МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1986

УДК 531.381

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВООБРАЗНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

ИШЛИНСКИЙ А. Ю., СТОРОЖЕНКО В. А., ТЕМЧЕНКО М. Е.

В [1] получены условия существования плоскопараллельных движений произвольного твердого тела с одной закрепленной точкой. Именно, было показано, что если центр масс тела расположен в одной из плоскостей, содержащих какие-либо две его главные оси инерции относительно неподвижной точки, то возможны стационарные колебания тела относительно третьей главной оси инерции, сохраняющей при этом неизменным направление в горизонтальной плоскости. При простейших предположениях о характере трения в точке подвеса тела и при малых его отклонениях от положения устойчивого равновесия в [2][1] теоретически и экспериментально исследован процесс установления таких стационарных движений. При этом в качестве обобщенных координат были выбраны углы, характеризующие расположение тела относительно некоторой фиксированной в пространстве вертикальной плоскости, содержащей в начальный момент времени неподвижную точку тела и его центр масс. Выбор этих углов дал возможность выяснить механическую суть изучаемого явления. Однако, как оказалось, при таком выборе обобщенных координат невозможно достаточно полно решить вопрос об устойчивости плоскопараллельных колебаний исследуемого тела. Поэтому в [2] удалось доказать лишь неасимптотическую устойчивость рассматриваемых движений тела и при весьма существенных ограничениях, налагаемых на величину расстояния, связывающего неподвижную точку тела с центром масс.

В публикуемой работе обобщенные координаты, характеризующие поведение исследуемого тела, выбраны таким образом, что одна из них (угол, определяющий положение в пространстве вертикальной плоскости колебаний) является циклической и ее можно было исключить из рассмотрения. В результате оказалось возможным провести исследование устойчивости плоскопараллельных колебаний без ограничивающего предположения о достаточно большом удалении неподвижной точки тела от его центра масс. В частности, было показано, что при простейшем законе трения исследуемые колебания являются устойчивыми асимптотически, если среди главных моментов инерции тела A, B, C относительно неподвижной точки наибольшим является момент инерции A относительно оси его колебаний. В случае, когда момент инерции A произволен, а моменты инерции B и C между собою равны, исследована устойчивость (неасимптотическая) плоскопараллельных колебаний тела и при отсутствии трения.

1. Рассмотрим произвольное однородное твердое тело массы m с неподвижной точкой O, находящейся на одной из его главных центральных осей инерции. В этой точке поместим начало неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ с осью ζ, направленной вертикально вверх, а также системы координат xyz, неизменно связанной с телом. Ось z системы xyz, содержащая центр масс G (фиг. 1), совпадает с главной осью инерции тела в точке O.

Положение системы xyz по отношению к системе $\xi\eta\zeta$ определим тремя углами ψ, α, β. Первый поворот на угол ψ осуществим вокруг оси ζ, второй — на угол α — вокруг вновь образованной оси ξ' и, наконец, третий поворот — на угол β — вокруг оси η_2.

Нетрудно убедиться, используя фиг. 1, что проекции угловой скорости

[1] См. также: *Ишлинский А. Ю., Василенко В. П., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* О плоскопараллельных колебаниях произвольного твердого тела с одной закрепленной точкой.– Препринт Ин-та математики АН УССР, Киев, 1982, № 82.27. 54 с.

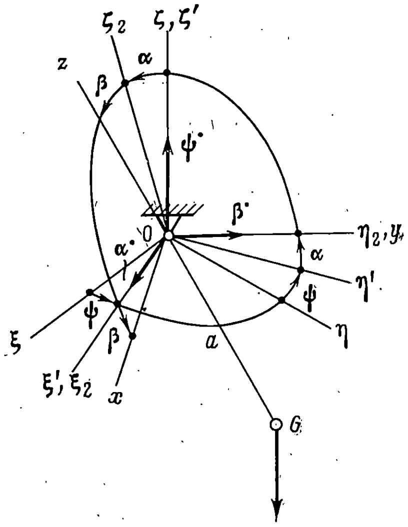
ω исследуемого тела на его же собственные оси имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega_x=\alpha^{\cdot}\cos\beta-\psi^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta\\
&\omega_y=\beta^{\cdot}+\psi^{\cdot}\sin\alpha\\
&\omega_z=\alpha^{\cdot}\sin\beta+\psi^{\cdot}\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Обозначим через A, B, C главные моменты инерции тела относительно неподвижной точки O, а через m и a — соответственно, его массу и расстояние от этой точки до центра масс G (фиг. 1).

