение струны в соответствии с фиг. 1, з (рассматривается неограниченная система), можно найти

$$W(\psi) = -1/2P(\omega^2 - k^2)^{-1}\psi^2 + 1/2V_0(\omega^2 - k^2)P^{-1} + \Delta, \quad \psi \in [-1/2\tau, 1/2\tau] \quad (2.4)$$

$$\tau = 2[V_0^2(\omega^2 - k^2)^2P^{-2} + 2(\omega^2 - k^2)\Delta P^{-1}]^{1/2}, \quad V_0 = \text{const}; \quad W(\psi + \tau) = W(\psi)$$

где τ -период и взаимодействие с ограничителем происходит при $\psi = \pm 1/2\tau + l\tau$ (l — целое число).

Профили бегущих волн в координатах (ψ, W) показаны на фиг. 2.

Характер полученных решений показывает, к каким типам волн приводит гипотеза удара Y : волны как бы набегают на ограничитель и точка контакта скользит вдоль него. Если в какой-то момент времени t_0 точка струны с координатой x_0 достигла с ненулевой скоростью ограничителя, то в близкий к нему момент времени t_1 то же самое произойдет с близкой точкой x_1 . При этом происходит мгновенный отскок и мгновенный излом профиля струны. Такие волны будем называть набегающими.

Найденные решения описывают простейшие типы волн в стационарных системах. Для различных моделей немгновенного удара они выписывались ранее в [3, 10].

3. Формы набегающих волн. Рассмотрим систему, изображенную на фиг. 1, в. Уравнение (1.6) и условия (1.2), (1.3) в консервативном слу-

чае $D=0$ примут вид

$$\square u + \Phi(u) = 0; u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = v_0(x); u(x, t) \geq -\Delta, \Delta > 0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

где $u_0(x)$, $v_0(x)$ — заданные гладкие функции; предполагаем, что $u_0(x) - \Delta > 0$, т. е. начальное смещение таково, что струна не касается ограничителя.

Для решения (3.1) введем следующее обобщение преобразования [7, 8] на системы с распределенными ударными элементами

$$u(x, t) = |\psi(x, t)| - \Delta, \partial u = \partial \psi \operatorname{sign} \psi \quad (3.2)$$

где ψ — гладкая функция, подлежащая определению; частное дифференцирование производится по любому из двух аргументов функций $u(x, t)$, $\psi(x, t)$.

Неравенство (1.3), принимающее здесь вид $u(x, t) \geq -\Delta$, переходит во всегда верное неравенство $|\psi(x, t)| \geq 0$. Из (3.2) следует, что точка (x_0, t_0) выхода струны на ограничитель отвечает уравнению $\psi(x_0, t_0) = 0$. При этом $\operatorname{sign} \psi(x_0 - 0, t_0) = \operatorname{sign} \psi(x_0, t_0 - 0) = -\operatorname{sign} \psi(x_0 + 0, t_0) = -\operatorname{sign} \psi(x_0, t_0 + 0)$ и условия (1.4), (1.5) сводятся к требованию непрерывности частных производных $\psi(x, t)$ (ср. [7, 8]). Наконец, уравнение движения $\square u = 0$ ($\psi < -\Delta$) дает: $\square \psi = 0$ ($\psi > 0$) и $-\square \psi = 0$ ($\psi < 0$), т. е. для всех ψ окончательно найдем $\square \psi = 0$.

Приведенные рассуждения можно трактовать так. Подставим (3.2) в первое уравнение (3.1) и, выполнив обобщенное дифференцирование, найдем

$$2(\psi_t^2 - \psi_x^2) \delta(\psi) + \square \psi \operatorname{sign} \psi + \Phi(|\psi| - \Delta) = 0 \quad (3.3)$$

