МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1986

УДК 539.3

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

ЛИХОДЕД А. И.

При расчете сложных динамических систем эффективность метода разложения по собственным формам колебаний существенно снижается из-за высокой плотности спектра собственных частот. Для повышения точности расчетов в инженерной практике пользуются методом ускорений [1–4], эквивалентным по усилиям однократному выделению квазистатики, однако в указанных работах не анализируются возможности улучшения сходимости решения в зависимости от степени гладкости функций внешнего воздействия.

Существуют способы улучшения сходимости функций Грина в задачах о стационарных колебаниях свободных балок [5], а также улучшения сходимости метода Бубнова – Галеркина в задачах о собственных колебаниях упругих систем [6].

В публикуемой работе исследуется сходимость метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения упругих систем при последовательном многократном выделении квазистатической составляющей.

Рассмотрены случаи, когда внешнее воздействие задается достаточно гладкой функцией и производные внешнего воздействия по времени имеют разрывы первого рода. Показано, что разрывам нечетных и четных производных внешней силы по времени соответствует реакция системы, сходная с реакцией, возникающей от импульсного и ступенчатого воздействия.

1. В общем случае задача о динамическом нагружении некоторой упругой системы сводится к решению дифференциального уравнения

$$m(\partial^2 w/\partial t^2)+Lw=f(x,\ t) \tag{1.1}$$

где w и f — векторы кинематических параметров и внешних силовых воздействий, m и L — матрица масс и матричный оператор, характеризующий упругие свойства системы.

К уравнению (1.1) присоединяют начальные и граничные условия, а затем, применяя соответствующие дифференциальные операторы N к вектору w, получают силовые факторы в сечениях конструкции. Очевидно, что матрица m и матричные операторы L и N зависят от используемой при решении динамической задачи расчетной модели.

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда внешнюю силу $f(x, t)$ в уравнении (1.1) можно представить в виде

$$f(x,\ t)=\sum_i q_i(t)\,p_i(x) \tag{1.2}$$

Более общий случай функции $f(x, t)$ может быть сведен к (1.2) разложением функции $f(x,t)$ в ряд по некоторой полной системе координатных функций $\varphi_i(x)$.

В силу допустимости суперпозиции при решении линейной задачи (1.1) достаточно рассмотреть случай, когда $f(x, t)=q(t)p(x)$.

При однократном выделении квазистатической составляющей решение уравнения (1.1) ищется в виде

$$w=q(t)\,w_{01}(x)+w_1(x,\ t) \tag{1.3}$$

где функция w_{01} удовлетворяет статическому уравнению

$$Lw_{01}=p(x) \tag{1.4}$$

а функция $w_1(x, t)$ — динамическому

$$m(\partial^2 w_1/\partial t^2)+Lw_1=-mq^{\cdot\cdot}(t)w_{01}(x) \tag{1.5}$$

В случае системы со свободными краями в правую часть уравнения (1.4) добавляются инерционные силы от движения системы как жесткого целого.

Обобщим представление (1.3) на случай многократного выделения квазистатической составляющей и будем искать решение в виде

$$w(x,\ t)=\sum_{k=1}^{n} g^{(2k-2)}(t)\,w_{0k}(x)+w_n(x,\ t),\quad g^{(0)}(t)=g(t) \tag{1.6}$$

Здесь $w_{0k}(x)$ — функции, определяемые далее из соответствующих статических задач, $w_n(x,\ t)$ — динамическая составляющая n-го порядка. Предполагается, что функция $q(t)$, характеризующая изменение нагрузки во времени, является $2n$ раз дифференцируемой.

