МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1986

УДК 531.38

КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТЯЖЕЛУЮ НЕОДНОРОДНУЮ ЖИДКОСТЬ

АКУЛЕНКО Л. Д., НЕСТЕРОВ С. В.

В линейной постановке исследуется задача об одномерных колебаниях твердого тела, имеющего прямоугольную полость и упругосвязанного с неподвижным основанием [1]. Полость целиком заполнена тяжелой двухслойной жидкостью, которая может совершать плоские движения [2]. Асимптотическими методами [3, 4] построено приближенное решение задачи о взаимодействии колебаний такого сосуда и жидкости при различных предположениях относительно частот, обусловленных упругой связью и собственными колебаниями двухслойной жидкости; обнаружены качественные эффекты.

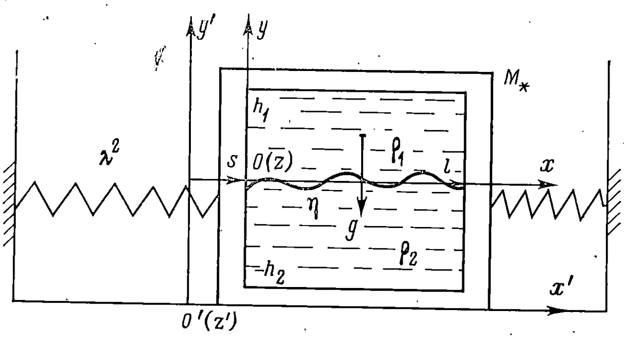
1. Рассматривается движение механической системы, представленной на фигуре. Считается, что полость в твердом теле имеет форму прямоугольного параллелепипеда, а ее дно параллельно горизонтальной плоскости $O'x'z'$. Полость имеет длину l, высоту (глубину) h и ширину r; она целиком заполнена двухслойной жидкостью, плотность верхнего слоя которой равна $\rho_1\geqslant 0$, а нижнего — ρ_2, причем $\rho_2>\rho_1$. Жидкости считаются идеальными и несжимаемыми. На частицы жидкостей действует сила тяжести, ускорение которой g. Твердое тело (сосуд) может без трения перемещаться в горизонтальном направлении $O'x'$ под действием линейной упругой силы, как это представлено на фигуре.

Предполагается, что в начальный момент времени $t=0$ сосуд смещен из положения равновесия на расстояние s°, начальная скорость его равна нулю, а поверхность раздела жидкостей горизонтальна и импульсные давления не прилагаются [1]. Задача состоит в том, чтобы определить последующее при $t>0$ движение твердого тела с учетом влияния возникающих на поверхности раздела жидкостей внутренних волн. Отметим, что периодические колебания сосуда, содержащего однородную тяжелую жидкость со свободной поверхностью, подробно изучены Л. Н. Сретенским [1]. Движения сосуда и жидкости как однородной со свободной поверхностью, так и двухслойной в рассматриваемой постановке задачи оказываются непериодическими.

Поскольку движение сосуда одномерно, то движения жидкостей будут двумерными (в плоскости $O'x'y'$) и потенциальными. Чтобы их описать, введем подвижную систему координат $Oxyz$, связанную с левой стенкой сосуда; ось Ox направлена вдоль невозмущенной линии раздела жидкостей, а Oy — вертикально вверх. Через h_1 и h_2 обозначим глубины слоев, $h=h_1+h_2$; через $\Phi_{1,2}(x, y, t)$ — потенциалы скоростей для соответствующих слоев жидкости: $x\in[0, l]$, $y\in[0, h_1]$ и $y\in[-h_2, 0]$, $z\in[0, r]$; далее, $y=\eta(x, t)$ — возвышение границы раздела, $c=c(t)$ — скорость перемещения сосуда. Принимается условие, что ускорение сосуда $c^\cdot(t)$ удовлетворяет сильному неравенству $|c^\cdot(t)|\ll g$, $t\in[0, T]$, $T<\infty$. Тогда согласно [1] можно выписать линеаризованные краевые условия на границе раздела жидкостей для потенциалов $\Phi_{1,2}$ и возвышения η:

$$\left(\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)\bigg|_{y=0}-g(\rho_2-\rho_1)\eta=-(\rho_2-\rho_1)c^\cdot x \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \quad t\in[0, T] \qquad (1.2)$$



Условие (1.1) означает равенство давлений на границе раздела двух жидкостей, а (1.2) суть кинематические условия, означающие то, что частицы жидкости, находящиеся на поверхности раздела (при $y=\eta\pm 0$), движутся вместе с этой поверхностью. На твердых стенках сосуда выполняются условия непротекания жидкостей

$$\left.\frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial x}\right|_{x=0,\ l}=0,\quad \left.\frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial y}\right|_{y=y_{1,2}}=0,\quad t\in[0,T],\quad y_1=h_1,\quad y_2=-h_2 \tag{1.3}$$

Начальные условия, налагаемые на потенциалы $\Phi_{1,2}$ и возвышение η, принимаются нулевыми, т. е. при $t=0$:

$$\Phi_{1,2}(x,\ y,\ 0)=0,\quad \eta(x,\ 0)=0 \tag{1.4}$$

Искомые потенциалы скоростей $\Phi_{1,2}$, описывающие относительные движения жидкостей в соответствующих областях, удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi_{1,2}=0\quad (\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2) \tag{1.5}$$

с приведенными выше краевыми и начальными условиями (1.1)—(1.4). Зависимость гармонических функций $\Phi_{1,2}$ от времени t как от параметра определяется условием (1.1).

