

УДК 531.44

О РАВНОВЕСИИ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ ТРЕНИЯ

ШВЕДЕНКО В. Н.

Основы теории равновесия плоской системы сил трения заложены в работе Н. Е. Жуковского [1]. Последующее развитие теории получила в работах [2-4]. Решение частных задач имеется в [5-7].

В настоящей работе представлены новые теоретические исследования по равновесию плоской системы сил трения. Найдены новые свойства момента сил трения. На их основе разработан расчетно-графический метод определения касательной силы, приводящей плоскую систему сил трения в состояние предельного равновесия.

1. Постановка задачи. Свойства поля момента сил трения. Твердое тело A опирается на неподвижную плоскую шероховатую поверхность B . Зона их контакта есть односвязная область D с гладкой или кусочно-гладкой границей. Нормальные давления распределены по D произвольным образом. Пусть поверхность B совпадает с координатной плоскостью xOy . Момент плоской системы сил трения для состояния предельного равновесия тела A , когда его скорость и ускорение равны нулю, рассчитывается по формуле

$$L(x, y) = \int_D fpr \, ds \quad (1.1)$$

где f — коэффициент трения, p — нормальное давление, r — расстояние от центра поворота $C(x, y)$ до элементарной площадки ds с координатами ξ, η (фиг. 1). Скалярное поле момента сил трения имеет один минимум, координаты которого находятся из условия $\partial L/\partial x = \partial L/\partial y = 0$ и соответствуют полюсу трения [1] — точке, вокруг которой происходит поворот при действии в плоскости контакта пары. Рассмотрим некоторые свойства скалярного поля момента сил трения.

Теорема 1. Изолинией момента сил трения является окружность, а поле момента сил трения есть множество концентрических окружностей с центром в полюсе трения.

Следует отметить, что вопрос об отыскании формы изолинии момента сил трения поставил Н. Е. Жуковский [1]. Здесь развиваются результаты этой работы.

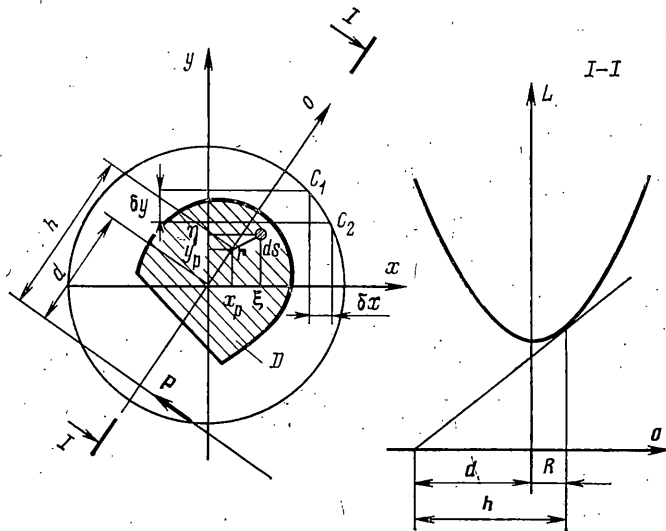
Пусть начало координат совпадает с полюсом трения. Для двух бесконечно близких точек $C_1(x, y)$ и $C_2(x+\delta x, y+\delta y)$, лежащих на одной изолинии момента сил трения, $\delta L = 0$. Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка, имеем

$$\delta L = (\partial L/\partial x) \delta x + (\partial L/\partial y) \delta y = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \int_D fp(x - \xi) r^{-1} \, ds, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \int_D fp(y - \eta) r^{-1} \, ds \quad (1.3)$$

Поскольку изолиния момента сил трения гладкая [4], то приращения δx и δy связаны

$$\delta y = \varphi'(x) \delta x \quad (1.4)$$



Фиг. 1

После подстановки (1.3) и (1.4) в (1.2) получим

$$\delta L = \int_D fp [x + \varphi(x) \varphi'(x)] r^{-1} ds \delta x - \int_D fp \xi r^{-1} ds \delta x - \int_D fp \eta r^{-1} ds \delta y = 0 \quad (1.5)$$

Так как координатные оси проходят через полюс трения, то

$$\int_D fp \xi r^{-1} ds = \int_D fp \eta r^{-1} ds = 0 \quad (1.6)$$

Равенство (1.5) при учете (1.6) для односвязной области выполняется только при

$$x + \varphi(x) \varphi'(x) = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение изолинии момента сил трения будет

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (1.8)$$

Таким образом, поле момента сил трения есть множество концентрических окружностей с центром в полюсе трения.