Подставляя представление для перемещений (1.6) в уравнение (1.1), будем иметь

$$m\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}+Lw_n=gp-\sum_{j=1}^{n} mw_{0j}q^{(2j)}(t)-\sum_{k=1}^{n} g^{(2k-2)}(t)\,Lw_{0k} \tag{1.7}$$

Сделав замену индекса j, по которому ведётся суммирование в правой части равенства (1.7), на $j=k-1$ и выделив некоторые слагаемые из сумм, представим это равенство в виде

$$m\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}+Lw_n=-mw_{0n}g^{(2n)}(t)-g(t)(Lw_{01}-p)-$$
$$-\sum_{k=2}^{n} g^{(2k-2)}(t)(Lw_{0k}+mw_{0,\,k-1}) \tag{1.8}$$

Выберем функции w_{0k} таким образом, чтобы множители при $q^{(2j)}(t)$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ обратились в нули. Тогда функции w_{0k} будут удовлетворять следующим последовательно решаемым статическим задачам:

$$Lw_{01}=p,\quad Lw_{0k}=-mw_{0,\,k-1}\quad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n) \tag{1.9}$$

Функция w_n при условиях (1.9) будет удовлетворять динамическому уравнению

$$m(\partial^2 w_n/\partial t^2)+Lw_n=-mw_{0n}q^{(2n)}(t) \tag{1.10}$$

Потребуем, чтобы функции w_{0k} и w_n удовлетворяли граничным условиям исходной задачи, тогда функция $w(x,\ t)$ (1.6) также будет удовлетворять указанным граничным условиям.

Чтобы проследить сходимость вынуждаемой части решения, будем рассматривать далее случай нулевых начальных условий

$$w(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{n} g^{(2k-2)}(0)\,w_{0k}(x)+w_n(x,\ 0)=0,$$
$$w^{\cdot}(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{n} g^{(2k-1)}(0)\,w_{0k}(x)+\dot{w}_n(x,\ 0)=0 \tag{1.11}$$

Если будут выполняться следующие равенства для производных:

$$q^{(k)}(0)=0\quad \text{при}\quad k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1 \tag{1.12}$$

то функция $w_n(x, t)$, характеризующая динамическую составляющую, будет удовлетворять нулевым начальным условиям

$$w_n(x, 0)=\partial w_n(x, 0)/\partial t=0 \tag{1.13}$$

Условия (1.12) указывают на то, что функция $q(t)$ должна быть представима в окрестности нуля рядом Тейлора $q(t)=t^{2n}\sum C_k t^k$ ($k=0, 1, \ldots$ $\ldots, \infty$) или иметь структуру $q(t)=t^{2n}q^*(t)$, где $q^*(t)$ — произвольная ограниченная в нуле функция ($2n$ раз дифференцируемая).

Отыскивая решение уравнения (1.10) в виде разложения по собственным формам колебаний рассматриваемой упругой системы $\varphi_i(x)$

$$w_n(x, t)=\sum_i S_i(t)\varphi_i(x) \tag{1.14}$$

получим уравнения для обобщенных координат S_i:

$$S_i^{\cdot\cdot}+\omega_i^2 S_i=-(mw_{0n}, \varphi_i)q^{(2n)}(t) \tag{1.15}$$

Предполагается, что формы $\varphi_i(x)$ пронормированы по массе $(m\varphi_i, \varphi_i)=1$; скобками (a, b) здесь обозначено обобщенное скалярное произведение.

Решение уравнения (1.15) при нулевых начальных данных (1.13) имеет вид

$$S_i(t)=-\frac{(mw_{0n}, \varphi_i)}{\omega_i}b_i(t), \quad b_i(t)=\int_0^t q^{(2n)}(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau \tag{1.16}$$

Определим коэффициенты Фурье разложения (mw_{0n}, φ_i) n-й квазистатики, входящие в (1.16).

Применение к рекуррентной последовательности уравнений (1.9) метода разложения по собственным формам колебаний приводит к следующему значению для w_{0n} ($A_i=(p, \varphi_i)$ — обобщенная сила):

$$w_{0n}(x)=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{\omega_i^{2n}}\varphi_i(x) \tag{1.17}$$

Действительно, будем отыскивать решение первого уравнения (1.9) в виде

$$w_{01}=\sum_{i=1}^{\infty}C_i^{(1)}\varphi_i \tag{1.18}$$

Подставив (1.18) в первое уравнение (1.9) и учитывая равенство для собственных форм колебания $L\varphi_i=m\omega_i^2\varphi_i$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty}C_i^{(1)}m\omega_i^2\varphi_i=p \tag{1.19}$$