2. Применяя метод Фурье к краевой задаче (1.1)—(1.5), в которой функция $c(t)$ пока считается заданной, можно получить следующие выражения для искомых потенциалов $\Phi_{1,2}$ в виде рядов [2]:

$$\Phi_{1,2}(x,y,t)=a_{1,2}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\left[b_{2k+1}^{(1,2)}(t)+c_{2k+1}^{(1,2)}\sin\omega_{2k+1}t\right]\times$$
$$\times\cos(2k+1)x^*\operatorname{ch}(2k+1)(y_{1,2}^*-y^*),\quad x^*=\pi x l^{-1},\quad y^*=\pi y l^{-1} \tag{2.1}$$

$$\eta(x,t)=-\frac{4l}{\pi^2 g}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x^*\int_0^t c^{\cdot}(\tau)\sin\omega_{2k+1}(t-\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

Между функциями $a_{1,2}(t)$ существует дифференциальная связь (см. (1.1)):

$$\rho_2 a_2^{\cdot}-\rho_1 a_1^{\cdot}={}^1/_2(\rho_2-\rho_1)lc^{\cdot},\quad t\in[0,\ T] \tag{2.3}$$

Частоты ω_{2k+1} собственных колебаний двухслойной жидкости определяются соотношениями ($k=0,\ 1,\ldots$):

$$\omega_{2k+1}^2=\frac{(\rho_2-\rho_1)(gl^{-1})(2k+1)\operatorname{th}(2k+1)y_1^*\operatorname{th}(2k+1)|y_2^*|}{\rho_2\operatorname{th}(2k+1)y_1^*+\rho_1\operatorname{th}(2k+1)|y_2^*|} \tag{2.4}$$

При $k\to\infty$ асимптотика частот имеет вид $\omega_{2k+1}\sim\sqrt{k}$, т. е. частоты образуют сгущающуюся последовательность: $(\omega_{2k+1}-\omega_{2k-1})\sim 1/\sqrt{k}$, что объясняется положительной дисперсией волн в жидкости [1, 2].

Если движение сосуда задано, т. е. функция $c(t)$ известна, то коэффициенты $b_{2k+1}^{(1,2)}(t)$, $c_{2k+1}^{(1,2)}$ определяются однозначно

$$b_{2k+1}^{(1,2)}(t)=\frac{4l^2\omega_{2k+1}}{\pi^3 g(2k+1)^3\,\mathrm{sh}(2k+1)\,y_{1,2}^*}\int_0^t c^{\cdot\cdot}(\tau)\sin\omega_{2k+1}(t-\tau)\,d\tau$$

$$c_{2k+1}^{(1,2)}=\frac{4l^2\omega_{2k+1}}{\pi^3 g(2k+1)^3\,\mathrm{sh}(2k+1)\,y_{1,2}^*}c^{\cdot}(0) \tag{2.5}$$

При условии, что функция $c^{\cdot}(t)$ непрерывна, ряды (2.1), (2.2) абсолютно и равномерно сходятся в рассматриваемой области изменения аргументов x, y, t (решение от координаты z не зависит)

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad h_1\geqslant y\geqslant 0\cup 0\geqslant y\geqslant -h_2,\quad 0\leqslant t\leqslant T<\infty \tag{2.6}$$

Сходимость устанавливается при помощи мажорантного признака Вейерштрасса с учетом асимптотики частот (2.4). Отметим, что решение задачи о колебаниях однородной жидкости со свободной поверхностью [1] получается из формул (2.1)–(2.6) при $\rho_1=0$. Движение жидкости плотности ρ_2 определяется потенциалом скоростей Φ_2 и границей свободной поверхности $y=\eta(x, t)$.

При помощи линеаризованного выражения для интеграла Бернулли и найденных $\Phi_{1,2}$ получаются выражения для давлений $P_{1,2}$ (см. [1]):

$$P_{1,2}(x, y, t)=\rho_{1,2}(\partial\Phi_{1,2}/\partial t-gy-c^{\cdot}x) \tag{2.7}$$