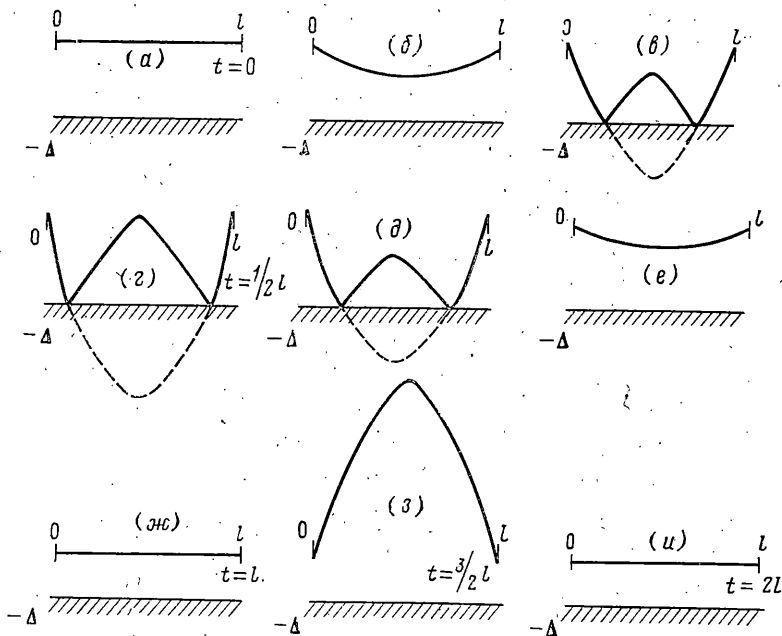
Так как замена (3.2) исключает условия удара, то первый и третий члены здесь взаимно уничтожаются и вновь имеем $\square \psi = 0$. Это уравнение (вместе с (3.2)) определяет решения задачи (3.1) для неограниченной струны (о пересчете начальных условий для функции $\psi(x, t)$ см. далее). Анализ механических эффектов, возникающих в таких системах, проведен приближенными методами в [3]. Ниже остановимся на решении граничной задачи. Из (3.3) видно, что для уничтожения сингулярных членов необходимо $\psi_t^2 \neq \psi_x^2$, а значит, среди функций ψ не должно быть бегущих волн вида $\psi(x \pm t)$.

Перейдем к решению краевой задачи, для чего к волновому уравнению $\square \psi = 0$ добавим граничные и начальные условия, пересчитанные в соответствии с (3.1) и (3.2), причем из (3.2) следует, что эти условия оказываются неоднозначными: $\psi(0, t) = \pm \Delta$, $\psi(l, t) = \pm \Delta$; $\psi(x, 0) = \pm [u_0(x) + \Delta]$, $\psi_t(x, 0) = v_0(x) \operatorname{sign} \psi(x, 0)$.

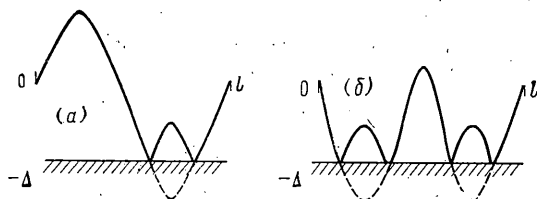
Заметим, что если бы выполнилось $\psi(0, t) \neq \psi(l, t)$, то струна находилась бы в виброударном режиме и при $t=0$, что противоречит постановке задачи. Поэтому $\psi(0, t) = \psi(l, t) = \pm \Delta$ и входящие в равенство знаки должны совпадать со знаками, стоящими перед выражением $u_0(x) + \Delta$, входящим в первое начальное условие, ибо в противном случае решения не могут быть непрерывными. В силу того что по условию $u_0(x) + \Delta > 0$, функция $\operatorname{sign} \{\pm [u_0(x) + \Delta]\}$ всегда имеет постоянное значение. Поэтому решение волнового уравнения с выписанными неоднозначными граничными и начальными условиями будет иметь вид [9] $\psi(x, t) = \pm [\varphi(x, t) + \Delta]$, причем функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет той же задаче, но при $\Delta = 0$. В силу (3.2) искомое решение запишется как $u(x, t) = |\varphi(x, t) + \Delta| - \Delta$, так что возникшая неоднозначность исчезает и не влияет на окончательный результат. В соответствии с этим для определенности можно считать, что в пересчитанных граничных и начальных условиях везде взят знак плюс. Пусть

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \pi n x l^{-1}, \quad v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \pi n x l^{-1}$$