Следствие 1. Если $f = \text{const}$, то для точек, располагающихся на достаточно большом расстоянии от зоны контакта, изолинией момента сил трения будет окружность, центр которой расположен в центре нормальных давлений [1]. Следовательно, центр нормальных давлений совпадает с полюсом трения.

Следствие 2. Поверхность момента сил трения в координатных осях xuz (если по оси z откладывать значение момента сил трения) будет поверхностью вращения вокруг оси Oz .

Следует заметить, что асимптотой поверхности момента сил трения является коническая поверхность $z = G(x^2 + y^2)^{1/2}$, где $G = L$ ($f, p, r = 1$).

Плоская система сил трения, если главный вектор сил трения не равен нулю, приводится к силе трения F . Очевидно, что

$$Fh - L = 0 \quad (1.9)$$

где h — плечо силы трения относительно центра поворота. Известно, что данной линии действия силы трения соответствует только один центр поворота [1]. Рассмотрим, как связаны центр поворота и линия действия силы трения.

Теорема 2. Центр поворота соответствует точке касания поверхности момента сил трения плоскостью, проходящей через линию действия силы трения.

Уравнение плоскости, касающейся поверхности момента сил трения, если рассматривать ее в координатных осях xuz , имеет вид

$$(\partial L/\partial x)(x-x_p) + (\partial L/\partial y)(y-y_p) + z - L = 0 \quad (1.10)$$

где x_p, y_p — координаты центра поворота (фиг. 1), $\partial L/\partial x = Y, \partial L/\partial y = -X, X, Y$ — проекции силы трения на координатные оси. Тогда уравнение линии пересечения плоскости (1.10) с координатной плоскостью xOy запишется

$$Y(x-x_p) - X(y-y_p) - L = 0 \quad (1.11)$$

Уравнение прямой, по которой действует сила трения

$$Y(x-x_p) - X(y-y_p) - Fh = 0 \quad (1.12)$$

С учетом (1.9) очевидно тождественность уравнений (1.11) и (1.12). Следовательно, теорема верна.

Следствие 1. Так как изолиния момента сил трения есть окружность, то центр поворота и полюс трения лежат на прямой, перпендикулярной линии действия силы трения.

Следствие 2. По линиям, отстоящим от полюса трения на одинаковые расстояния, действуют равные по модулю силы трения.

2. Равновесие плоской системы сил трения. Если действующая на тело A в плоскости контакта система внешних сил и моментов приводится к равнодействующей P (внешней касательной силе) и при этом главный момент равен нулю, то для равновесия тела A необходимо и достаточно, чтобы P была бы не более силы трения, направленной по линии действия этой внешней силы [1], т. е. $P \leq F$. Если система внешних сил приводится к паре M , то условие равновесия имеет вид $M \leq L_0$, где L_0 — момент сил трения при повороте тела вокруг полюса трения. Рассмотрим случай, когда на тело A действует внешняя касательная сила P , направление и точка приложения которой известны; закон распределения нормального давления по зоне контакта определен. Требуется рассчитать величину касательной силы для предельного равновесия системы сил трения ($P_{cr} = F$). Предлагается следующая схема расчетно-графического метода решения задачи.

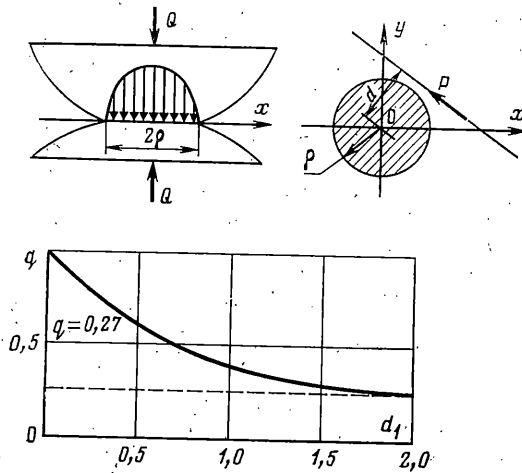
Находятся координаты полюса трения. При $f = \text{const}$ полюс трения находится в центре давлений. Когда $f \neq \text{const}$, приводим его к среднему по зоне контакта $\langle f \rangle$, а нормальные давления считаем перераспределенными по приведенному закону $p_n = p\psi$, где $\langle f \rangle \psi(\xi, \eta)$ — закон распределения коэффициента трения по зоне контакта (предложен А. П. Саввиным).

Строится прямая, на которой находится центр поворота, поскольку эта прямая проходит через полюс трения нормально к линии действия силы P .