Умножая скалярно левую и правую части (1.19) на φ_j и учитывая ортогональность форм собственных колебаний, получим

$$C_j^{(1)}=\frac{A_j}{\omega_j^2}, \quad w_{01}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{\omega_i^2}\varphi_i \tag{1.20}$$

Рассмотрим второе уравнение (1.9) ($k=2$) с учетом (1.20):

$$Lw_{02}=-m\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{\omega_i^2}\varphi_i \tag{1.21}$$

Будем отыскивать решение (1.21) аналогично (1.18) в виде $w_{02}=\sum C_i^{(2)}\varphi_i$ $(i=1, 2, \ldots, \infty)$. Подставив w_{02} в уравнение (1.21) и учитывая $L\varphi_i=m\omega_i^2\varphi_i$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{(2)} m\omega_i^2\varphi_i = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{\omega_i^2}m\varphi_i \tag{1.22}$$

Скалярное умножение обеих частей (1.22) на φ_j приводит к равенствам

$$C_j^{(2)}=-\frac{A_j}{\omega_j^4},\quad w_{02}=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{\omega_i^4}\varphi_i(x) \tag{1.23}$$

Повторяя последовательное решение рекуррентной системы уравнений (1.9), получим для w_{0n} соотношение (1.17), из которого будем иметь следующее выражение для коэффициентов Фурье:

$$(mw_{0n}, \varphi_i)=(-1)^{n+1}A_i/\omega_i^{2n} \tag{1.24}$$

Подставляя $S_i(t)$ (1.16) с учетом (1.24) в равенство (1.14), для полей кинематических параметров $w(x, t)$ (1.6) приходим к окончательному выражению:

$$w(x,\ t)=\sum_{k=1}^{n} q^{(2k-2)}(t)\,w_{0k}(x)+(-1)^n\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_ib_i(t)}{\omega^{2n+1}}\varphi_i(x) \tag{1.25}$$

Без выделения квазистатической составляющей решение для $w(x, t)$ в данном случае запишется так:

$$w(x,\ t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_ib_i^*(t)}{\omega_i}\varphi_i(x),\quad b_i^*(t)=\int_0^t q(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau \tag{1.26}$$

Можно видеть, что сходимость ряда (1.25) существенно улучшена по сравнению с (1.26) за счет дополнительных множителей $1/\omega_i^{2n}$, причем каждое дополнительное выделение квазистатики (увеличение n на единицу) приводит к ускорению сходимости на ω_i^2. В частном случае при $n=1$ из (1.25) получаем решение для случая однократного выделения квазистатической составляющей (1.3)—(1.5).

Отметим, что такое влияние выделения квазистатической составляющей на сходимость решения связано с тем, что особенности фундаментальных решений динамических и соответствующих им статических задач совпадают в пространстве координат [7, 8]. Поэтому выделение из динамической задачи соответствующего квазистатического решения устраняет особенности и разрывы комбинаций производных, через которые выражаются силовые факторы, и делает оставшуюся часть динамического решения более гладкой и быстросходящейся. Особенно явно это прослеживается при наличии скачков во внешних нагрузках и при действии сосредоточенных сил.

Отметим также, что факт совпадения особенностей статических и динамических задач использовался при сведении граничных задач [8—10] стационарных колебаний к интегральным уравнениям (путем выделения особенностей статической задачи и построения комбинаций специальных функций, удовлетворяющих динамической задаче, с теми же особенностями).

2. В предыдущем пункте при многократном выделении квазистатической составляющей были наложены достаточно жесткие ограничения на степень гладкости функции $q(t)$, характеризующей изменение нагрузки во времени.

Здесь рассмотрен общий случай, когда первые $2n$ производные функции $q(t)$ имеют разрывы первого рода (конечные скачки) в некоторой точке t_p.

Пусть внешняя нагрузка представима в виде $f(x, t)=q(t)p(x)$.

Обозначим скачки $2n$ первых производных функции $q(t)$ в точке t_p через $\Delta_k(t_p)$:

$$\Delta_k=q^{+(k)}(t_p)-q^{-(k)}(t_p) \quad (k=1, 2, \ldots, 2n) \tag{2.1}$$

где знаками «минус» и «плюс» отмечены значения производных слева и справа от точки t_p.

