МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1986

УДК 531.1

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

АГАФОНОВ С. А.

Исследуется устойчивость линейной механической системы под действием потенциальных и неконсервативных позиционных сил. Получены достаточные условия устойчивости в следующих трех случаях: матрица потенциальных сил имеет положительные и различные собственные значения или одно отрицательное или одно нулевое собственные значения при условии, что остальные положительны и различны. В последних двух случаях решается задача стабилизации неустойчивой консервативной системы неконсервативными позиционными силами. Проведено сравнение полученных условий устойчивости с аналогичными для системы с двумя степенями свободы.

Исследованию устойчивости подобных систем, где кроме указанных сил действуют гироскопические, диссипативные и ускоряющие силы, посвящены работы [1–7].

1. Рассмотрим механическую систему, находящуюся под действием потенциальных и неконсервативных позиционных сил. Положение системы будем характеризовать нормальными координатами $x_1, \ldots x_n$. Положение равновесия, без уменьшения общности, будем считать началом координат

$$\mathbf{x}=0, \quad \mathbf{x}^{\cdot}=0, \quad \mathbf{x}=(x_1, \ldots x_n)^{\mathrm{T}} \tag{1.1}$$

Линейные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot}+K\mathbf{x}+F\mathbf{x}=0, \quad K=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n), \quad F^{\mathrm{T}}=-F \tag{1.2}$$

Пусть собственные значения матрицы K положительны и различны: $\lambda_1>\lambda_2>\ldots\lambda_n>0$. Рассмотрим

$$2V=\mathbf{x}^{\cdot\mathrm{T}}(E+C)\mathbf{x}^{\cdot}+\mathbf{x}^{\mathrm{T}}D\mathbf{x} \tag{1.3}$$

Здесь E – единичная матрица, симметрические матрицы C и D подлежат определению, причем на главной диагонали матрицы C стоят нули. Производная от функции (1.3) по времени в силу (1.2) $V^{\cdot}=0$ при $D=(K-F)(E+C)$. Условие симметричности матрицы D приводит к матричному уравнению для определения матрицы C:

$$(K-F)C-C(K+F)=2F \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4), записанное в скалярном виде, представляет алгебраическую систему порядка $^1/_2 n(n-1)$ относительно стольких же неизвестных c_{ij} – элементов матрицы C. Решение уравнения (1.4) ищется в виде

$$C=\sum_{m=1}^{\infty} C_m \tag{1.5}$$

Матрицы $C_m (m=1, \ldots)$ удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\begin{gathered} KC_1-C_1K=2F \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ KC_r-C_rK=FC_{r-1}+C_{r-1}F \quad (r=2, 3 \ldots) \end{gathered} \tag{1.6}$$

Из системы (1.6) получим оценки по норме матриц C_m $(m=1, 2, \ldots)$:

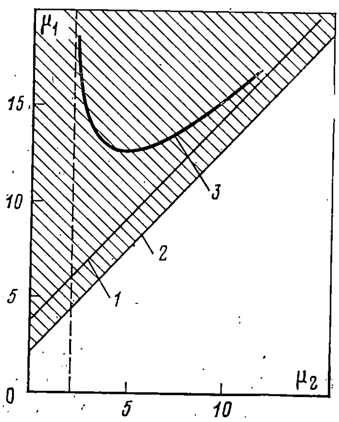
$$\|C_1\|<2\|F\|/s, \ldots, \quad \|C_m\|<[2\|F\|/s]^m, \ldots \tag{1.7}$$

$$s=\min_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|, \qquad \|\cdot\|=\max_i \sum_{j=1}^{n}|\cdot_{ij}|$$