Используя введенные обозначения, соотношения (1.1), составим выражение для кинетической энергии T и потенциальной энергии П. При их использовании функция Лагранжа $L=T-\Pi$ для рассматриваемого тела может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
L={}&{}^1/_2[A(\alpha^{\cdot}\cos\beta-\psi^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta)^2+\\
&+B(\beta^{\cdot}+\psi^{\cdot}\sin\alpha)^2+C(\alpha^{\cdot}\sin\beta+\\
&+\psi^{\cdot}\cos\alpha\cos\beta)^2]+mga\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}\tag{1.2}$$



Фиг. 1

Из равенства (1.2) следует, что угол ψ является циклической координатой. Поэтому вместо функции Лагранжа целесообразно рассмотреть функцию Рауса

$$R=L-\psi^{\cdot}\partial L/\partial\psi^{\cdot}\tag{1.3}$$

Для исключения из (1.3) циклической скорости $\psi^{\cdot}$ воспользуемся, как обычно это делают [3], циклическим интегралом

$$\partial L/\partial\psi^{\cdot}=I\psi^{\cdot}-M=p_0=\mathrm{const}\tag{1.4}$$

где I — момент инерции тела относительно неподвижной вертикали ζ и функция M определяются, соответственно, соотношениями

$$\begin{aligned}
&I=(A\sin^2\beta+C\cos^2\beta)\cos^2\alpha+B\sin^2\alpha\\
&M=(A-C)\alpha^{\cdot}\sin\beta\cos\beta\cos\alpha-B\beta^{\cdot}\sin\alpha
\end{aligned}\tag{1.5}$$

При использовании равенств (1.4), (1.5) функция Рауса (1.3) может быть приведена к виду

$$R=\frac{\alpha^{\cdot 2}}{2}(A\cos^2\beta+C\sin^2\beta)+B\frac{\beta^{\cdot 2}}{2}-\frac{1}{2I}(M+p_0)^2+mga\cos\alpha\cos\beta\tag{1.6}$$

В рассматриваемой задаче объектом исследования являются плоскопараллельные движения тела, при которых обобщенный импульс p_0 вращения тела вокруг вертикали равен нулю. Учитывая (1.5), функцию Рауса (1.6) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
R={}&{}^1/_2\alpha^{\cdot 2}(A\cos^2\beta+C\sin^2\beta)+{}^1/_2B\beta^{\cdot 2}+mga\cos\alpha\cos\beta-\\
&-{}^1/_2I^{-1}[(A-C)\sin\beta\cos\beta\cos\alpha\cdot\alpha^{\cdot}-B\beta^{\cdot}\sin\alpha]^2
\end{aligned}\tag{1.7}$$

2. Запишем уравнения движения твердого тела в форме уравнений Рауса:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\alpha^{\cdot}}-\frac{\partial R}{\partial\alpha}=Q_\alpha,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\beta^{\cdot}}-\frac{\partial R}{\partial\beta}=Q_\beta\tag{2.1}$$

При этом обобщенную силу Q_α будем считать равной нулю. Что же касается обобщенной силы Q_β, то примем, что движение тела вокруг соответствующей оси происходит с трением. В результате, принимая трение вязким, придем к соотношению (μ — коэффициент трения):

$$Q_\beta = M_T{}^\beta = -2\mu\beta^{\cdot} \tag{2.2}$$

Учитывая это замечание, а также равенство (1.7), уравнения (2.1) после соответствующих преобразований представим в виде