Важным этапом для последующего решения задачи является представление производных функции $q(t)$ в виде суммы непрерывных составляющих и разрывных, выражающихся через функцию Хевисайда $H(t)$ и дельта-функцию $\delta(t)$, умноженных на величины скачков производных (2.1).

Тогда первая производная запишется (q_1 — непрерывная составляющая первой производной):

$$\dot{q}=q_1+\Delta_1 H(t-t_p) \tag{2.2}$$

Вторую производную $q(t)$ с учетом (2.2) и правила дифференцирования функции Хевисайда представим в виде

$$\ddot{q}=q_2+\Delta_1\delta(t-t_p)+\Delta_2 H(t-t_p) \tag{2.3}$$

где $q_2(t)$ — непрерывная составляющая второй производной.

В целом, если $2n$ производные функции $q(t)$ имеют разрывы первого рода в точке t_p, равные Δ_k $(k=1, 2, \ldots, 2n)$, то их непрерывные составляющие определяются по следующей схеме (в точке t_p функции q_k доопределяются равными своим пределам слева и справа):

$$\begin{aligned} q_1 &= \dot{q} - \Delta_1 H(t-t_p) \\ q_2 &= \dot{q}_1 - \Delta_2 H(t-t_p) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{2n} &= \dot{q}_{2n-1} - \Delta_{2n} H(t-t_p) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Будем отыскивать решение задачи (1.1) в виде (1.3). После подстановки (1.3) в (1.1) и учета (2.3) для нахождения динамической составляющей $w_1(x, t)$ первого порядка приходим к уравнению $m(\partial^2 w_1/\partial t^2)+$ $+Lw_1=-mw_{01}[q_2+\Delta_1\delta(t-t_p)+\Delta_2 H(t-t_p)]$.

Представим функцию w_1 в виде суперпозиции двух слагаемых $w_1=w_1^{(1)}+w_1^{(2)}$, где $w_1^{(1)}$ — реакция системы на непрерывную составляющую внешнего воздействия, определяемая из уравнения

$$m(\partial^2 w_1^{(1)}/\partial t^2)+Lw_1^{(1)}=-mw_{01}q_2(t) \tag{2.5}$$

Функция $w_1^{(2)}$ характеризует реакцию системы на импульсное и ступенчатое воздействия, определяемые дельта-функцией и функцией Хевисайда

$$m(\partial^2 w_1^{(2)}/\partial t^2)+Lw_1^{(2)}=-mw_{01}[\Delta_1\delta(t-t_p)+\Delta_2 H(t-t_p)] \tag{2.6}$$

Полученная задача является типовой и будет в дальнейшем рассмотрена.

Решение уравнения (2.5) будем отыскивать выделяя квазистатическую составляющую. При этом функцию $mw_{01}(x)$ в правой части уравнения (2.5) можно трактовать как функцию $p(x)$, характеризующую распределение внешней силы по координате, а функцию $q_2(t)$ — как функцию $q(t)$, характеризующую изменение внешней силы по времени.

Решение уравнения (2.5) по аналогии с (1.3) можно искать в виде $w_1^{(1)}=q_2(t)w_{02}(x)+w_2(x, t)$.

Подставляя представление для $w_1^{(1)}$ в уравнение (2.5), будем иметь

$$m(\partial^2 w_2/\partial t^2)+Lw_2=-mw_{02}\ddot{q}_2-q_2(Lw_{02}+mw_{01}) \tag{2.7}$$

Определим функцию $w_{02}(x)$ таким образом, чтобы выражение, стоящее в скобках в правой части (2.7), обращалось в нуль

$$Lw_{02}=-mw_{01} \tag{2.8}$$

Тогда динамическая составляющая второго порядка $\bar{w}_2$ будет определяться из уравнения $m(\partial^2 w_2/\partial t^2)+Lw_2=-mw_{02}\ddot{q}_2(t)$.