Искомое уравнение движения сосуда получается просто после вычисления результирующей $X(t)$ сил давления $P_{1,2}$ (2.7) на боковые стенки, т. е. при $x=0$, l:

$$X(t)=-\Big(\int_{-h_2}^{0}P_2dy+\int_0^{h_1}P_1dy\Big)_{x=0}r+\Big(\int_{-h_2}^{0}P_2dy+\int_0^{h_1}P_1dy\Big)_{x=l}r \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.7) функции $\Phi_{1,2}$ (2.1), а затем $P_{1,2}$ в (2.8) и интегрируя по y и по t (по частям), можно получить

$$X(t)=-\frac{8}{\pi^4}\frac{rl^3}{g}(\rho_2-\rho_1)c^{\cdot}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}^2}{(2k+1)^4}-(\rho_1h_1+\rho_2h_2)rlc^{\cdot}-$$
$$-\frac{8}{\pi^4}\frac{rl^3}{g}(\rho_2-\rho_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}^3}{(2k+1)^4}\int_0^t c^{\cdot}(\tau)\sin\omega_{2k+1}(t-\tau)\,d\tau \tag{2.9}$$

При условии непрерывности ускорения сосуда $c^{\cdot}(t)$ функциональный ряд в (2.9) абсолютно и равномерно сходится, а $X(t)$ — непрерывная функция t.

3. Для описания колебаний сосуда относительно неподвижного основания вводятся переменные: $s(t)$ — смещение сосуда из положения равновесия и $c(t)=s^{\cdot}(t)$ — абсолютная скорость. Пусть M_* — масса тела, а λ^2 — коэффициент жесткости упругой силы; тогда уравнение движения имеет вид

$$M_*s^{\cdot\cdot}+\lambda^2 s=-\Big[(\rho_1h_1+\rho_2h_2)rl+\frac{8}{\pi^4}\frac{rl^3}{g}(\rho_2-\rho_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}^2}{(2k+1)^4}\Big]s^{\cdot\cdot}-$$
$$-\frac{8}{\pi^4}\frac{rl^3}{g}(\rho_2-\rho_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}^3}{(2k+1)^4}\int_0^t s^{\cdot\cdot}(\tau)\sin\omega_{2k+1}(t-\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

Для сокращения записи уравнения (3.1) вводятся обозначения

$$M=M_*+(\rho_1h_1+\rho_2h_2)rl+\frac{8}{\pi^4}\frac{rl^3}{g}(\rho_2-\rho_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}^2}{(2k+1)^4}$$

$$\Omega^2=\lambda^2/M,\quad \varepsilon=8\pi^{-4}rl^3(\rho_2-\rho_1)\Omega^2/Mg>0 \tag{3.2}$$

При помощи обозначений (3.2) уравнение (3.1) приводится к виду линейного интегродифференциального уравнения относительно $s(t)$:

$$s^{\cdot\cdot} + \Omega^2 s = -\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{2k+1}^3}{(2k+1)^4} \frac{1}{\Omega^2} \int_0^t s^{\cdot\cdot}(\tau) \sin \omega_{2k+1}(t-\tau)\, d\tau \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) должно быть решено при соответствующих начальных условиях, которые в силу предположений п. 1 имеют вид

$$s(0) = s^\circ, \quad s^{\cdot}(0) = 0 \quad (c(0) = 0) \tag{3.4}$$

Решение задачи Коши (3.3), (3.4) может быть представлено при помощи преобразования Лапласа и методов операционного исчисления в виде контурного интеграла [3]:

$$s(t) = \frac{s^0}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{p(1 + \varepsilon F(p^2))}{p^2 + \Omega^2 + \varepsilon p^2 F(p^2)} \exp(pt)\, dp \tag{3.5}$$

$$i = \sqrt{-1} \quad F(p^2) \equiv \frac{1}{\Omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{2k+1}^4}{(2k+1)^4 (p^2 + \omega_{2k+1}^2)}$$

Интеграл (3.5) вычисляется на основе теории вычетов и леммы Жордана [3]. Полюсы подынтегральной функции чисто мнимые $p = i\xi$ и определяются корнями знаменателя

$$\xi^2 - \Omega^2 + \varepsilon \frac{\xi^2}{\Omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{2k+1}^4}{(2k+1)^4 (\omega_{2k+1}^2 - \xi^2)} \tag{3.6}$$

Графическими методами аналогично [1] устанавливается, что уравнение (3.6) допускает счетное множество корней $\{\xi_n\}$, симметрично расположенных относительно нуля. Пусть эти корни найдены; тогда искомое решение задачи Коши (3.3), (3.4) представимо в виде

$$s(t) = s^0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon F(z)}{1 + \varepsilon [zF(z)]_z'} \bigg|_{z = -\xi_n^2} \cos \xi_n t \tag{3.7}$$

Из выражения (3.7) непосредственно следует свойство четности функции $s(t)$ относительно $t = 0$, что легко установить также из симметрии задачи (3.3), (3.4) по t. Найденное решение в виде (3.7) построено формально и для качественного анализа движений сосуда не пригодно. Исследование поведения корней ξ_n и свойств сходимости ряда (3.7) вызывает значительные трудности. Интегродифференциальное уравнение (3.3) представляет сложный объект для асимптотического исследования при $\varepsilon \ll 1$, не изученный в математической литературе, поскольку его ядро есть почти-периодическая функция.