тогда, с учетом (3.2) и видом общего решения рассматриваемой краевой



Фиг. 3



Фиг. 4

задачи для волнового уравнения [9], найдем искомое решение в виде

$$u(x, t) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \pi n t l^{-1} + B_n l (\pi n)^{-1} \sin \pi n t l^{-1}] \sin \pi n x l^{-1} + \Delta \right| - \Delta \quad (3.4)$$

Полученное представление позволяет говорить о наличии «форм» набегающих волн: каждой линейной форме колебаний соответствует своя нелинейная форма. Пусть в (3.4) все $A_n = 0$, а $B_n \neq 0$ только при $n = j$, тогда

$$u(x, t) = |C_j \sin \pi j t l^{-1} \sin \pi j x l^{-1} + \Delta| - \Delta, \quad C_j = B_j l (\pi j)^{-1}$$

и легко найти пространственно-временную эволюцию любой формы нелинейной системы. При $j=1$ такая эволюция при некоторых значениях параметров показана на фиг. 3. При выбранной размерности переменных период колебаний равен $2l$. Профили стоячей волны даны в девяти различных моментах времени. На фиг. 4 показаны характерные профили волны на второй (а) и третьей (б) формах.

Заметим, что при отказе от предположения $u_0(x) + \Delta > 0$ проведенные построения нуждаются в модификации.

Рассмотрим более сложные эффекты, связанные с формами колебаний, и перейдем к системе фиг. 1, б. Задача ставится так же, как и предыдущая, с той разницей, что в первом уравнении (3.1) $\Phi(u)$ описывает двухсторонние соударения, а неравенство, ограничивающее значения функции u , заменяется таким: $-\Delta \leq u(x, t) \leq \Delta$.

В соответствии с (2.2), (2.3) для неограниченной системы имеется решение, записываемое через пилообразную функцию $\chi_0(\psi)$. Нормировав ее период через 2π , можно записать

$$u(x, t) = W(\psi) = -4\Delta \pi^{-1} \chi_0(\psi), \quad \chi_0(\psi) = \frac{1}{2} (\psi^{-1/2\pi})$$

(3.5)

$$0 \leq \psi \leq \pi; W(\psi + \pi) = -W(\psi); \pi l = 4\Delta(\omega^2 - k^2)$$

где последнее равенство суть дисперсионное уравнение.

Взаимодействие струны с верхним ограничителем происходит при $\psi = 2\pi q$, с нижним — при $\psi = \pi(1 + 2q)$ (q — целое число).

Первую формулу (3.5) можно трактовать как преобразование Журавлева для функции $\psi(x, t)$:

$$u(x, t) = W(\psi), \quad \partial u = W'(\psi) \partial \psi \quad (3.6)$$

$$W'(\psi) = -2\Delta\pi^{-1} \quad (\psi \in [0, \pi[), \quad W'(\psi) = 2\Delta\pi^{-1} \quad (\psi \in [\pi, 2\pi[)$$

и далее по периодичности. Ограничение $-\Delta \leq u(x, t) \leq \Delta$ выполняется при всех ψ . При каждом выходе струны на ограничители ($W[\psi(x_0, t_0)] = \pm\Delta$) производная W' скачком меняет свой знак и потому, как и ранее, условия удара (1.4), (1.5) сводятся к требованию непрерывности частных производных функций $\psi(x, t)$ (см. [7]).

После подстановки (3.6) в уравнение движения (3.1) найдем

$$4\Delta\pi^{-1}(\psi_t^2 - \psi_x^2) \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^{q+1} \delta(\psi - 1/2g\pi) + W'(\psi) \square\psi + \Phi[W(\psi)] = 0$$

и здесь должны взаимно уничтожиться содержащие сингулярности первый и третий члены. В результате останется $\square\psi = 0$. При этом снова $\psi_t^2 \neq \psi_x^2$ и потому (как и ранее) решения вида $\psi(x \pm t)$ исключаются из рассмотрения.