Представив вторую производную функции $q_2(t)$ в виде непрерывных и разрывных составляющих по аналогии с (2.3), получим уравнение для функции $w_2(x, t)$:

$$m(\partial^2 w_2/\partial t^2)+Lw_2=-mw_{02}[q_4+\Delta_3\delta(t-t_p)+\Delta_4 H(t-t_p)] \tag{2.9}$$

Здесь Δ_3 и Δ_4 — скачки третьей и четвертой производных (2.1), q_4 — непрерывная составляющая четвертой производной (2.4) функции $q(t)$.

Представим решение $w_2(x, t)$ аналогично $w_1=w_1^{(1)}+w_1^{(2)}$ в виде суперпозиции двух функций $w_2=w_2^{(1)}+w_2^{(2)}$, где $w_2^{(1)}$ и $w_2^{(2)}$ определяются из решения следующих уравнений:

$$m(\partial^2 w_2^{(1)}/\partial t^2)+Lw_2^{(1)}=-mw_{02}q_4 \tag{2.10}$$

$$m(\partial^2 w_2^{(2)}/\partial t^2)+Lw_2^{(2)}=-mw_{02}[\Delta_3\delta(t-t_p)+\Delta_4 H(t-t_p)]$$

К первому уравнению (2.10) можно снова применить процедуру выделения квазистатической составляющей, отыскивая его решение в виде $w_2^{(1)}=q_4(t)w_{03}(x)+w_3(x, t)$.

Повторяя указанную процедуру $n-1$ раз, будем иметь $w_{n-1}^{(1)}=$ $=q_{2(n-1)}w_{0n}+w_n$, где

$$Lw_{0n}=-mw_{0,\,n-1} \tag{2.11}$$

Функция w_n — динамическая составляющая n-го порядка — будет удовлетворять уравнению $m(\partial^2 w_n/\partial t^2)+L\bar{w}_n=-mw_{0n}\ddot{q}_{2(n-1)}$.

Производные первого и второго порядков от функции $q_{2(n-1)}$ запишем в виде суммы непрерывных и разрывных составляющих

$$\dot{q}_{2(n-1)}=q_{2n-1}+\Delta_{2n-1}H(t-t_p) \tag{2.12}$$

$$\ddot{q}_{2(n-1)}=q_{2n}+\Delta_{2n-1}\delta(t-t_p)+\Delta_{2n}H(t-t_p)$$

Представим функцию $\bar{w}_n$ в виде суперпозиции двух составляющих $w_n=$ $=w_n^{(1)}+w_n^{(2)}$ от непрерывной правой части $w_n^{(1)}$ и разрывной $w_n^{(2)}$.

Для определения указанных функций будем иметь следующие уравнения:

$$m(\partial^2 w_n^{(1)}/\partial t^2)+Lw_n^{(1)}=-mw_{0n}q_{2n} \tag{2.13}$$

$$m(\partial^2 w_n^{(2)}/\partial t^2)+Lw_n^{(2)}=-mw_{0n}[\Delta_{2n-1}\delta(t-t_p)+\Delta_{2n}H(t-t_p)] \tag{2.14}$$

Рассмотрим решение каждого из полученных в результате последовательного выделения квазистатической составляющей уравнений с непрерывной и разрывной правой частью.

В правую часть каждого из уравнений входит в виде множителя функция $w_{0n}(x)$, получаемая из рекуррентной последовательности квазистатических уравнений (1.4), (2.8), (2.11), решение которых имеет вид (1.17).

Решение уравнения (2.13) с непрерывной правой частью записывается следующим образом:

$$w_n^{(1)}=(-1)^n\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i b_i^{\circ}(t)}{\omega_i^{2n+1}}\varphi_i(x) \tag{2.15}$$

$$A_i=(p,\ \varphi_i),\quad b_i^{\circ}=\int_0^t q_{2n}(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau$$

Как видно из (2.15), сходимость динамической составляющей n-го порядка от непрерывных правых частей после n-кратного выделения квазистатики не ниже $1/\omega_i^{2n+1}$.