Используя (1.7), при $s>2\|F\|$ из (1.5) имеем оценку по норме матрицы C:

$$\|C\|<2\|F\|/[s-2\|F\|] \tag{1.8}$$

Для положительной определенности матрицы $E+C$ достаточно, чтобы все собственные значения матрицы C принадлежали интервалу $(-1,1)$ [8] или $\|C\|<1$. Используя это неравенство, с учетом (1.8) получим условие положительной определенности матрицы $E+C$:



$$\|F\|<{}^1/_4 s \tag{1.9}$$

Матрица $D=K+{}^1/_2[(K-F)C+C(K+F)]$ положительно определена тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы $R\equiv{}^1/_2K^{-1}[(K-F)C+C(K+F)]$ больше -1 [8]. Для этого достаточно чтобы $\|R\|<1$ или, с учетом (1.8), $2\|F\|^2+2(\lambda_1+\lambda_n)\|F\|-$ $-\lambda_n s<0$. Из последнего неравенства получим оценку для $\|F\|$:

$$\|F\|<{}^1/_2\{[(\lambda_1+\lambda_n)^2+2\lambda_n s]^{1/2}-(\lambda_1+\lambda_n)\} \tag{1.10}$$

Можно показать, что выполнение неравенства (1.10) влечет выполнение (1.9) и, следовательно, является условием положительной определенности функции (1.3) и устойчивости решения (1.1) системы (1.2). На фигуре приведено сравнение области устойчивости системы с двумя степенями свободы $(\lambda_1-\lambda_2>2f)$ с областью, определяемой неравенством (1.10). На фигуре введены обозначения: $\mu_i=\lambda_i/f$ $(i=1, 2)$, f – элемент матрицы F, кривые *1*, *2*, *3* задаются уравнениями $\mu_1-\mu_2=4$, $\mu_1-\mu_2=2$, $\mu_1=(\mu_2^2+2\mu_2+2)(\mu_2-2)^{-1}$. Область устойчивости заштрихована. Неравенство (1.10) задает область, лежащую выше кривой *3*.

2. Рассмотрим случай одного отрицательного собственного значения матрицы K: $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_{n-1}>0$, $\lambda_n<0$. Будем предполагать, что выполняется неравенство (1.9) и $\sum_{k=1}^{n} f_{nk}^2\neq 0$ (f_{ij} – элементы матрицы F).

Лемма 1. Характеристическое уравнение системы (1.2) совпадает с характеристическим уравнением системы

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot}+L\mathbf{x}=0, \quad L=L^T=(E+C)^{-1/2}D(E+C)^{-1/2} \tag{2.1}$$

Здесь матрица C удовлетворяет уравнению (1.4). Доказательство проводится просто, если учесть, что $(E+C)^{-1}D=K+F$ и $\det[(E+C)\lambda^2+D]=$ $=[\det(E+C)^{1/2}]^2\det(E\lambda^2+L)$.

Матрицу L представим в виде $L=L_0+L_1$, $L_0=(l_{ij})$, где $l_{ij}=\lambda_j\delta_{ij}+$ $+\sum_{r=1}^{n}[{}^1/_2(\lambda_i+\lambda_j)-\lambda_r]f_{ir}f_{rj}/[(\lambda_i-\lambda_r)(\lambda_j-\lambda_r)]$, δ_{ij} – символ Кронекера. Используя неравенство (1.8), можно показать, что норма матрицы L_1 удовлетворяет неравенству

$$\|L_1\|\leqslant 32(8\lambda_1+s)\|F\|^4/(s^3(s-4\|F\|)) \tag{2.2}$$

Для нахождения условия положительной определенности матрицы L_0 воспользуемся локализационной теоремой Брауэра и одним из ее следствий

[9]: характеристические числа матрицы $A=(a_{ij})$ порядка n расположены в области, образованной объединением $^1/_2 n(n-1)$ овалов Кассини

$$|\lambda-a_{kk}||\lambda-a_{mm}|\leqslant P_k\cdot P_m,\qquad k\neq m,\qquad P_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \tag{2.3}$$