Пусть в (3.1) $|u_0(x)| < \Delta$, т. е. начальная конфигурация точек струны такова, что касания ограничителей нет. Тогда после ряда преобразований оказывается, что граничные и начальные условия, пересчитываемые в соответствии (3.6) и (3.1), могут быть выбраны

$$\begin{aligned} \psi(0, t) = \psi(l, t) &= 1/2\pi; \quad \psi(x, 0) = 1/2\pi[1 - u_0(x)\Delta^{-1}], \\ \psi_t(x, 0) &= -1/2\pi\Delta^{-1}v_0(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

и задача (3.1) для симметричной системы сводится к задаче $\square\psi = 0$, (3.7), (3.6). Отсюда по аналогии с (3.4) можно записать

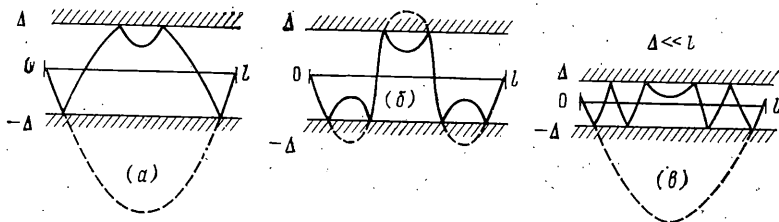
$$u(x, t) = -4\Delta\pi^{-1}\chi_0 \left[1/2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\circ \cos \pi n t l^{-1} + B_n^\circ \sin \pi n t l^{-1}) \sin \pi n x l^{-1} \right] \quad (3.8)$$

$$A_n^\circ = -1/2\pi\Delta^{-1}A_n, \quad B_n^\circ = -1/2l(\Delta n)^{-1}B_n$$

причем A_n и B_n — коэффициенты разложения функций $u_0(x)$ и $v_0(x)$.

Вид решения (3.8) показывает, что формы колебаний здесь могут иметь более сложную структуру, чем в несимметричном случае. При достаточно большой начальной энергии (или при достаточно малом Δ) ударное взаимодействие, начавшееся у одного из ограничителей, может одновременно происходить у второго. На фиг. 5, а показана одна возможная конфигурация такой ударной формы, соответствующая первой форме линейных колебаний, обозначенной штриховой линией. Для сравнения на фиг. 5, б показана возможная конфигурация, соответствующая третьей форме линейных колебаний. В подобной системе возможны и более сложные движения, например за счет многократного отражения струны от обоих ограничителей (фиг. 5, в). В случае дискретной системы подобные формы численно были исследованы в [4].

Отметим, что полученные для симметричной системы решения могут быть найдены и при помощи обобщения на рассматриваемый случай метода Уизема [11]. Уравнение движения $\square u + \Phi(u) = 0$ будем трактовать как уравнение Лагранжа для вариационного принципа $\delta \iint L dx dt = 0$, $L = 1/2(u_t^2 - u_x^2) - V(u)$, где $V(u)$ — потен-



Фиг. 5

циальная энергия удара. Подставим сюда (3.5) и, считая k и ω медленно меняющимися функциями x и t , составим усредненный по быстрой фазе ψ лагранжиан, причем в силу симметрии усреднение можно провести по $0 \leq \psi \leq \pi$. Имеем

$$\langle L \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} L d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) [W'(\psi)]^2 - W(\psi) I\delta(\psi) \right\} d\psi$$

где $I\delta(\psi)$ — сингулярный член, описывающий силу удара. Используя дисперсионное уравнение, входящее в (3.5), после некоторых преобразований получим $\langle L \rangle = -2\Delta^2 \pi^{-2} (\omega^2 - k^2)$.

Пользуясь вариационным принципом и уравнением Лагранжа

$$\delta \iint \langle L \rangle dx dt = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} L_{\omega} - \frac{\partial}{\partial x} L_k = 0$$

найдем $\omega_t + k_x = 0$. Добавив сюда уравнение совместности [11] $\omega_x + k_t = 0$ и учитывая, что $\psi_t = -\omega$, $\psi_x = k$, найдем окончательно $\square\psi = 0$. Таким образом, в данном случае метод Уизема приводит к точным решениям.

