МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1986

УДК 624.07:534.1

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ ЧАСТЬЮ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

КОРНЕЕВ А. И., ШУТАЛЕВ В. Б.

Анализ численного решения задач о соударении стержня с плитой, когда все искомые величины, описывающие напряженно-деформированное состояние соударяющихся тел, являются функциями трех пространственных переменных и времени, проведен в [1, 2]. Рассмотрены задачи о соударении деформируемого стержня с абсолютно жесткой плитой, об ударе стержня по деформируемой плите. Все анализируемые случаи относятся к удару стержня торцом.

В публикуемой работе исследуется напряженно-деформированное состояние стержня при ударе частью боковой поверхности по абсолютно жесткому штампу («рубящий удар»).

1. Система уравнений динамики сжимаемого упругопластического тела может быть записана в виде

$$\rho\mathbf{U}^{\cdot}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma},\quad V^{\cdot}/V=\nabla\cdot\mathbf{U},\quad E^{\cdot}=V\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot} \tag{1.1}$$

$$V=\rho_0/\rho,\quad \boldsymbol{\sigma}=P\mathbf{I}+\mathbf{S},\quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}={}^1/_2[(\nabla\mathbf{U})^*+(\nabla\mathbf{U})]$$

Определяющие соотношения

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{S}+\lambda\mathbf{S}=2\mu\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}-\frac{1}{3}\frac{V^{\cdot}}{V}\mathbf{I}\right),\qquad P=P(V,E) \tag{1.2}$$

Критерий текучести Мизеса

$$I_2={}^1/_3\sigma_s^2 \tag{1.3}$$

Здесь ρ_0 и ρ — плотность среды в начальном и деформированном состоянии, $\mathbf{U}$ — вектор скорости, P — первый инвариант тензора напряжений, $\mathbf{S}$ — девиатор тензора напряжений, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}$ — тензор скорости деформации, символ (*) означает операцию транспонирования, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}$ — двойное скалярное произведение тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}$, E — внутренняя энергия, ${}^1/_2S_{ij}S_{ij}=J_2$ — второй инвариант тензора напряжений, μ — модуль сдвига, σ_s — предел текучести, D/Dt — производная в смысле Яумана.

Параметр $\lambda\equiv0$ при упругих деформациях и определяется из (1.2) с помощью (1.3) при переходе среды в пластическое состояние. Эти свойства параметра λ могут быть записаны в виде единого аналитического выражения [3]. Введем обозначения: ω_1 — поверхность стержня, свободная от нагрузок, ω_2 — часть боковой поверхности, соприкасающаяся с жестким гладким штампом, Ω — область, занятая стержнем.

Для замкнутой системы уравнений (1.1) — (1.3) ставится краевая задача с начальными условиями при $t=0$ в области Ω и граничными на ω_1 и ω_2:

$$V(\xi_i,0)=1,\quad \boldsymbol{\sigma}(\xi_i,0)=0,\quad \mathbf{U}(\xi_i,0)=\mathbf{u}(\xi_i) \tag{1.4}$$

$$E(\xi_i,0)=0\quad\text{при}\quad \xi_i\in\Omega\quad(i=1,2,3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{p}_0,\quad \mathbf{p}_0(\xi_i,t)=0,\quad(\xi_i\in\omega_1),\quad \mathbf{p}_0\neq0\quad(\xi_i\in\omega_2) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}=0,\quad \mathbf{n}\times(\mathbf{P}_0\times\mathbf{n})=0\quad\text{при}\quad\xi_i\in\omega_2 \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ω_2, $\mathbf{u}(\xi_i)$ — распределение скоростей по стержню в момент времени $t=0$. Если стержень не прилипает к основанию штампа и основание не сопротивляется перемещению тела в направлении, обратном направлению нормали (отскок стержня от штампа), то к условиям (1.6) следует добавить $\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{n}\leqslant0$, а на неизвестной, определяемой в ходе решения задачи части границы, где это условие нарушается, следует положить $\mathbf{P}_0=0$. Второе условие (1.6) означает отсутствие касательной составляющей вектора силы $\mathbf{P}_0$. Отметим, что значение распределенной реакции $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}_0$ на основании штампа является неизвестной функцией и определяется в ходе решения задачи.

2. Для решения сформулированной в п. 1 краевой задачи применим численный метод в переменных Лагранжа. Для получения разностных уравнений проинтегрируем первое уравнение (1.1) по объему τ ячеек, окружающих рассматриваемый узел сетки A:

$$\int \rho \mathbf{U}^{\cdot}\, d\tau = \int \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\, d\tau \qquad (2.1)$$

Пусть в момент времени t^{ν} известны вектор $\mathbf{U}^{\nu-1/2}$, координаты ξ_i^{ν} во всех узлах сетки и величины $\boldsymbol{\sigma}^{\nu}$, E^{ν}, V^{ν} в центрах ячеек, примыкающих к рассматриваемому узлу A.