4. Далее асимптотическими методами [4] исследуется решение задачи Коши (3.3), (3.4) в важном для приложений случае, когда определенный в (3.2) числовой параметр ε является малым, т. е. $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$. При асимптотическом подходе движение системы рассматривается на большом интервале времени t, на котором происходит существенное изменение его характеристик (амплитуды колебаний, полной энергии и т. п.), что интересно для практики. Качественно различаются два случая: резонансный ($\omega_{2m+1} = \Omega$) и нерезонансный ($\omega_{2k+1} \neq \Omega$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) [4].

Пусть $\Omega = \omega_{2m+1}$, где m фиксировано; тогда наряду с исходной задачей Коши (3.3), (3.4) рассматривается «усеченная» в которой отброшены члены ряда с $k = m$:

$$S^{\cdot\cdot} + \Omega^2 S = -\varepsilon \frac{\Omega}{(2m+1)^4} \int_0^t S^{\cdot\cdot}(\tau) \sin \Omega(t-\tau)\, d\tau, \quad S(0) = s^0, \quad S^{\cdot}(0) = 0 \tag{4.1}$$

При помощи методов операционного исчисления и теории вычетов аналогично п. 3 находится решение задачи (4.1)

$$S = S_*(t, \varepsilon) = \frac{s^0}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{p(p^2 + \Omega^2 + \varepsilon\Omega^2(2m+1)^{-4} e^{pt} dp}{(p^2 + \Omega^2)^2 + \varepsilon\Omega^2 p (2m+1)^{-4}} =$$

$$= s^0 (\cos \Omega^* t \cos \sqrt{\varepsilon}\, \mu\Omega t + \sqrt{\varepsilon}\, \mu \sin \Omega^* t \sin \sqrt{\varepsilon}\, \mu\Omega t)$$

$$\Omega^*(\varepsilon) = \Omega(1 + \varepsilon\mu^2)^{1/2}, \quad \mu = {}^1/_2 (2m+1)^{-2} \qquad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что колебания системы (4.1) происходят с частотой $\Omega^* = \Omega(1 + O(\varepsilon))$, а амплитуда колебаний медленно периодически изменяется с частотой $O(\sqrt{\varepsilon})$. Характерное время изменения амплитуды от значений $|s^\circ|$ до величин $O(\sqrt{\varepsilon})$ равно $t^* = \pi/2\sqrt{\varepsilon}\mu\Omega = \pi(2m+1)^2/\sqrt{\varepsilon}\Omega = O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

Применение метода последовательных приближений Пикара к исходной задаче (3.3), (3.4), в которой остаточная сумма ряда (при $k \neq m$) считается возмущением, а функция $S_*(t, \varepsilon)$ (4.2) – начальным приближением, несостоятельно для построения решения на асимптотически большом интервале времени $t \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, а тем более для $t \sim 1/\varepsilon$ или $t \in [0, \infty)$. Это объясняется трудностями, обусловленными возможностью появления «малых знаменателей» вида $k_\Omega \Omega_* + k_\omega \omega_{2k+1}$, k_Ω, $k_\omega = \pm 1, \pm 2, \ldots, k \neq m$, $\Omega_* = \Omega[(1 + \varepsilon\mu^2)^{1/2} \pm \sqrt{\varepsilon}\mu]$.

Асимптотический подход позволяет установить, что решение S_* дает хорошую аппроксимацию исходного s:

$$|s(t, \varepsilon) - S_*(t, \varepsilon)| \leqslant |s^\circ| C(\vartheta) \sqrt{\varepsilon}, \quad t \in [0, \vartheta/\sqrt{\varepsilon}] \qquad (4.3)$$

При этом в выражении S_* могут быть отброшены члены $O(\sqrt{\varepsilon})$, т. е. в качестве решения первого приближения можно взять

$$s_*(t, \varepsilon) = s^\circ \cos \Omega t \cos \sqrt{\varepsilon} \mu \Omega t, \quad t \in [0, \vartheta/\sqrt{\varepsilon}] \qquad (4.4)$$

Обосновать оценку (4.3) для решения s_* (4.4) можно при помощи метода усреднения после приведения задачи Коши (3.3), (3.4) к соответствующей системе интегродифференциальных уравнений «стандартного» вида. Предварительно исходная задача записывается в более удобной форме:

$$s'' + s = -\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_{2k+1}^4}{(2k+1)^4} \int_0^t s'(\sigma)\, \nu_{2k+1}(\theta - \sigma)\, d\sigma \qquad (4.5)$$

$$s = s(\theta, \varepsilon), \quad \theta = \Omega t, \quad \nu_{2k+1} = \omega_{2k+1}/\Omega, \quad s(0) = s^\circ, \quad s'(0) = 0$$

Штрих здесь и далее означает производную по новому аргументу $\theta \in [0, \Theta]$, $\Theta = \Omega T$. Система (4.5) приводится к оскулирующим переменным a, b типа Ван-дер-Поля [4] посредством замены

$$s = a \cos \theta + b \sin \theta, \quad s' = -a \sin \theta + b \cos \theta \qquad (4.6)$$