$$(A\cos^2\beta + C\sin^2\beta)\alpha^{\cdot\cdot} - 2(A-C)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\sin\beta\cos\beta - I^{-1}[(A-C)(\alpha^{\cdot\cdot}\cos\alpha -$$
$$-\alpha^{\cdot 2}\sin\alpha)\sin\beta\cos\beta + (A-C)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - B\beta^{\cdot\cdot}\sin\alpha -$$
$$-B\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos\alpha](A-C)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - I^{-1}[(A-C)\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta -$$
$$-B\beta^{\cdot}\sin\alpha]\beta^{\cdot}\cos\alpha[(A-C)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - B] + mga\sin\alpha\cos\beta +$$
$$+I^{-2}[(A-C)\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - B\beta^{\cdot}\sin\alpha][2(A-C)\beta^{\cdot}\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha -$$
$$-2(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta - B)\alpha^{\cdot}\sin\alpha\cos\alpha](A-C)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta -$$
$$-I^{-2}[(A-C)\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - B\beta^{\cdot}\sin\alpha]^2[A\sin^2 + C\cos^2\beta -$$
$$-B]\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$B\beta^{\cdot\cdot} + 2\mu\beta^{\cdot} + BI^{-1}[(A-C)(\alpha^{\cdot\cdot}\cos^2\alpha - \alpha^{\cdot 2}\sin\alpha)\sin\beta\cos\beta +$$
$$+(A-C)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - B\beta^{\cdot\cdot}\sin\alpha - B\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos\alpha]\sin\alpha +$$
$$+I^{-1}[(A-C)\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - B\beta^{\cdot}\sin\alpha]\alpha^{\cdot}\cos\alpha[(A-C)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) +$$
$$+B] + (A-C)\alpha^{\cdot 2}\sin\beta\cos\beta + mga\cos\alpha\sin\beta - I^{-2}[(A-C)\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta -$$
$$-B\beta^{\cdot}\sin\alpha][2(A-C)\beta^{\cdot}\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha - 2(A\sin^2\beta +$$
$$+C\cos^2\beta)\alpha^{\cdot}\sin\alpha\cos\alpha + 2B\alpha^{\cdot}\sin\alpha\cos\alpha]B\sin\alpha -$$
$$-I^{-2}[(A-C)\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - B\beta^{\cdot}\sin\alpha]^2(A-C)\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta = 0$$

Совокупность уравнений (2.3) имеет частное решение

$$\alpha = \alpha_*(t), \qquad \beta = 0 \tag{2.4}$$

в котором функция $\alpha_*(t)$ является решением уравнения

$$A\alpha^{\cdot\cdot} + mga\sin\alpha = 0 \tag{2.5}$$

Решение (2.4) как раз и описывает исследуемые плоскопараллельные колебания твердого тела, когда тело ведет себя как плоский физический маятник. Для исследования устойчивости этого движения запишем уравнения возмущенного движения исследуемой механической системы. С этой целью введенные выше переменные α и β представим в виде

$$\alpha = \alpha_*(t) + \alpha_1, \qquad \beta = \beta_1 \tag{2.6}$$

где $\alpha_*(t)$ определяется посредством решения уравнения (2.5), α_1 и β_1 — возмущения.

Подставим соотношения (2.6) в совокупность уравнений (2.3). Тогда, пренебрегая в этих уравнениях величинами выше первого порядка малости относительно возмущений α_1 и β_1 и их производных по времени, получим

$$A\alpha_1^{\cdot\cdot} - mga\cos\alpha_*(t)\cdot\alpha_1 = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{BC\cos^2\alpha_*(t)}{I_0(t)}\beta_1^{\cdot\cdot} + 2\left(\mu - \frac{B^2C}{I_0^2(t)}\sin\alpha_*(t)\cos\alpha_*(t)\alpha_*^{\cdot}(t)\right)\beta_1^{\cdot} +$$
$$+\left\{mga\cos\alpha_*(t) + \frac{B}{I_0(t)}(A-C)\alpha_*^{\cdot\cdot}(t)\sin\alpha_*(t)\cos\alpha_*(t) +\right.$$
$$+(A-C)\alpha_*^{\cdot 2}(t) + \alpha_*^{\cdot 2}(t)\frac{A-C}{I_0(t)}\left[(A-C)\cos^2\alpha_*(t) +\right.$$