Остановимся теперь на решении динамических задач с правыми частями в виде дельта-функций и функций Хевисайда (2.6), (2.10), (2.14). Отыскивая решение уравнения (2.14) в виде разложения по собственным формам колебаний

$$w_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} S_{ni}(t)\,\varphi_i(x) \tag{2.16}$$

и учитывая выражение для коэффициентов Фурье (mw_{0n}, φ_i) (1.24), получим уравнение для обобщенных координат

$$S_{ni}^{\cdot\cdot} + \omega_i^2 S_{ni} = (-1)^n A_i [\Delta_{2n-1}\delta(t-t_p) + \Delta_{2n} H(t-t_p)]/\omega_i^{2n} \tag{2.17}$$

Правая часть уравнения (2.17) содержит в знаменателе ω_i^{2n}, поэтому решение этого уравнения назовем реакцией на импульс и «ступеньку» n-го порядка.

При нулевых начальных данных решение уравнения (2.17) имеет вид

$$S_{ni} = (-1)^n \frac{A_i\Delta_{2n-1}}{\omega_i^{2n+1}} H(t-t_p)\sin\omega_i(t-t_p) + \\ + (-1)^n \frac{A_i\Delta_{2n}}{\omega^{2n+2}} H(t-t_p)[1-\cos\omega_i(t-t_p)] \tag{2.18}$$

Подставив значения обобщенных координат (2.18) в $w_n^{(2)}$ (2.16), получим реакцию системы на импульс и ступеньку n-го порядка.

Результирующее решение после n-кратного выделения квазистатики и реакций системы на импульсы и ступеньки запишется так:

$$w(x,\ t) = \sum_{k=1}^{n} q_{2k-2}(t)\,w_{0k}(x) + \sum_{k=1}^{n} w_k^{(2)}(x,\ t) + w_n^{(1)}(x,\ t), \quad q_0(t) = q(t) \tag{2.19}$$

Подставив в (2.19) значения функций $w_n^{(1)}$ и $w_k^{(2)}$ из (2.15), (2.16), получим окончательное выражение для перемещения с учетом n-кратного выделения квазистатики в случае разрывных в точке t_p производных по времени функции внешнего воздействия

$$w(x,\ t) = \sum_{k=1}^{n} q_{2k-2}(t)\,w_{0k}(x) + (-1)^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i b_i^{\circ}(t)}{\omega_i^{2n+1}} \varphi_i(x) + \\ + H(t-t_p) \sum_{i=1}^{\infty} A_i\varphi_i \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \left[\frac{\Delta_{2\nu-1}}{\omega_i^{2\nu+1}} \sin\omega_i(t-t_p) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta_{2\nu}}{\omega_i^{2\nu+2}} (1-\cos\omega_i(t-t_p))\right] \tag{2.20}$$

Из выражения (2.20) видно, что разрыв нечетных производных функций $q(t)$ вызывает реакцию системы, аналогичную той, которая возникает от импульсного воздействия. При этом в случае разрыва $(2\nu-1)$-й производной со скачком $\Delta_{2\nu-1}$ сходимость решения не ниже $\sin\omega_i(t-t_p)/$ $/\omega_i^{2\nu+1}$. Разрыв четных производных функций $q(t)$ вызывает реакцию, аналогичную возникающей при ступенчатом воздействии n-го порядка. При разрыве 2ν-й производной со скачком $\Delta_{2\nu}$ сходимость решения будет не ниже $1/\omega_i^{2\nu+2}$.

Таким образом, в представлении (2.19) квазистатическая составляющая (первое слагаемое) определяет разрывы и особенности динамической задачи в координатной области, второе слагаемое характеризует особенности решения типа реакций системы на импульсные и ступенчатые воздействия, обусловленные разрывами производных внешних сил, во временной области. Выделение указанных составляющих из динамической задачи улучшает сходимость остающейся части решения по формам собственных колебаний.

3. Проиллюстрируем влияние выделения квазистатики на сходимость решения в случае продольного нагружения однородного консольного стержня сосредоточенной силой, приложенной в среднем его сечении. Оператор L и внешняя сила $f(x, t)$ из (1.1), а также граничные условия в этом случае имеют вид $L=-EF\partial^2/\partial x^2$, $f(x, t)=P\delta(x-l)q(t)$, $w(0, t)=\partial w(2l, t)/\partial x=0$, где EF — продольная жесткость, $2l$ — длина стержня. Начальные условия будем считать нулевыми.

