МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1986

УДК 534.014

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ НА СИСТЕМУ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

НГУЕН ДОНГ АНЬ

При помощи асимптотических методов Крылова – Боголюбова – Митропольского и метода уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка [1–4] изучаются случайные колебания в системе Ван-дер-Поля со случайным и периодическим внешним возбуждением при периодически изменяющейся собственной частоте, случайным и периодическим параметрическим возбуждениям. Показано, что в исследуемых системах условие интегрируемости уравнений [5] выполняется. На основе полученных точных плотностей вероятностей амплитуды и фазы дан анализ характера колебаний. Исследуется вопрос о гашении случайных колебаний при помощи силы трения и указано свойство, представляющее интерес для задач идентификации [3].

1. Рассмотрим колебания механической системы с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$x^{\cdot\cdot}+\nu^2x=\varepsilon f(t,\ x,\ x^{\cdot})+\sqrt{\varepsilon}g(x,\ x^{\cdot})\,\xi^{\cdot}(t) \tag{1.1}$$

где $\xi^{\cdot}(t)$ – случайный процесс типа «белого шума» с единичной интенсивностью, ε – положительный малый параметр, $g(x,\ x^{\cdot})$, $f(t,\ x,\ x^{\cdot})$ – нелинейные функции x и $x^{\cdot}$, причем последняя является периодической по t. Путем замены [4]:

$$x=a\cos\psi,\qquad x^{\cdot}=-a\nu\sin\psi,\qquad \psi=\nu t+\theta \tag{1.2}$$

с использованием формулы Ито получим стандартный вид уравнения (1.1):

$$da=\left[-\frac{\varepsilon}{\nu}f(t,\ x,x^{\cdot})\sin\psi+\frac{\varepsilon g^2(x,\ x^{\cdot})}{2\nu^2a}\cos^2\psi\right]dt-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}g(x,\ x^{\cdot})\sin\psi\, d\xi(t) \tag{1.3}$$

$$d\theta=\left[-\frac{\varepsilon}{a\nu}f(t,\ x,\ x^{\cdot})\cos\psi-\frac{\varepsilon g^2(x,\ x^{\cdot})}{\nu^2a^2}\sin\psi\cos\psi\right]dt-$$
$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\nu}g(x,\ x^{\cdot})\cos\psi\, d\xi(t)$$

Усредненное уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка, составленное для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы $W(a,\ \theta)$, будет иметь вид [4–11]:

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1W)+\frac{\partial}{\partial\theta}(K_2W)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W)+2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(K_{12}W)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W)\right] \tag{1.4}$$

$$K_1(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{\nu}f(t,\ x,\ x^{\cdot})\sin\psi+\frac{g^2(x,\ x^{\cdot})}{2\nu^2a}\cos^2\psi\right\} \tag{1.5}$$

$$K_2(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{a\nu}f(t,\ x,\ x^{\cdot})\cos\psi-\frac{g^2(x,\ x^{\cdot})}{\nu^2a^2}\sin\psi\cos\psi\right\}$$

$$K_{11}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{\left(\frac{g(x,\ x^{\cdot})}{\nu}\sin\psi\right)^2\right\},\qquad K_{12}(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left\{\frac{g^2(x,\ x^{\cdot})}{a\nu^2}\sin\psi\cos\psi\right\},$$

$$K_{22}(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left\{\left(\frac{g(x,\ x^{\cdot})}{a\nu}\cos\psi\right)^2\right\}$$

Пусть функция $g(x, \dot{x})$, такая, что

$$K_{12}(a, \theta) = \underset{t}{M}\left\{\frac{g^2(x, \dot{x})}{a\nu^2} \sin\psi\cos\psi\right\} = 0 \tag{1.6}$$

Представим уравнение (1.4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{K_1 W - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(K_{11}W)\right\} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{K_2 W - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(K_{22}W)\right\} \tag{1.7}$$

Из уравнения (1.7) следует, что его решение будет таким

$$W(a, \theta) = \exp\left\{2\int\left[\frac{K_1}{K_{11}} - \frac{1}{2K_{11}}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right]da + \left[\frac{K_2}{K_{22}} - \frac{1}{2K_{22}}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta}\right]d\theta\right\} \tag{1.8}$$

если выполняется условие интегрируемости [5]:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{K_1}{K_{11}} - \frac{1}{2K_{11}}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{K_2}{K_{22}} - \frac{1}{2K_{22}}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta}\right] \tag{1.9}$$

После получения решения (1.8) необходимо проверить, обладает ли оно всеми свойствами плотности вероятностей.