Применим к левой части равенства (2.1) теорему о среднем, а к правой части – теорему Остроградского – Гаусса и предположим, что точка A совпадает с точкой внутри объема τ, для которой справедлива теорема о среднем; тогда получим

$$\mathbf{U}_A^{\cdot} \int\limits_{\tau} \rho\, d\tau = \int\limits_{F} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dF \qquad (2.2)$$

Здесь F – поверхность, окружающая выделенный объем τ, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности F.

Заменяя производную по времени $\mathbf{U}^{\cdot}$ разностным соотношением, а интеграл по поверхности – суммой и обозначая $\int \rho\, d\tau = m$, получим

$$\mathbf{U}^{\nu+1/2} = \mathbf{U}^{\nu-1/2} + \frac{\Delta t^{\nu}}{m} \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^{\nu}) F_i^{\nu} \qquad (2.3)$$

где $\Delta t^{\nu} = t^{\nu+1} - t^{\nu}$, F_i^{ν} – площадь поверхности i-й ячейки, примыкающей к узлу A, $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})_i^{\nu}$ – вектор напряжений, действующий на площадке F_i^{ν}, N – число поверхностей F_i^{ν}.

После вычисления по уравнениям (2.3) вектора скорости $\mathbf{U}^{\nu+1/2}$ могут быть вычислены перемещения точек среды, изменение объема τ каждой ячейки, тензор скорости деформации, девиатор тензора напряжений и изменение относительного объема V, поскольку масса каждой лагранжевой ячейки постоянна.

Для уравнения энергии применим следующую аппроксимацию:

$$E^{\nu+1} = E^{\nu} + {}^{1}/_{2} V^{\nu+1/2} (\boldsymbol{\sigma}^{\nu+1} + \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot(\nu+1/2)} \qquad (2.4)$$

Учитывая описанный выше порядок вычислений и то, что для первого инварианта тензора напряжений используется уравнение в форме Ми – Грюнайзена, можно легко выписать явную формулу для вычисления $E^{\nu+1}$. Если применяется другой вид зависимости $P(V, E)$, не допускающий явного разрешения относительно внутренней энергии, то должен быть применен итерационный процесс [4].

К тензору $\boldsymbol{\sigma}$ добавляется тензор искусственной вязкости, состоящий из шаровой и девиаторной части. В шаровую часть тензора напряжений аддитивно входит линейная и квадратичная искусственные вязкости, а к девиаторной части добавляется искусственная вязкость типа Навье – Стокса [4].

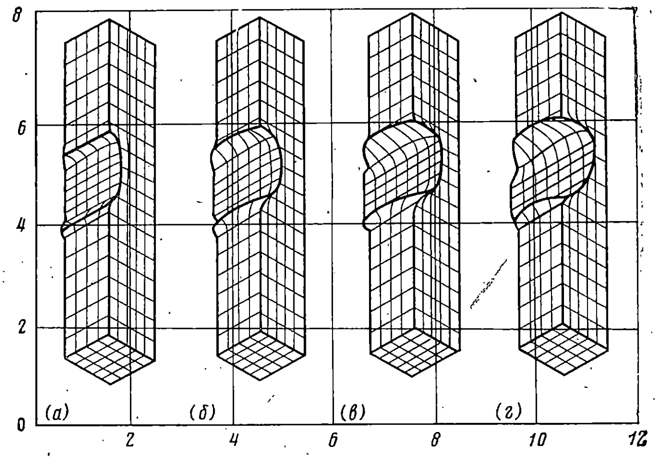
3. Сформулированная в п. 1 задача численно решена на ЭВМ БЭСМ-6 с привлечением внешних запоминающих устройств.

Остановимся на анализе численного решения краевой задачи, когда по штампу с плоским основанием ударяет стержень квадратного поперечного сечения и отношение длины стержня l к стороне основания a, $l/a=4$. Вектор скорости u имеет одну компоненту, направленную по нормали к основанию штампа, шириной a. Это направление нормали совпадает с координатной осью z декартовой системы координат, т. е. вектор $\mathbf{u}$ в начальных условиях (1.4) имеет компоненты $(0, 0, u_0)$ и $u_0 = 0{,}14 c_0$ (c_0 – скорость продольной упругой волны). Постоянные, идентифицирующие материал стержня и конкретное выражение зависимости $P(V, E)$ в (1.2), приведены в [5].

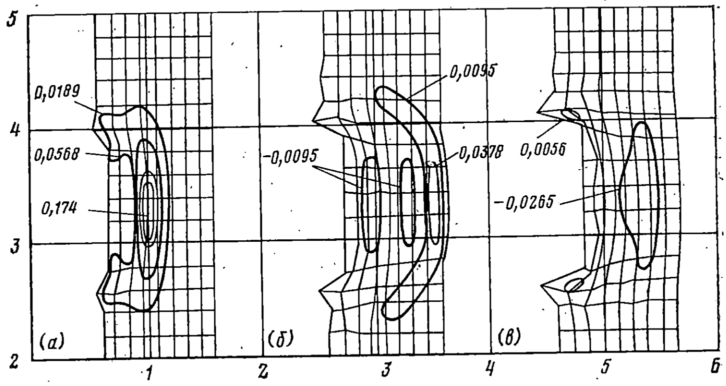
Отнесем время процесса ко времени пробега упругой волной со скоростью c_0 расстояния a и обозначим вновь введенное время t. На фиг. 1 представлены пространственные картины деформации стержня при рубящем ударе, выполненные в изометрической проекции, отвечающие моментам времени $t=0{,}58$; 1,154; 1,73; 2,67 (фиг. 1, *а–г* соответственно). В процессе решения линии равных значений напряжения (изобары) строились во всех сечениях стержня плоскостями на расстояниях, равных шагу сетки для детального анализа волновой картины.