$$+B\,\frac{C\cos^2\alpha_*(t)-B\sin^2\alpha_*(t)}{I_0(t)}\Bigg]\Bigg\}\beta_1=0$$

$$I_0(t)=B\sin^2\alpha_*(t)+C\cos^2\alpha_*(t)$$

Очевидно, что полученные уравнения первого приближения (2.7) относительно возмущений α_1 и β_1 являются взаимно независимыми. Первое из этих уравнений описывает возмущенные движения вокруг частного решения $\alpha=\alpha_*(t)$ уравнения (2.5). Вопрос об устойчивости этого решения в данной статье не рассматривается, так как он хорошо изучен в литературе (см., например, [4]). Предметом дальнейшего исследования является второе уравнение (2.7) [2], которое после некоторых элементарных преобразований можно привести к виду

$$\beta_1^{\cdot\cdot}+P(t)\beta_1^{\cdot}+Q(t)\beta_1=0,\quad P(t)=\frac{2\mu I_0(t)}{BC\cos^2\alpha_*(t)}-$$

$$-2\frac{B}{I_0(t)}\operatorname{tg}\alpha_*(t)\cdot\alpha_*^{\cdot}(t) \tag{2.8}$$

$$Q(t)=\frac{mga}{\cos\alpha_*(t)}\left(\frac{\cos^2\alpha_*(t)}{B}+\frac{\sin^2\alpha_*(t)}{A}\right)+$$

$$+\frac{A-C}{B}\left(\frac{A-B}{C}+2\frac{B}{I_0(t)}\right)\alpha_*^{\cdot 2}(t)$$

3. Уравнение (2.8) значительно упрощается в частном случае при $B=C$. При этом $I_0(t)=B$ и уравнение (2.8) преобразуется к следующему:

$$\beta_1^{\cdot\cdot}+2\left(\frac{\mu}{B\cos^2\alpha_*(t)}-\operatorname{tg}\alpha_*(t)\cdot\alpha_*^{\cdot}(t)\right)\beta_1^{\cdot}+$$

$$+\left[\frac{mga}{\cos\alpha_*(t)}\left(\frac{\cos^2\alpha_*(t)}{B}+\frac{\sin^2\alpha_*(t)}{A}\right)+\frac{A^2-B^2}{B^2}\cdot\alpha_*^{\cdot 2}(t)\right]\beta_1=0 \tag{3.1}$$

Исследуем вначале движение твердого тела при отсутствии трения в точке его подвеса. В рассматриваемом случае в уравнении (3.1) следует положить коэффициент трения μ равным нулю. Совершая далее в этом уравнении замену переменных

$$\beta_1=\beta_*/\cos\alpha_*(t) \tag{3.2}$$

приведем его к простому виду:

$$\beta_*^{\cdot\cdot}+p(t)\beta_*=0 \tag{3.3}$$

$$p(t)=(mga/B)\cos\alpha_*(t)+(A^2/B^2)\alpha_*^{\cdot 2}(t) \tag{3.4}$$

Как было отмечено, функция $\alpha_*(t)$ является решением уравнения колебаний физического маятника (2.5). Известно [5], что это решение представляет собой периодическую функцию с периодом $T_1=4K/\nu$ $(\nu=\sqrt{mga/A})$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \tag{3.5}$$

$k=\sin(\alpha_*(0)/2)$ — модуль эллиптического интеграла, $\alpha_*(0)$ — начальное значение отклонения тела (начальная скорость тела принята равной нулю).

Умножив обе части уравнения (2.5) на α и проинтегрировав резуль-

[2] В терминах современной теории устойчивости исследуемую здесь устойчивость движения можно, по-видимому, определить как «условную устойчивость по части переменных».