2. Пусть дана система Ван-дер-Поля со случайным и периодическим возбуждением при периодически изменяющейся собственной частоте. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + (\nu^2 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)x = \varepsilon(1-\gamma x^2)\dot{x} + \varepsilon P\cos\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t) \tag{2.1}$$

Здесь α, λ, γ, P, $\sigma = \text{const}$, α, $\gamma > 0$. В отсутствие периодического внешнего возбуждения ($P = 0$) уравнение (2.1) рассмотрено в [3], а периодического параметрического возбуждения ($\lambda = 0$) – в [6]. В данном случае

$$f(t, x, \dot{x}) = -2\alpha\dot{x} - \lambda\cos 2\nu t x + (1-\gamma x^2)\dot{x} + P\cos\nu t, \quad g(x, \dot{x}) = \sigma \tag{2.2}$$

Вычисление по формуле (1.5) дает следующие коэффициенты сноса и диффузии:

$$K_1(a, \theta) = \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a} - \frac{P\sin\theta}{2\nu} + \left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\lambda}{4\nu}\sin 2\theta\right)a - \frac{\gamma a^3}{8}$$

$$K_2(a, \theta) = -{}^1\!/_2 P\cos\theta/(\nu a) + {}^1\!/_4\lambda\cos 2\theta/\nu \tag{2.3}$$

$$K_{11}(a, \theta) = {}^1\!/_2\sigma^2/\nu^2, \quad K_{12}(a, \theta) = 0, \quad K_{22}(a, \theta) = {}^1\!/_2\sigma^2/(\nu^2 a^2).$$

Можно проверить, что для коэффициентов (2.3) условие интегрируемости (1.7) будет выполняться, следовательно, из (1.8) получим плотность вероятностей амплитуды и фазы решения системы (2.1):

$$W(a, \theta) = Ca\exp\left\{-\frac{2P\nu a}{\sigma^2}\sin\theta + \frac{2\nu^2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\lambda}{4\nu}\sin 2\theta\right)a^2 - \frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2}a^4\right\} \tag{2.4}$$

где C – постоянная нормировки. Из (2.4) видно, что при произвольных значениях линейного трения α и глубины модуляции λ плотность (2.4) всегда имеет место, а при стремлении к нулю периодических возбуждений (P, $\lambda \to 0$) она будет стремиться к плотности вероятностей амплитуды чистого случайного автоколебания. Наличие периодического параметрического возбуждения вызывает появление в плотности вероятностей (2.4) гармоники $\sin 2\theta$, а наличие внешней периодической силы – появление гармоники $\sin\theta$. Наиболее вероятностное значение амплитуды, определенной плотностью вероятностей (2.4) в отсутствие внешней периодической силы ($P = 0$), будет равно

$$a = \left(-\frac{\lambda}{\nu\gamma} + \frac{4}{\gamma}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\nu\gamma} - \frac{4}{\gamma}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right)^2 + \frac{2\sigma^2}{\gamma\nu^2}}\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

а в отсутствие периодического параметрического возбуждения ($\lambda=0$) будет определяться уравнением

$$\pm 2Pa/\nu=\sigma^2/\nu^2+4(1/2-\alpha)a^2-\gamma a^4/2 \tag{2.6}$$

Из (2.4), (2.5) и (2.6) следует, что при уменьшении собственной частоты ν значения плотности вероятностей и амплитуды будут увеличиваться и введение линейного трения не может погасить случайные колебания.

Пусть теперь в уравнении (2.1) вместо $\xi^{\cdot}(t)$ рассматривается экспоненциально-коррелированный центрированный стационарный процесс $q(t)$, который имеет спектральную плотность и корреляционную функцию

$$S_q(\omega)=\frac{\sigma_0^2}{\Pi}\frac{\eta}{\eta^2+\omega^2}, \qquad K_q(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\eta|\tau|}, \qquad \eta>0 \tag{2.7}$$

Если время корреляции процесса $\tau_*=\eta^{-1}$ достаточно мало, т. е. $\eta\gg\nu$, то в [10] доказано, что можно рассматривать $q(t)$ как «белый шум» с интенсивностью, равной $2\Pi S_q(\nu)$ ($S_q(\nu)$ – значение спектральной плотности процесса $q(t)$). Такое утверждение, без предположения о малости времени корреляции процесса $q(t)$, можно доказать при помощи метода усреднения [1–4, 9].

3. Пусть дана система Ван-дер-Поля со случайным и периодическим параметрическим возбуждением. Рассмотрим уравнение

$$x^{\cdot\cdot}+2\varepsilon\alpha x^{\cdot}+[\nu^2+\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t)]x=\varepsilon(1-\gamma x^2)x^{\cdot}+\varepsilon Px^2\cos\nu t \tag{3.1}$$

В отсутствие периодического параметрического возбуждения ($P=0$) уравнение (3.1) рассмотрено в [3, 4]. В данном случае

$$f(t, x, x^{\cdot})=-2\alpha x^{\cdot}+(1-\gamma x^2)x^{\cdot}+Px^2\cos\nu t, \qquad g(x, x^{\cdot})=-\sigma x \tag{3.2}$$