Определяются координаты центра поворота и модуль критической касательной силы P . Центр поворота соответствует координатам точки касания поверхности момента сил трения плоскостью, проходящей через линию действия силы трения. Поверхность момента сил трения есть поверхность вращения, поэтому достаточно знать зависимость момента сил трения на любом луче o в плоскости xOy , выходящем из полюса трения. Для симметричной области D этим лучом может быть ось симметрии, что упрощает интегрирование (1.1). Определить значение плеча и момента сил трения можно аналитически, решая уравнение (1.9), которое преобразуется к следующему виду:

$$\int_D f p [(R - \xi)^2 + \eta^2]^{1/2} ds - (R + d) \int_D f p (R - \xi) [(R - \xi)^2 + \eta^2]^{-1/2} ds = 0 \quad (2.1)$$

где d — расстояние от линии действия внешней касательной силы до



Фиг. 2

полюса трения, R — расстояние от текущей точки на луче o до полюса трения. Однако даже в простейших случаях, например когда область контакта прямоугольная или круговая и распределение нормального давления равномерное, (2.1) представляют собой трансцендентное уравнение, дающее в параметрической форме связь между внешней силой, ее плечом относительно центра поворота и нормальным давлением, из которого не может быть исключен параметр R [2]. Поэтому предлагается графический способ решения уравнения (2.1). Для этого по графику $L=L(R)$ определяются координаты центра поворота и соответствующее ему значение момента сил трения согласно теореме 2 (см. фиг. 1). Таким образом будут определены модуль касательной силы P и центр поворота для предельного равновесия плоской системы сил трения

$$P_{cr} = Lh^{-1} \quad (2.2)$$

3. Подобные плоские системы сил трения. Для геометрически подобных зон контакта, у которых нормальные давления в сходственных точках пропорциональны, центры поворота располагаются аналогичным образом [3]. В безразмерном виде уравнение (2.1) запишется

$$k = gh_1, \quad q = P_{cr}(Qf)^{-1}, \quad k = S_1 \int_{D_1} \chi [(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2]^{1/2} ds_1 \quad (3.1)$$

где $h_1 = hH^{-1}$ — безразмерная величина, $\chi(\xi_1, \eta_1)$ — функция, описывающая закон распределения нормального давления по зоне контакта [3], $S_1 = SH^{-2}$, S — площадь зоны контакта D . Индексом 1 обозначены геометрические параметры, отнесенные к произвольному размеру зоны контакта H^n (для линейных $n=1$, для плоских $n=2$). Для подобных плоских систем сил трения значение коэффициента трения q не зависит от абсолютных размеров зоны контакта, коэффициента трения и нормального давления, а зависит от d_1 , тогда

$$P_{cr} = Qfq \quad (3.2)$$

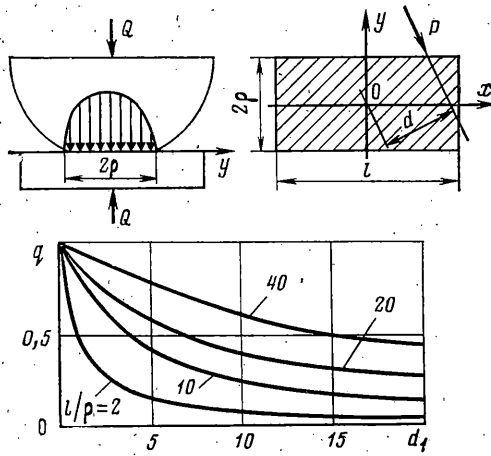
Так как $h_1 = d_1 + R_1$, $R_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$, то, решая уравнение (3.1) относительно d_1 , можно получить зависимость $q = q(d_1)$. Это позволяет построить универсальные номограммы для расчета подобных плоских систем сил трения.

4. Пример 1. Два упругих шара сжаты силой Q . Зоной их контакта будет круг радиуса ρ . Нормальное давление в пределах зоны контакта изменяются по закону Герца

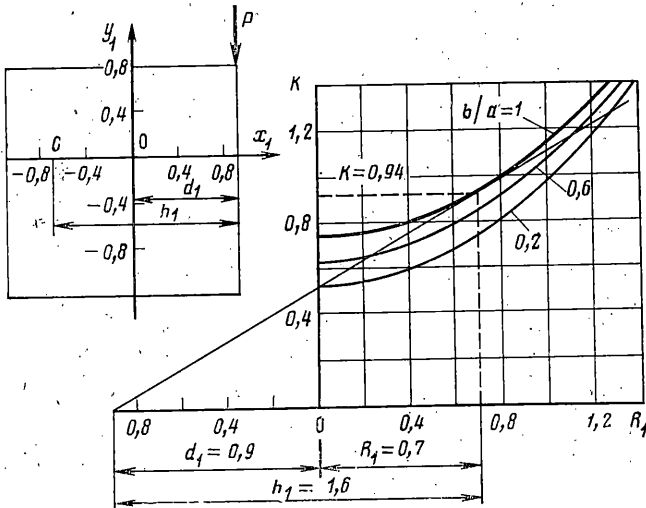
$$p(\xi, \eta) = 3Q(1 - \xi^2/\rho^2 - \eta^2/\rho^2)^{1/2} / (2\pi\rho^2) \quad (4.1)$$