Эффект появления форм с большим числом соударений обусловлен тем, что в системе имеется фактор, возвращающий струну после соударения назад к ограничителю. В данном случае таким фактором оказывается второй ограничитель, но этот эффект может появиться и в несимметричной системе, показанной, например, на фиг. 1, г, где струна нагружена равномерно распределенной статической силой P .

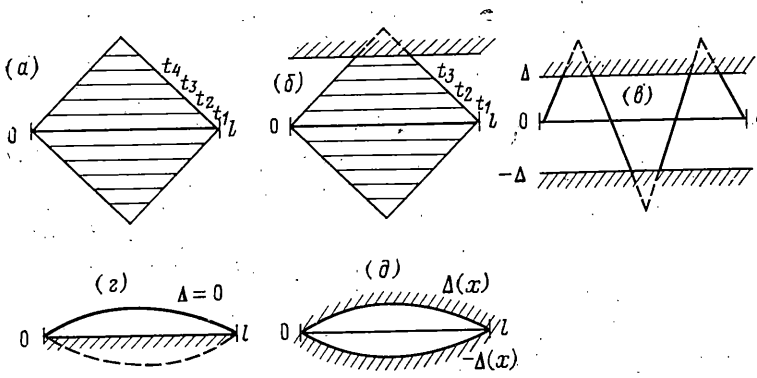
Описанные методы пригодны и для анализа системы фиг. 1, а с несимметричным и симметричным ограничителями. В первом случае после применения преобразования (3.2) для функции $\psi(x, t)$ получаем $\square\psi + \alpha^2(\psi - \Delta \text{sign } \psi) = 0$. Во втором случае, используя (3.6), найдем $\square\psi + \alpha^2 [W'(\psi)]^{-1} W(\psi) = 0$. Оба этих уравнения могут быть проанализированы современными методами теории нелинейных волн [11–13].

4. Хлопки струны об ограничитель. Гипотеза удара Y (п.1) может быть заменена другими. Ранее требовалось, что как только в (1.3) реализуется равенство, то (1.4), (1.5) выполняются одновременно.

Рассмотрим ситуацию, при которой эта гипотеза выполняться не может. Рассмотрим струну $\square u = 0$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Пусть начальные условия поставлены следующим образом: $u_0(x) = 0$, $v_0(x) = v_0 = \text{const}$. При помощи известных методов [9] можно найти

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{l} \quad (4.1)$$

В любой момент времени $0 < t < 1/2l$ (период колебаний равен $2l$) стоячая волна представляет собой трапецию с нижним основанием $[0, l]$ и верхним $[\Delta_0 v_0^{-1}, l - \Delta_0 v_0^{-1}]$, где высота трапеции $0 \leq \Delta_0 < 1/2 v_0 l$, а значению $\Delta_0 = 1/2 v_0 l$ соответствует вырождение трапеции в треугольник при $t = 1/2l$. Далее процесс происходит в обратном направлении, исходя из условий периодичности и симметрии (фиг. 6, а). Пусть, например, при $\Delta_0 = \Delta > 0$ в системе установлен абсолютно упругий ограничитель, так что $u(x, t) \leq \Delta$. Тогда все точки струны, лежащие в интервале $[\Delta v_0^{-1}, l - \Delta v_0^{-1}]$, одновременно подходят к ограничителю со скоростью v_0 в момент времени $t_0 = \Delta v_0^{-1}$. Масса участка струны, подошедшего к ограничителю, $m_0 = l - 2\Delta v_0^{-1}$. Этот участок в соответствии с гипотезой об упругом ударе отразится от ограни-



Фиг. 6

читателя и процесс пойдет в обратном направлении (фиг. 6, б). Таким образом, для всех $x \in]\Delta v_0^{-1}, l - \Delta v_0^{-1}[$ одновременно

$$u_t(x, t_0 - 0) = -u_t(x, t_0 + 0) \quad (4.2)$$

Кроме того, с учетом свойств решения (4.1) можно записать для $x_1 = \Delta v_0^{-1}$ и $x_2 = l - \Delta v_0^{-1}$:

$$u_x(x_1 - 0, t_0) = -u_x(x_2 + 0, t_0), \quad u_x(x_1 + 0, t_0) = u_x(x_2 - 0, t_0) = 0 \quad (4.3)$$

Соотношения (4.2), (4.3) и описывают удар в рассматриваемой системе. Определим теперь закон движения струны в виброударном режиме. Искомое решение не может быть найдено при помощи методов, изложенных выше, так как, например, использование преобразования Журавлева требует гладкости функции $\psi(x, t)$, а при поставленных начальных условиях эта функция будет иметь разрыв производной (ряд (4.1) — обобщенное решение волнового уравнения).