Дифференцирование по θ замены (4.6) в силу (4.5) приводит к системе линейных интегродифференциальных уравнений относительно a, b «стандартного» вида [4]:

$$a' = \varepsilon \int_0^\theta \sin \theta \chi(\theta - \sigma) [-a(\sigma) \sin \sigma + b(\sigma) \cos \sigma]\, d\sigma, \quad a(0) = s^\circ \qquad (4.7)$$

$$b' = -\varepsilon \int_0^\theta \cos \theta \chi(\theta - \sigma) [-a(\sigma) \sin \sigma + b(\sigma) \cos \sigma]\, d\sigma, \quad b(0) = 0$$

$$\chi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_{2k+1}^4}{(2k+1)^4} \cos \nu_{2k+1} \theta \qquad (4.8)$$

Поскольку $\nu_{2k+1} \sim \sqrt{k}$, то на основе мажорантного признака Вейерштрасса ряд (4.8) абсолютно и равномерно сходится к почти-периодической функции $\chi(\theta)$ для $|\theta|<\infty$, причем существует непрерывная производная $\chi'(\theta)$. Основные свойства почти-периодических функций, используемые ниже, приведены, например, в [5].

Система (4.7) представляется в более компактной векторной форме

$$w' = \varepsilon \int_0^\theta K(\theta, \sigma)\, w(\sigma)\, d\sigma, \quad w(0) = w^\circ, \quad \theta \in [0, \Theta] \tag{4.9}$$

Здесь w — вектор произвольной размерности (в частности, для системы (4.7) — двумерный, $w=(a, b)$), а элементы квадратной матрицы $K(\theta, \sigma)$ почти периодичны по каждому аргументу θ, σ и удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и $\chi(\theta)$ в (4.8).

В рассматриваемом ниже резонансном случае $\nu_{2m+1}=1$ справедливы соотношения [5]:

$$\int_0^\theta K(\theta, \sigma)\, d\sigma = K_0(\theta)\,\theta + K_1(\theta), \quad K_0(\theta) = \lim_{\Theta\to\infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta K(\theta, \sigma)\, d\sigma \tag{4.10}$$

Интегрирование матрицы в (4.10) и далее имеет обычный смысл; $K_0(\theta)$, $K_1(\theta)$ — матрицы, элементы которых суть почти-периодические функции θ, $|\theta|<\infty$, допускающие уже двукратное дифференцирование. Свойства гладкости для дальнейшего не существенны: приводимые ниже построения требуют лишь непрерывности.

Исходной задаче (4.9) сопоставляется следующая «усредненная»:

$$\zeta'(\theta) = \varepsilon K_* \int_0^\theta \zeta(\sigma)\, d\sigma, \quad \zeta(0) = w^\circ, \quad K_* = \lim_{\Theta\to\infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta K_0(\theta)\, d\theta, \quad K_* — \mathrm{const} \tag{4.11}$$

В системе (4.11) постоянная матрица K_* получается последовательным усреднением матрицы $K(\theta, \sigma)$ по σ и θ согласно (4.10), (4.11). Для рассматриваемой задачи (4.7) можно получить

$$K_* = -\mu^2 E \quad (\zeta = (\alpha, \beta)) \tag{4.12}$$

Здесь K_* — диагональная (симметрическая), а E — единичная (2×2)-матрицы; коэффициент μ определен в (4.2). Из (4.10)—(4.12) следует, что соответствующая (4.7) «усредненная» система расщепляется на два независимых легко решаемых уравнения для α и β:

$$\alpha'(\theta) = -\varepsilon\mu^2 \int_0^\theta \alpha(\sigma)\, d\sigma, \quad \alpha(0) = s^\circ, \quad \alpha(\theta, \varepsilon) = s^\circ \cos \sqrt{\varepsilon}\,\mu\theta$$

$$\beta'(\theta) = -\varepsilon\mu^2 \int_0^\theta \beta(\sigma)\, d\sigma, \quad \beta(0) = 0, \quad \beta(\theta, \varepsilon) \equiv 0 \tag{4.13}$$

Подстановка приближенного решения (4.13) $a\approx\alpha$, $b\approx\beta$ в формулы замены (4.6) приводит к функции $s_*(\theta; \varepsilon)$ (4.4).

Таким образом, «усредненная» задача для системы интегродифференциальных уравнений (4.11) эквивалентна следующей задаче Коши для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\zeta'' = \varepsilon K_* \zeta, \quad \zeta(0) = w^\circ, \quad \zeta'(0) = 0 \tag{4.14}$$

Введение «медленного аргумента» $\varkappa = \sqrt{\varepsilon}\theta$ позволяет свести решение задачи Коши (4.14) к сравнительно простой задаче определения собственных значений λ_*^2 матрицы K_*, т. е. к решению относительно λ_*^2 алгебраического уравнения $|K_* - \lambda_*^2 E| = 0$, где E — единичная матрица размерности вектора w. В результате искомый вектор ζ представляется в виде

$$\zeta=\zeta(\varkappa, w^\circ)=N(\varkappa)w^\circ, \quad N(0)=E, \quad N'(0)=0 \tag{4.15}$$

где N — известная матрица. Как следует из (4.15), существенное изменение вектора ζ, $(\zeta-w^\circ)\sim 1$ происходит на интервале $\varkappa\sim 1$, т.е. $\theta\sim 1/\sqrt{\varepsilon}$.