Вычисление по формуле (1.5) дает следующие коэффициенты сноса и диффузии:

$$\left.\begin{aligned}K_1(a,\theta)&=\left(\frac{3\sigma^2}{16\nu^2}+\frac{1}{2}-\alpha\right)a-\frac{Pa^2\sin\theta}{8\nu}-\frac{\gamma a^3}{8}\\ K_2(a,\theta)&=-\frac{3}{8}Pa\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

$$K_{11}(a, \theta)=\sigma^2a^2/(8\nu^2), \quad K_{12}(a, \theta)=0, \quad K_{22}(a, \theta)=3\sigma^2/(8\nu^2)$$

Для коэффициентов (3.3) условие интегрируемости (1.7) будет выполняться, следовательно, из (1.8) получим плотность вероятностей амплитуды и фазы решения системы (3.1):

$$W(a, \theta)=Ca^m\exp\left\{-\frac{2Pa\nu}{\sigma^2}\sin\theta-\frac{\gamma\nu^2}{\sigma^2}a^2\right\}, \tag{3.4}$$
$$m=8\nu^2(1-2\alpha)/\sigma^2+1,$$

Из (3.4) следует, что при значении линейного трения $\alpha=1/2$ плотность вероятностей (3.4) будет иметь такую же формулу как плотность вероятностей амплитуды и фазы линейной системы со случайным и периодическим внешним возбуждением [7]:

$$x^{\cdot\cdot}+2\varepsilon\gamma x^{\cdot}+\nu^2x=\varepsilon P\cos\nu t+\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t) \tag{3.5}$$

при отсутствии периодического параметрического возбуждения ($P=0$, $\alpha=1/2$) амплитуда случайных колебаний будет подчиняться распределению Релея. При

$$\alpha>1/2+\sigma^2/(16\nu^2) \tag{3.6}$$

функция (3.4) имеет в точке $a=0$ неинтегрируемую особенность и представляет собой дельта-функцию. Физический смысл полученного результтата ясен: при выполнении условия (3.6) линейная система ($\gamma=0$, $P=0$), соответствующая системе (3.1), будет стохастически устойчивой, и эта устойчивость является сильной в том смысле, что даже в присутствии периодического параметрического возбуждения и отрицательного трения ($P\neq 0$, $\gamma\neq 0$) колебаний с плотностью (3.4) не будет. Следовательно, начиная со значения $\alpha={}^1/_2+\sigma^2/(16\nu^2)$, можно погасить случайные колебания и такое граничное значение α не зависит от величины периодического параметрического возбуждения P. В то же время, как отмечено в п. 2, наличие линейного трения не может погасить случайные колебания в системе Ван-дер-Поля (и в линейной системе) со случайным и периодическим внешним возбуждением.

Полученное свойство представляет интерес для задач идентификации [3]. При

$$\alpha<{}^1/_2+\sigma^2/(16\nu^2) \tag{3.7}$$

функция (3.4) достигает экстремума в точках (a, θ), где

$$\begin{gathered}\partial W/\partial a=8\nu^2(1-2\alpha)+\sigma^2-2P\nu a\sin\theta-2\gamma\nu^2a^2=0\\ \partial W/\partial\theta=-2Pa\nu\cos\theta=0\end{gathered} \tag{3.8}$$

Решая систему (3.8), находим наиболее вероятностное значение амплитуды

$$a=\frac{P}{2\nu\gamma}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P^2}{\nu^2\gamma^2}+\frac{2}{\gamma}\left[\frac{\sigma^2}{\nu^2}+8(1-2\alpha)\right]} \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что при $\sigma\to 0$, $P\to 0$ случайные колебания с амплитудой (3.9) будут переходить в автоколебание с амплитудой, равной $2((1-2\alpha)/\gamma)^{1/2}$ и при уменьшении собственной частоты ν значение амплитуды будет увеличиваться.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 35 с.
3. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
4. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.– В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев: Изд-е Ин-та матем. АН УССР, 1976, с. 102–147.
5. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу об интегрируемости усредненных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова.– Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 45–48.
6. *Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык.* О решении уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для системы Ван-дер-Поля, подверженной периодическим и случайным возбуждениям.– Укр. мат. журн., 1982, т. 34, № 6, с. 779–783.
7. *Нгуен Донг Ань.* О периодических решениях усредненного уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка для линейной неавтономной механической системы с одной степенью свободы.– В кн.: Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. Киев. Изд-е Ин-та матем. АН УССР, 1984, с. 72–80.
8. *Nguyen Van Dao.* Nonlinear oscillations of third order systems.– In: Proc. VII Int. conf. on Nonlinear Oscillations. Prague: Academia, 1979, p. 517–522.
9. *Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык.* Случайные колебания в системах третьего порядка.– Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 5, с. 674–678.
10. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
11. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией.– Теория вероятностей и ее применения, 1963, т. 8, № 1, с. 3–25.

Вьетнам, Ханой

Поступила в редакцию
29.XII.1984