Вспользуемся методом периодических функций Грина [1, 6]. Пусть τ — период виброударного режима, $\chi(x, y, t-s) - \tau = l + 2\delta/v_0$ — периодическая функция Грина, представляющая собой реакцию распределенной системы (в данном случае струны) в точке x на приложенную в точке y τ -периодическую последовательность $\delta^\tau(t-s)$ (см. п. 2). Пусть, далее, $\Phi[u(x, t)]$ — плотность силы (в данном случае силы удара, входящей, как и раньше, в (1.6)), действующей на систему при $x \in X \subset [0, l]$. Тогда интегральное уравнение искомой волны будет таким [6]:

$$u(x, t) = - \int\limits_X \int\limits_0^\tau \chi(x, y, t-s) \Phi[u(y, s)] ds dy \quad (4.4)$$

где интегрирование по y ведется на множестве X . Плотность силы удара $\Phi[u(x, t)] = I(x) \delta^\tau(t-t_0)$, причем период $\tau = l + t_0 = l + 2\Delta v_0^{-1}$. Плотность импульса удара $I(x) = 2m_0 v_0 l_0^{-1}$, где $l_0 = l - 2\Delta v_0^{-1}$ — длина участка струны, участвующего в ударе; отсюда $I = 2v_0 = \text{const}$. Промежуток интегрирования $X = [\Delta v_0^{-1}, l - \Delta v_0^{-1}]$, а периодическая функция Грина при $0 \leq t < \tau$ в соответствии с [6, 14] имеет вид

$$\chi(x, y, t) = l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x l^{-1} \sin n\pi y l^{-1} \cos \Omega_n (t - 1/2\tau) (\Omega_n \sin 1/2 \Omega_n \tau)^{-1}$$

где $\Omega_n = n\pi l^{-1}$. Проводя в (4.4) интегрирование с учетом вычисленного, найдем при $0 \leq t < \tau$; $t_0 = 0$ (величины l_0 и τ определены выше):

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} \tau \times \\ \times l_0 \frac{\cos \Omega_{2n-1} (t - 1/2\tau)}{\sin 1/2 \Omega_{2n-1} \tau}$$

Найденное представление описывает хлопки определенной части струны об ограничитель². Так как хлопки осуществляются участком струны, имеющим массу, поведение системы здесь во многом напоминает поведение системы с классическими ударными парами.

Аналогично рассматривается система с симметричными ограничителями. Пусть, например, в предыдущей задаче $|u(x, t)| \leq \Delta$, а начальные условия поставлены в виде $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = (-1)^{k+1} v_0$ при $kl n^{-1} < x < (k+1)ln^{-1}$, где отрезок $0 \leq x \leq l$ разбит на n равных частей, $k = 0, 1, \dots, n-1$; $v_0 = \text{const}$. Тогда аналогично предыдущему строятся решения, описывающие «высокочастотные формы» хлопков (фиг. 6, в).

Условия удара, которым удовлетворяют подобные волны, будут аналогичны (4.2), (4.3). Равенство (4.2) должно выполняться при всех $x \in X \subset [0, l]$, причем X — суть объединение участков струны, участвующих в ударе. Для концевых точек этих участков должно выполняться равенство (4.3). Искомое решение может быть найдено из уравнения типа (4.4). В несимметричной системе высокочастотные формы хлопков можно получить при более сложных условиях.