Обоснование близости решения $\zeta(\varkappa, w^\circ)$ усредненной задачи (4.11) или эквивалентной ей (4.14) к решению $w(\theta, \varepsilon, w^\circ)$ исходной задачи (4.9) проводится, как обычно [4], оценкой разности $(w-\zeta)$ в равномерной метрике для $\theta\in[0,\Theta]$, где Θ асимптотически велико и подлежит определению. Уравнение для $(w-\zeta)$ и начальное значение имеют вид

$$(w-\zeta)'=\varepsilon\int_0^\theta K(\theta,\sigma)(w-\zeta)\,d\sigma+\varepsilon\int_0^\theta[K(\theta,\sigma)-K_*]\zeta\,d\sigma, \quad (w-\zeta)|_{\theta=0}=0 \tag{4.16}$$

Уравнение (4.16) квадратурой приводится к интегральному

$$w-\zeta=\varepsilon\int_0^\theta Q(\theta,\gamma)(w-\zeta)\,d\gamma+\varepsilon\int_0^\theta P(\theta,\gamma)\zeta\,d\gamma \tag{4.17}$$

$$Q(\theta,\gamma)\equiv\int_\gamma^\theta K(\sigma,\gamma)\,d\sigma, \quad P(\theta,\gamma)\equiv\int_\gamma^\theta[K(\sigma,\gamma)-K_*]\,d\sigma$$

Для модуля разности $\Delta=|w-\zeta|$ справедлива оценка (неравенство Гронуолла [6]):

$$\Delta\leqslant\int_0^\theta\|Q\|\Delta\,d\gamma+\varepsilon\left|\int_0^\theta P\zeta\,d\gamma\right|\leqslant\varepsilon\Big(\sup_{\theta\in[0,\Theta]}\left|\int_0^\theta P\zeta\,d\gamma\right|\Big)\exp\Big(\varepsilon\int_0^\theta\|Q\|\,d\gamma\Big) \tag{4.18}$$

Здесь $\|Q\|$ — некоторая норма матрицы Q [7]. Из (4.17) и свойств матрицы $K(\theta,\sigma)$ следуют оценки для $\theta\in[0,\infty)$:

$$\int_0^\theta\|Q\|\,d\gamma\leqslant\frac{1}{2}g\theta^2, \quad g=\sup_{\theta,\sigma}\|K(\theta,\sigma)\|, \quad |\theta|, |\sigma|<\infty \tag{4.19}$$

$$\left|\int_0^\theta P\zeta\,d\gamma\right|\leqslant|w^\circ|[(p_1^{(1)}\theta+p_0^{(1)})\|N(\varkappa)\|+$$

$$+(p_1^{(0)}\theta+p_0^{(0)})\int_0^\varkappa\|N'(\mu)\|\,d\mu+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}p_0^{(-1)}\int_0^\varkappa\|N(\mu)\|\,d\mu$$

Постоянные $p_i^{(j)}$ в (4.19), как и q, определяются только коэффициентами матрицы $K(\theta,\sigma)$. Они представляют собой достаточно быстро абсолютно сходящиеся ряды и не приводятся здесь вследствие громоздкости получающихся выражений. Из неравенств (4.18), (4.19) для Δ на интервале $\theta\in[0,\Theta]$, $\Theta=\vartheta/\sqrt{\varepsilon}$ следует искомая равномерная оценка

$$\Delta=|w-\zeta|\leqslant\sqrt{\varepsilon}|w^\circ|D(\vartheta)\exp(^1/_2 q\vartheta^2)$$
$$\Delta\leqslant c_*\sqrt{\varepsilon}, \quad c_*\text{—const}, \quad \theta\in[0,\vartheta/\sqrt{\varepsilon}], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0] \tag{4.20}$$

Итак, изложенная выше асимптотическая методика позволяет построить приближенное решение задачи Коши для линейного векторного интегродифференциального уравнения с почти-периодическим ядром в так называемом резонансном случае ($K_*\neq 0$). Применительно к рассматриваемой механической модели она позволяет выявить интересные для теории и приложений гидродинамики качественные резонансные эффекты (внутренний резонанс), возникающие при свободных колебаниях твердого тела с полостью, содержащей двухслойную жидкость. Установлено (см. (4.4) или (4.6), (4.13)), что амплитуда $A(t, \varepsilon)$ быстрых колебаний сосуда медленно и периодически изменяется: за время $t^*=\pi/2\mu\sqrt{\varepsilon}\Omega$ достигая минимума $A=O(\sqrt{\varepsilon})$, а затем максимума $A=|s^\circ|$. При этом происходит перераспределение энергии колебаний сосуда с жидкостью как целого и энергии колебаний $(2m+1)$-й моды внутренних волн.