тат по времени с указанными выше начальными условиями, получим

$$\dot{\alpha}^2=2\nu^2(\cos\alpha-\cos\alpha_*(0)) \tag{3.6}$$

Используя только что полученное соотношение и принимая во внимание, что $\alpha_*(t)$ является решением уравнения (2.5), функцию $p(t)$ можно преобразовать к виду

$$p(t)=\frac{A}{B}\nu^2\left[\cos\alpha_*(t)+2\frac{A}{B}(\cos\alpha_*(t)-\cos\alpha_*(0))\right] \tag{3.7}$$

Из последнего равенства легко заметить, что $p(t)$ — функция периодическая с периодом $T=T_1/2=2K/\nu$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что уравнение (3.3) является уравнением Хилла [6].

Для исследования устойчивости тривиального решения этого уравнения применим один из критериев, содержащийся в [6, 7]. Согласно этому критерию, тривиальное решение уравнения (3.3) будет устойчивым при одновременном выполнении следующих условий:

$$p(t)\not\equiv 0;\quad p(t)\underset{\not\equiv}{\leqslant}\frac{\pi^2}{T^2};\quad \langle p\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt\geqslant 0 \tag{3.8}$$

Учитывая, что $\alpha_*(0)<\pi/2$ и $-\alpha_*(0)\leqslant\alpha_*(t)\leqslant\alpha_*(0)$, из равенства (3.7) получаем, что

$$p(t)>0 \tag{3.9}$$

и, следовательно, первое и третье условия (3.8) выполняются.

Второе условие (3.8) можно заменить следующим:

$$p_{\max}\leqslant\pi^2/T^2 \tag{3.10}$$

где, согласно соотношению (3.7):

$$p_{\max}=\frac{A}{B}\nu^2\left[1+4\frac{A}{B}\sin^2\frac{\alpha_*(0)}{2}\right] \tag{3.11}$$

Подставляя во второе неравенство (3.10), $T=T_1/2=2K/\nu$ и (3.11), получим

$$\rho[1+4\rho\sin^2{}^1/_2\alpha_*(0)]\leqslant{}^1/_4\pi^2/K^2,\quad \rho=A/B \tag{3.12}$$

Неравенство (3.12) удобнее записать в виде

$$\sin{}^1/_2\alpha_*(0)\leqslant({}^1/_4\pi^2/K^2-\rho)/4\rho^2 \tag{3.13}$$

Учитывая, что $K\geqslant\pi/2$ [5], из последнего неравенства получаем

$$\rho<1\ (A<B) \tag{3.14}$$

Область значений, удовлетворяющих (3.13) на плоскости $(\rho,\ \alpha_*(0))$, на фиг. 2 заштрихована. Анализ показывает, что при значении ρ, близком к единице (A близко к B), неравенство (3.13) выполняется для небольших значений $\alpha_*(0)$. Если же момент инерции B значительно превосходит момент инерции A, то неравенство (3.13) выполняется для всех возможных $0<\alpha_*(0)\leqslant\pi/2$.

Чтобы наглядно представить себе маятник в исследуемом случае ($B=C$), возьмем тело в форме параллелепипеда (фиг. 3) с неподвижной точкой, расположенной по оси симметрии z на расстоянии a от центра масс тела G. Главные моменты инерции такого тела относительно неподвижной точки O имеют вид

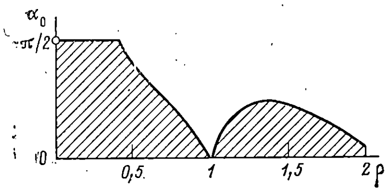
$$A={}^1/_3m(a_1^2+c_1^2)+ma^2,\quad B={}^1/_3m(b_1^2+c_1^2)+ma^2$$

$$C={}^1/_3m(a_1^2+b_1^2) \tag{3.15}$$

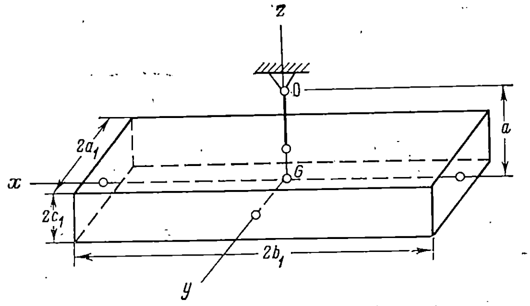
При $B=C$ получаем

$$a_1^2=c_1^2+3a^2 \tag{3.16}$$

Из условия же (3.14) следует, что $b_1>a_1$. Таким образом, полученное



Фиг. 2



Фиг. 3

условие (3.13) свидетельствует об устойчивости колебаний параллелепипеда в случае, когда ось колебаний параллельна самой длинной из его осей симметрии. При этом устойчивые колебания не исчезают при сколь угодно большом увеличении длины такого вытянутого параллелепипеда [3].