Для положительной определенности матрицы A порядка n с вещественными коэффициентами достаточно, чтобы

$$a_{kk}>0,\ a_{kk}\cdot a_{mm}>P_k\cdot P_m\ \ (k\neq m;\ k,\ m=1,\dots,n) \tag{2.4}$$

Выпишем диагональные элементы матрицы L_0:

$$l_{11}=\lambda_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{f_{1k}^2}{\lambda_1-\lambda_k} \tag{2.5}$$

. . . .

$$l_{n-1n-1}=\lambda_{n-1}-\sum_{k=1,\,k\neq n-1}^{n}\frac{f_{n-1k}^2}{\lambda_{n-1}-\lambda_k}$$

$$l_{nn}=\lambda_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_{nk}^2}{\lambda_k-\lambda_n}$$

Лемма 2. Диагональные элементы l_{ii} матрицы L_0 удовлетворяют неравенствам

$$l_{11}>l_{22}>\dots>l_{nn} \tag{2.6}$$

Используя (1.9), имеем $(\lambda_p-\lambda_{p+1})^2\geqslant(\lambda_p-\lambda_{p+1})s\geqslant s^2>2\|F\|^2$ или $\lambda_p-\|F\|^2/s>\lambda_{p+1}+\|F\|^2/s$, кроме того

$$\left|\sum_{k\neq p}^{n}\frac{f_{pk}^2}{\lambda_p-\lambda_k}\right|\leqslant\sum_{k\neq p}^{n}\frac{f_{pk}^2}{|\lambda_p-\lambda_k|}\leqslant s^{-1}\sum_{k\neq p}^{n}f_{pk}^2\leqslant s^{-1}\|F\|^2\qquad(p=1,\dots n-1)$$

Из последних двух неравенств и вытекают неравенства (2.6).

Лемма 3. Величины $P_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|l_{ij}|$ удовлетворяют неравенствам

$$P_i\leqslant s^{-1}\|F\|^2\ \ (i=1,\dots,n) \tag{2.7}$$

Имеем

$$P_i=\sum_{j=1}^{n}|l_{ij}|={}^1/_2\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f_{ik}f_{kj}}{\lambda_j-\lambda_k}-\frac{f_{ik}f_{kj}}{\lambda_i-\lambda_k}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant s^{-1}\sum_{j,\,k=1}^{n}|f_{ik}f_{kj}|\leqslant s^{-1}\|F\|\sum_{k=1}^{n}|f_{ik}|\leqslant s^{-1}\|F\|^2$$

Используя неравенства (2.6) и (2.7), условия положительной определенности матрицы L_0 (2.4) можно свести к двум

$$\lambda_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_{nk}^2}{\lambda_k-\lambda_n}>0,\qquad\lambda_n<0$$

$$l_{n-1n-1}\cdot l_{nn}-\|F\|^4 s^{-2}>0 \tag{2.8}$$

Лемма 4. Все собственные значения положительно-определенной матрицы L_0 лежат правее положительного числа

$$\mu={}^1/_2\{l_{n-1n-1}+l_{nn}-[(l_{n-1n-1}-l_{nn})^2+4\|F\|^4 s^{-2}]^{1/2}\} \tag{2.9}$$

Из локализационных оценок (2.3) для $k=n-1$, $m=n$ имеем

$$|\lambda-l_{n-1n-1}||\lambda-l_{nn}|\leqslant P_{n-1}\cdot P_n\leqslant\|F\|^4s^{-2}$$

или

$$\lambda^2-(l_{n-1n-1}+l_{nn})\lambda+l_{n-1n-1}\cdot l_{nn}-\|F\|^4s^{-2}<0$$

откуда и следует оценка для числа μ.