5. *Замечания.* 5.1. Следует отметить, что применение к системе (4.9) схем усреднения, предложенных в [8], приводит к заведомо неверным результатам даже на рассмотренном выше относительно коротком интервале $\theta\sim1/\sqrt{\varepsilon}$, а тем более для $\theta\sim1/\varepsilon$, как принято в [8]. «Метод замораживания» основан на предположении, что w — медленная переменная: $w\approx w(\varepsilon\theta)$. Вместо системы интегродифференциальных уравнений (4.9) предлагается рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\xi'(\theta)=\varepsilon\left[\int_0^\theta K(\theta,\sigma)\,d\sigma\right]\xi(\theta),\qquad \xi(0)=w^\circ \tag{5.1}$$

Нетрудно, однако, установить, что для рассматриваемого в п. 4 класса систем (K — осциллирующее ядро) решение $\xi(\theta,\varepsilon,w^\circ)$ задачи (5.1) не близко точному решению $w(\theta,\varepsilon,w^\circ)$ исходной задачи (4.9) на интервале изменения аргумента $\theta\sim1/\sqrt{\varepsilon}$ и заведомо для $\theta\sim1/\varepsilon$. Это утверждение непосредственно следует из рассмотрения частных случаев системы (4.9), например когда $K(\theta,\sigma)=K^{(1)}(\theta)K^{(2)}(\sigma)$, где одна из матриц $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ или обе постоянны. Для иллюстрации изложенного полезно рассмотреть элементарный пример (w — скаляр):

$$w'=\varepsilon q\int_0^\theta w(\sigma)\,d\sigma,\qquad w(0)=w^\circ,\qquad q\text{ — const}$$

В соответствии с методикой п. 4 дифференцированием получается уравнение второго порядка, решение которого равно $w=\zeta=w^\circ\operatorname{ch}\sqrt{\varepsilon q}\,\theta$, $q\geqslant0$; $w=\zeta=w^\circ\cos\sqrt{\varepsilon|q|}\,\theta$, $q\leqslant0$.

«Метод замораживания» согласно (5.1) приводит к следующему «приближенному» решению ξ, которое существенно отличается от точного даже на относительно коротком интервале изменения аргумента $\xi=w^\circ\exp{}^1/_2\varepsilon q\theta^2$, $|w-\xi|=O(1)$, $\theta\sim1/\sqrt{\varepsilon}$.

Из общих соображений ясно, что предполагаемая погрешность $O(\varepsilon)$ в определении искомого решения w не гарантирует ее реально, поскольку в силу системы (4.9) повторное интегрирование этой погрешности приводит к ошибке $O(1)$ на интервале $\theta\sim1/\varepsilon$. Поэтому требуется учет более тонких свойств системы (4.9) или наложение весьма жестких требований достаточно быстрого убывания ядра $K(\theta,\sigma)$ и т. п. (см. ниже). Для стандартных по Н. Н. Боголюбову систем [4] проводится однократное интегрирование предполагаемой погрешности, которое приводит к ошибке $O(\varepsilon)$ для $\theta\sim1/\varepsilon$.

Решение рассматриваемого класса интегродифференциальных уравнений (4.9) в резонансном случае близко для $\theta\sim1/\sqrt{\varepsilon}$ решению некоторой системы дифференциальных уравнений не первого, как в (5.1), а второго порядка типа (4.14). Система (4.14) получается повторным усреднением ядра $K(\theta,\sigma)$, т. е. усреднением уравнений

$$v'=\varepsilon K_0(\theta)\int_0^\theta v(\sigma)\,d\sigma,\qquad v(0)=w^\circ$$

Эти уравнения заменой $u'=v$ приводятся к виду системы второго порядка $u''-\varepsilon K_0(\theta)u=0$, $u(0)=0$, $u'(0)=w^\circ$.

При помощи замены $u'=\sqrt{\varepsilon}\,z$ система записывается в стандартной форме, для которой непосредственно применим метод разделения переменных u, z и θ: $u'=\sqrt{\varepsilon}\,z$, $z'=\sqrt{\varepsilon}\,K_0(\theta)u$, $u(0)=0$, $z(0)=w^\circ/\sqrt{\varepsilon}$.