Рассмотрим волновую картину в двух плоскостях. Выберем одну из плоскостей проходящую через середину боковых граней и перпендикулярную поверхности штампа (фиг. 2), в качестве другой (фиг. 3) возьмем проекцию координат точек сетки, отстоящих в первоначальный момент на расстоянии, равном шагу сетки от плоскости контакта на плоскость, параллельную поверхности штампа.

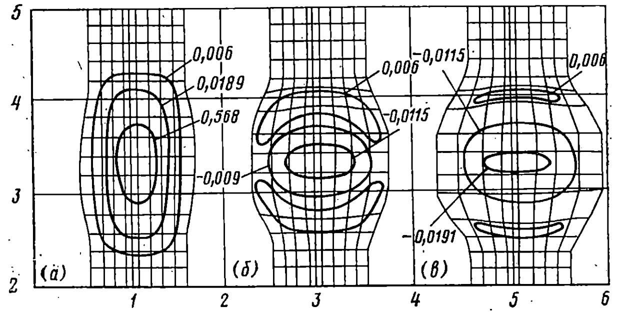
На фиг. 2, 3 представлены изобары напряжения $\sigma_z / \rho_0 c_0^2$ для трех первых моментов времени (фиг. 1). В момент времени $t=0{,}58$ (фиг. 2, *а*) фронт пластической ударной волны находится на расстоянии $a/2$ от свободной поверхности стержня, противоположной той грани, по которой наносится удар. Волны разгрузки, идущие от части свободной поверхности грани, с которой контактирует штамп, и от боковых граней, уже ослабили ударную волну (фиг. 2, *а*). Отметим существенное влияние волн разгрузки, идущих от боковых граней (фиг. 3, *а*).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В момент времени $t=1{,}154$ пластическая ударная волна начинает отражаться от свободной поверхности (фиг. 2, *б*), имеются две зоны растягивающих напряжений $\sigma_z / \rho_0 c_0^2 = -0{,}0095$. Эти зоны растягивающих напряжений образуются за счет боковых волн разгрузки. На фиг. 3, *б* видно, что в зоне, прилегающей к поверхности штампа, возникают значительные растягивающие напряжения и происходит отход центральной области контакта стержня от основания штампа. Значения отрицательных напряжений в отмеченных зонах превосходит предел прочности материала на разрыв, с учетом того, что разрывающие напряжения действуют достаточно длительное время, в этих зонах произойдет разрушение материала стержня.

На фиг. 2, *в* показана зона отрицательных напряжений, сформировавшихся в результате интерференции волн разгрузки, идущих от свободных поверхностей и отраженной ударной волны. В центральной части стержня, примыкающей к зоне контакта (фиг. 3, *в*), $\sigma_z / \rho_0 c_0^2$ также являются растягивающими. Значения напряжений в отмеченных зонах превосходят предел прочности на разрыв. Отметим также интенсивное пластическое течение в зоне, прилегающей к поверхности контакта.

Интенсивное сдвиговое течение приводит к «выплеску» материала и образованию «венчика» (фиг. 1).

Экспериментально наблюдаемая картина отвечает рассмотренному выше процессу. Стержень при ударе по абсолютно жесткому штампу разламывается на две части в центре. Над плоскостью штампа образуются осколки разной величины, а концы стержня продолжают двигаться с почти начальной скоростью удара, оставаясь целыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jonas G. H., Zukas J. A.* Mechanics of penetration: analysis and experiment.— Intern. J. Engng Sci., 1978, v. 16, No. 11, p. 879–903.
2. *Sedgwick R. T., Hageman L. J., Herrmann R. G., Waddell J. L.* Numerical investigations in penetration mechanics.— Internat. J. Engng Sci., 1978, v. 16, No. 11, p. 859–869.
3. *Григорян С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1057–1072.
4. *Уилкинс М. Л.* Расчет упругопластических течений.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 212–263.
5. *Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г.* Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 146–157.

Томск

Поступила в редакцию
3.IV.1984

Технический редактор *Т. В. Скворцова*

Сдано в набор 05.12.85 Подписано к печати 02.02.86 Т-03427 Формат бумаги 70×108[1]/16
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отт. 24,1 тыс. Уч.-изд. л. 18,3 Бум. л. 6,0
Тираж 1421 экз. Зак. 2054

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6