Используя оценку по норме матрицы L_1 (2.2) и выражение для числа μ (2.9), можно получить условие положительной определенности матрицы $L=L_0+L_1$: $\|L_1\|<\mu$, или

$$l_{n-1n-1}+l_{nn}-[(l_{n-1n-1}-l_{nn})^2+4\|F\|^4s^{-2}]^{1/2}>\frac{64(8\lambda_1+s)\|F\|^4}{s^3(s-4\|F\|)} \quad (2.10)$$

в котором l_{n-1n-1}, l_{nn} определяются по формулам (2.5). Из выполнения неравенства (2.10) следует положительная определенность матрицы D и, следовательно, положительная определенность функции (1.3) и устойчивость решения (1.1) системы (1.2) в случае одного отрицательного собственного значения матрицы K ($\lambda_n<0$).

Неравенство (2.10) также является достаточным условием устойчивости решения (1.1) системы (1.2) в случае одного нулевого собственного значения матрицы K: $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_{n-1}>\lambda_n=0$. Рассмотрим случай одного нулевого собственного значения более подробно. Пусть норма матрицы F определяется последней строкой: $\|F\|=\sum_{j=1}^{n}|f_{nj}|$. Тогда при достаточно малой $\|F\|$ неравенство (2.10) выполняется автоматически. Действительно, (2.10) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1}f_{nk}^2\lambda_k^{-1}-\frac{\|F\|^4}{s^2\left(l_{n-1n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}f_{nk}^2\lambda_k^{-1}\right)}-\frac{32(8\lambda_1+s)\|F\|^4}{s^3(s-4\|F\|)}+O(\|F\|^8)>0$$

из которого и следует утверждение. Следовательно, для стабилизации неустойчивой консервативной системы в случае, когда матрица K имеет одно нулевое собственное значение, а остальные положительны и различны, достаточно присоединить сколь угодно малые неконсервативные позиционные силы с доминирующей последней строкой $\left(\|F\|=\sum_{j=1}|f_{nj}|\right)$.

Для системы с двумя степенями свободы $x_1^{\cdot\cdot}+\lambda_1x_1+fx_2=0$, $x_2^{\cdot\cdot}-fx_1=0$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2=0$, $f>0$ условие устойчивости решения (1.1) имеет вид [2]: $\varepsilon<1$ ($\varepsilon=2f\lambda_1^{-1}$). Условие устойчивости (2.10) дает значение $\varepsilon=0{,}103\ldots$.

3. Рассмотрим действие на систему (1.2) диссипативных сил с равными коэффициентами диссипации

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot}+bE\mathbf{x}^{\cdot}+K\mathbf{x}+F\mathbf{x}=0,\quad b>0 \quad (3.1)$$

Предположим, что $\det(K+F)\neq0$. Производная от функции (1.3) по времени в силу (3.1) равна $V^{\cdot}=-b\mathbf{x}^{\cdot T}(E+C)\mathbf{x}^{\cdot}$. При выполнении неравенства (1.10) ($\lambda_1>\lambda_2>\ldots\lambda_n>0$) или (2.10) ($\lambda_1>\ldots>\lambda_{n-1}>0$, $\lambda_n\leqslant0$) решение (1.1) системы (3.1) асимптотически устойчиво. Устойчивая неконсервативная система становится асимптотически устойчивой при присоединении диссипативных сил с равными коэффициентами диссипации. Для системы с двумя степенями свободы аналогичный результат получен в [2].

Автор благодарен В. Ф. Журавлеву за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации.– Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 1, с. 31–34.
2. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
3. *Frik M.* Zur Stabilität nichtkonservativer linearer Systeme.– Z. angew. Math. und Mech., 1972, B. 52, H. 4, S. 47–49.
4. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем.– Вестн. МГУ. Математика, механика, 1972, № 4, с. 87–90.
5. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения.– ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 246–253.
6. *Лахаданов В. М.* О стабилизации потенциальных систем.– ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 53–58.
7. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем.– Вестн. МГУ. Математика, механика, 1975, № 4, с. 109–113.
8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
9. *Пароди М.* Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 170 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.1984