Пусть $q(t)$ изменяется по закону

$$q(t)=0 \text{ при } t<0, \quad q(t)=t^4 \text{ при } t\geqslant 0 \tag{3.1}$$

Для построения решения при двукратном выделении квазистатики можно воспользоваться формулой (2.20), рассматривая $q(t)$ (3.1) как функцию с разрывной в нуле четвертой производной. Тогда в соответствии с (2.1) и (2.4) получим

$$\Delta_1(0)=\Delta_2(0)=\Delta_3(0), \quad \Delta_4(0)=24, \quad q_6(t)=0 \tag{3.2}$$

Статические задачи (1.4), (2.8) для однородного стержня, находящегося под действием сосредоточенной силы $p(x)=P\delta(x-l)$, имеют простые аналитические решения $(a=P/(EF))$:

$$\begin{gathered} w_{01}=ax \quad (0\leqslant x\leqslant l), \qquad w_{01}=al \quad (l<x\leqslant 2l) \\ w_{02}={}^1/_6 cx^3-{}^3/_2 cl^2x \quad (0\leqslant x\leqslant l), \qquad (c=mP/(EF)^2) \\ w_{02}={}^1/_2 cl(x-l)^2-cl^2(x-l)-{}^4/_3 cl^3 \quad (l<x\leqslant 2l) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Частоты и нормированные по массе формы продольных колебаний консольного стержня таковы:

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{ml}}\sin\frac{(2n-1)\pi}{4l}x, \quad \omega_n=\frac{\pi(2n-1)}{4l}\sqrt{\frac{EF}{m}} \tag{3.4}$$

Динамические перемещения стержня для случая двукратного выделения квазистатики на основе формулы (2.20) с учетом (3.1)÷(3.4) примут вид

$$w(x, t)=t^4w_{01}(x)+12t^2w_{02}(x)+24P\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-\cos\omega_i t}{\omega_i^6}\varphi_i(l)\varphi_i(x) \tag{3.5}$$

При прямом использовании метода разложения по собственным формам колебаний без выделения квазистатики решение в соответствии с (1.26) запишется так:

$$w(x, t)=P\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{t^4}{\omega_i^2}-\frac{12t^2}{\omega_i^4}+\frac{24(1-\cos\omega_i t)}{\omega_i^6}\right]\varphi_i(l)\varphi_i(x) \tag{3.6}$$

Разложением функций w_{01} и w_{02} (3.3) в ряды по формам колебаний (3.4) можно убедиться, что правые части (3.5) и (3.6) равны.

Из сравнения рядов (3.5) и (3.6) видно, что сходимость оставшейся динамической части решения в (3.5) после двукратного выделения квазистатики на четыре порядка по частоте выше сходимости решения, полученного путем прямого использования метода разложения по собственным формам колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л.* Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 799 с.
2. *Гладкий В. Ф.* Динамика конструкции летательного аппарата. М.: Наука, 1969. 495 с.
3. *Anderson G. L., Thomas C. R.* A forced vibration problem involving time derivatives in the boundary conditions.— J. Sound and Vibr., 1971, vol. 14, No. 2, p. 193–214.
4. *Walter W. W.* The forced motion of a non-conservatively loaded elastic system.— J. Sound and Vibr., 1971, vol. 18, No. 3, p. 297–310.
5. *Азаров В. Л., Лупичев Л. Н., Тавризов Г. А.* Математические методы исследования сложных физических систем. М.: Наука, 1975. 342 с.
6. *Шмаков В. П.* Построение корректирующих функций в методе Бубнова – Галеркина.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2, с. 80–92.
7. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
8. *Шерман Д. И.* К теории установившихся колебаний среды при заданных внешних силах на ее границе.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 5, с. 557–560.
9. *Лиходед А. И.* О стационарных колебаниях пластинки, опертой по краю.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, с. 745–750.
10. *Лиходед А. И.* Установившиеся колебания пластинок со свободными краями.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 5, с. 920–924.

Калининград

Поступила в редакцию
22.X.1984