Отметим, что для получения хлопков не обязательно обращаться к обобщенным решениям соответствующей линейной задачи. Например, если для системы (фиг. 1, в) положить $\Delta = 0$ и придать начальные условия, соответствующие первой форме линейных колебаний, то возможно движение, при котором все точки струны будут хлопать об ограничитель (фиг. 6, в). Волны, описывающие хлопки, можно построить и для некоторых типов систем с ограничениями вида $\Delta_1(x) \leq u(x, t) \leq \Delta_2(x)$. На фиг. 6, д показан простейший пример такой системы. Движение струны ограничено абсолютно упругим ограничителем, каждая из двух половин которого имеет форму полуволны синусоиды. Эта и предыдущая задача могут быть подробно проанализированы при помощи уравнения (4.4).

5. Об учете неконсервативных сил. Если в уравнении (1.6) $D \neq 0$ или в граничные условия (1.2) входит функция, зависящая от времени, то при построении решений можно применить методы [11–13] и другие, например п. 3.

В качестве примера расчета рассмотрим модель фиг. 1, в, где $\Delta > 0$, предполагая, что в уравнении движения (1.6) $D = -2b\partial/\partial t$, $b > 0$, а граничные условия имеют вид $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = N_0 \cos \kappa_0 t$, где N_0 и κ_0 — амплитуда и частота колебаний правого конца струны, $\Delta > N_0$. Будем искать вынужденные колебания системы, в связи с чем начальные условия не ставятся. Применяя преобразование (3.2), для функции $\psi(x, t)$ найдем $\square\psi + 2b\psi_t = 0$. Граничные условия, пересчитываемые как в п. 3, могут быть записаны в виде $\psi(0, t) = \Delta$, $\psi(l, t) = N_0 \cos \kappa_0 t + \Delta > 0$. В результате, используя [9], получим искомое решение в форме

$$u(x, t) = \left| N_0 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\sin \sqrt{\kappa_0^2 - 2ib\kappa_0 x}}{\sin \sqrt{\kappa_0^2 - 2ib\kappa_0 l}} \right) \exp(i\kappa_0 t) \right] + \Delta \right| - \Delta$$

Это решение показывает, что при достаточно малом демпфировании наиболее интенсивные колебания возможны вблизи собственных частот струны $\kappa_0 \approx \Omega_n = \pi n l^{-1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Таким образом, в отличие от систем с традиционными ударными парами, в рассматриваемой системе интенсивные соударения приходятся на линейный резонанс.

Вынужденные колебания в системах с хлопками могут быть описаны при помощи методов периодических функций Грина [1, 6]. Такое описание во многом аналогично описанию систем с традиционными ударными парами.

Отметим, что аналогичные построения можно проделать и для распределенных ударных элементов, образованных двумя взаимодействующими струнами (для двух одинаковых струн рассмотрения практически совпадают с проведенными) или цепочками струн. Такие построения приведут к

² Подобные волны были приближенно описаны в работе [3] в виде так называемой системы кинков. Данная модель хлопка принадлежит В. К. Асташеву.

виброударным системам со свойствами, существенно отличающимися от традиционных.

Автор благодарит В. К. Асташева, В. И. Бабицкого и Л. И. Маневича за ценные советы и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Кобринский А. Е., Кобринский А. А.* Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 591 с.
3. *Веденова Е. Г., Маневич Л. И.* Периодические и локализованные волны в виброударных системах регулярной структуры.— *Машиноведение*, 1981, № 4, с. 21–30.
4. *Веденова Е. Г.* Солитоны в существенно нелинейных системах ударного типа.— *Машиноведение*, 1983, № 1, с. 11–15.
5. *Vamberger A., Schatzman M.* New results on the vibrating string with a continuous obstacle.— *SIAM J. Math. Anal.*, 1983, v. 14, No. 3, p. 560–595.
6. *Крупенин В. Л.* О построении законов движения стержневых виброударных систем.— *Машиноведение*, 1981, № 2, с. 14–19.
7. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1976, № 2, с. 30–34.
8. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными одно-сторонними связями.— *ПММ*, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781–788.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
10. *Крупенин В. Л.* О колебаниях систем с большими упругими силами порогового типа.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1983, № 2, с. 76–84.
11. *Уизем Дж.* Линеинные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
12. *Ланда П. С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.
13. *Солитоны в действии.* /Под ред. К. Лонбрега и Э. Скотта. М.: Мир, 1981. 312 с.
14. *Бугковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VI.1984