Пусть $H = \rho$, тогда $\chi = 3/2(1 - \xi_1^2 - \eta_1^2)^{1/2}$, а выражение (3.1) запишется

$$\frac{3}{2\pi} \int_{D_1} \{ (1 - \xi_1^2 - \eta_1^2) [(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2] \}^{1/2} ds_1 = [d_1 + (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}] q \quad (4.2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Уравнение (4.2) решалось численным методом путем последовательных приближений. В результате получена зависимость $q=q(d_1)$ (фиг. 2), которая позволяет определять значение P_{cr} для данного типа контактов. Например, стальной шар, радиус которого $0,15$ м, сжат двумя плитами силой $Q=1000$ Н, $f=0,12$. Касательная сила P действует в плоскости, которая параллельна плитам, и проходит через центр шара. Линия действия силы P отстоит от центра шара на расстоянии $d=2 \cdot 10^{-3}$ м. Для указанных условий $\rho=10^{-3}$ м. Тогда $d_1=2$, а $q=0,27$. По формуле (3.2) рассчитывается модуль касательной силы: $P_{cr}=64,8$ Н. Если сила проходит через центр шара, то $d_1=0$, $q=1$, а $P_{cr}=240$ Н. Следовательно, небольшие отклонения касательной силы от центра шара приводят к существенному уменьшению ее модуля.

Пример 2. Упругий цилиндр прижат к плите силой Q . Зона их контакта — прямоугольник длины l и ширины 2ρ . Нормальное давление в пределах зоны контакта изменяется по закону Герца

$$p(\xi, \eta) = 2Q [1 - (\eta/\rho)^2]^{1/2} / (\pi\rho l) \quad (4.3)$$

Пусть $H=\rho$, тогда $\chi=4(1-\eta_1^2)^{1/2}/\pi$, а выражение (3.1) запишется

$$\frac{2}{\pi l_1} \int_{D_1} \{(1 - \eta_1^2) [(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2]\}^{1/2} ds_1 = [d_1 + (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}] q \quad (4.4)$$

Полученные расчетным путем зависимости $q=q(d_1)$ для различных l_1 показаны на фиг. 3. Анализ показывает, что с удалением линии действия внешней касательной силы от центра зоны контакта q уменьшается, а для $d_1 \gg l_1$ зависимость $q=q(d_1)$ приближается к гиперболе $q=1/d_1$.

Пример 3. Рассматриваемая зона контакта — прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ ($a > b$, $H=a$). Пусть закон распределения нормального давления по зоне контакта описывается линейной функцией $\chi=1+0,3\xi_1+0,6\eta_1$, тогда

$$k = \frac{a}{4b} \int_{D_1} (1 + 0,3 \xi_1 + 0,6 \eta_1) [(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2]^{1/2} ds_1 \quad (4.5)$$

На фиг. 4 представлены графики $k=k(R_1)$ для различных отношений b/a . Там же показан пример, как определяются координаты центра поворота и модуль касательной силы графическим методом. Пусть линия действия силы P совпадает с правой границей зоны контакта. Если $Q=1000$ Н и $f=0,15$, то $P_{cr}=1000 \cdot 0,15 \cdot (0,94/1,6)=88$ Н.

Работа выполнена под руководством А. П. Саввина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением.— В кн.: Собр. соч. Т. 1. Общая механика. М.—Л.: Гостехиздат, 1948, с. 339–354.
2. Саввин А. П. О плоской системе сил трения.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 1, с. 144–149.
3. Саввин А. П. Плоская система сил трения.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3, с. 160–164.
4. Опейко Ф. А. Математическая теория трения. Минск: Наука и техника, 1971. 150 с.
5. Саввин А. П. Расчет прямоугольных фрикционных стыков.— Вестн. машиностроения, 1969, № 12, с. 19–21.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. Фейзекас Г. Предельная эксцентрическая нагрузка на крепежные детали.— Тр. америк. о. инж. мех. Конструирование и технология машиностроения, 1976, № 3, с. 1–4.

Кострома

Поступила в редакцию
21.IX.1983