Метод усреднения в первом приближении приводит к погрешности $O(1)$ для $\theta\sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ (вследствие оценки $z(0)\sim 1/\sqrt{\varepsilon}$), а для исходной переменной v — к погрешности $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Указанное выше свойство, что решение системы (4.9) в рассматриваемом резонансном случае близко решению некоторой системы дифференциальных уравнений второго порядка, можно также установить посредством введения дополнительной переменной z: $w'=\sqrt{\varepsilon}\, z$, $z\sim 1$. Действительно, в результате подстановки получается система интегральных уравнений вдвое более высокого порядка

$$w(\theta)=w^\circ+\sqrt{\varepsilon}\int_0^\theta z(\sigma)\,d\sigma,\quad z(\theta)=\sqrt{\varepsilon}\int_0^\theta K(\theta,\sigma)\,w(\sigma)\,d\sigma \tag{5.2}$$

которая обобщает интегральные уравнения, эквивалентные некоторой системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$u''=\varepsilon L(\theta)\,u,\quad u(0)=w^\circ,\quad u'(0)=0\quad (L-n\times n)$$

$$u(\theta)=w^\circ+\sqrt{\varepsilon}\int_0^\theta z(\sigma)\,d\sigma,\quad z(\theta)=\sqrt{\varepsilon}\int_0^\theta L(\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma$$

Приведенная система получается из исходной (4.9) усреднением ядра $K(\theta,\sigma)$ по θ.

Для приближенного решения системы интегральных уравнений (5.2) на асимптотически большом интервале изменения $\theta\sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, на котором происходит существенное изменение медленных переменных, применим стандартный метод разделения переменных w, z и θ, т. е. метод усреднения по θ [4]. Следует отметить, что разделение переменных w и θ можно проводить в исходной системе (4.9) или в системе интегральных уравнений, получаемой аналогично (4.16), (4.17):

$$w(\theta)=w^\circ+\varepsilon\int_0^\theta Q(\theta,\gamma)\,w(\gamma)\,d\gamma$$

$$Q(\theta,\gamma)=\int_\gamma^\theta K(\sigma,\gamma)\,d\sigma=K^{(0)}(\gamma)(\theta-\gamma)+K^{(1)}(\theta,\gamma)$$

Здесь $K^{(0)}$, $K^{(1)}$ — равномерные почти-периодические матричные функции по θ, γ. Свойства решения и вид асимптотических разложений определяются матрицей $K^{(0)}(\gamma)$ (см. ниже).

5.2. Пусть рассматривается «нерезонансный» случай $\nu_{2k+1}\neq 1$, $k=0,1,2,\ldots$ (см. (4.5)). Тогда в (4.10), (4.11) матрицы $K_0=K_*=0$; поэтому согласно п. 4 $\zeta=w^\circ$ — const. На основе (4.16) — (4.18) справедлива оценка

$$|w-w^\circ|\leqslant\varepsilon\sup_{\theta\in[0,\Theta]}\left|\int_0^\theta Q(\theta,\gamma)\,w^\circ\,d\gamma\right|\exp\left(\varepsilon\int_0^\theta\|Q\|\,d\gamma\right) \tag{5.3}$$

Если элементы матрицы Q — равномерные почти-периодические (ограниченные) функции θ, γ, имеющие нулевое среднее по γ, то $|w-w^\circ|\leqslant C(\vartheta)|w^\circ|\varepsilon$ для $\theta\in[0,\vartheta/\varepsilon]$, где C — конструктивно определяемый из (4.17), (5.3) коэффициент. Этот же результат получается упоминавшимся выше «методом замораживания» [8]. Однако для рассматриваемой задачи Коши (4.7), (4.8) при $\nu_{2k+1}\neq 1$ среднее по γ значение элементов матрицы $Q(\theta,\gamma)$ отлично от нуля. Поэтому справедлива оценка

$$|w-w^\circ|\leqslant\varepsilon q_0\Theta|w^\circ|\exp(\varepsilon q_0\Theta),\quad q_0\text{—const} \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что для $\Theta=\vartheta\varepsilon^{-d}$, $0\leqslant d<1$ оценка приводит к малой по ε величине $O(\varepsilon^{1-d})$. Построить асимптотически близкое в классе степенных оценок приближенное решение на интервале $\theta \in [0, \vartheta/\varepsilon]$ не удается.

В «нерезонансном» случае колебания сосуда и жидкости имеют сложную хаотическую структуру и на указанном интервале их регулярные характеристики определить также не представляется возможным. На движение сосуда оказывают влияние многие моды внутренних волн двухслойной жидкости, а именно низшие и ближайшие в безразмерных переменных (4.5) к единице; согласно (2.4), частоты колебаний жидкости распределены весьма сложным образом.

5.3. Линейная возвращающая сила может быть упругой, как предполагалось выше, так и другой физической природы, например гравитационной. При малых маятниковых колебаниях сосуда с жидкостью на подвесе соответствующей длины, как показывают оценки, изменениями параметров (момента инерции системы относительно оси качания, отклонения от горизонта и прямолинейного перемещения и т. п.) можно пренебречь как возмущающими факторами более высокого порядка малости.

5.4. Определенный интерес представляет асимптотическое исследование движений других механических моделей, аналогичных рассмотренной выше, например колебания упругих валов, брусов, стержней и т. п. с упругой заделкой концов.

Авторы благодарят В. Ф. Журавлева за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Управление колебаниями неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде.– Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 27–35.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
5. *Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М.* Элементы теории функций. М.: Физматгиз, 1963. 244 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
8. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 152 с.

Москва

Поступила в редакцию 17.V.1984