Следует отметить, что полученная область устойчивости ($\rho<1$) не является единственной. Устойчивые колебания рассматриваемого параллелепипеда возможны и при $A<B$, т. е. при $1<\rho<2$ [4]. Чтобы показать это, воспользуемся еще одним из критериев, также приведенном в [6, 7]. Согласно этому критерию, тривиальное решение уравнения (3.3) будет устойчивым при выполнении двух условий:

$$p(t) \underset{\not\equiv}{\geqslant} \frac{\pi^2}{T^2}, \quad T\int_0^T p(t)\,dt \leqslant \pi^2 + 4\pi \tag{3.17}$$

Первое из условий (3.17) может быть заменено следующим:

$$p_{\min} \geqslant \pi^2/T^2 \tag{3.18}$$

где, согласно соотношению (3.7):

$$p_{\min} = \nu^2 (A/B) \cos \alpha_*(0) \tag{3.19}$$

При учете $T=2K/\nu$ и (3.19) условие (3.18) представим в виде

$$A/B \geqslant \pi^2/(4K^2 \cos \alpha_*(0)) \tag{3.20}$$

Во втором условии (3.17) преобразуем интеграл, воспользовавшись выражением для p из (3.4) и (3.7):

$$\int_0^T p(t)\,dt = \frac{A}{B}\int_0^T \left[\nu^2 \cos\alpha_*(0) + \dot{\alpha}_*^2(t)\,\frac{2A+B}{B}\right]dt =$$
$$= \frac{A}{B}\left[\nu^2 T \cos\alpha_*(0) + 2\,\frac{2A+B}{B}\,\nu \int_0^{\alpha_*(0)} \sqrt{2(\cos\alpha - \cos\alpha_*(0))}\,d\alpha\right] \tag{3.21}$$

Производя интегрирование и учитывая $T=2K/\nu$, получаем

$$\int_0^T p(t)\,dt = 2\nu\,\frac{A}{B}\left[K\cos\alpha_*(0) + 4\,\frac{2A+B}{B}\left(E - \cos^2\frac{\alpha_*(0)}{2}\,K\right)\right] \tag{3.22}$$

---

[3] Подобное явление было выявлено экспериментально при исследовании колебаний подобных вытянутых маятников (см. указ. публ. на с. 18).

[4] Величина ρ не может быть больше двух в силу известного соотношения между моментами инерции твердого тела $A<B+C$, а в рассматриваемом случае (при $B=C$) $A<2B$.

где E — полный эллиптический интеграл второго рода с прежним модулем $k=\sin(\alpha_*(0)/2)$.

При использовании последнего соотношения второе условие (3.17) можно привести к такому:

$$\frac{A}{B}\left[\cos\alpha_*(0)+4\frac{2A+B}{B}\left(\frac{E}{K}-\cos^2\frac{\alpha_*(0)}{2}\right)\right]\leqslant\frac{\pi(\pi+4)}{4K^2} \quad (3.23)$$

Решая совокупность неравенств (3.20) и (3.23) на плоскости ($\rho=A/B$; $\alpha_*(0)$), получим область устойчивости колебаний исследуемого тела при $1<\rho<2$, представленную также на фиг. 2.

4. Обратимся теперь к рассмотрению общего случая колебаний твердого тела (при $B\neq C$), описываемых уравнением (2.8). Для исследования устойчивости его тривиального решения воспользуемся признаками устойчивости, вытекающими из приближенной оценки характеристических показателей этого уравнения, приведенной в [7]. Формулировка этих признаков следующая: если выполнены условия

$$p_{\max}\leqslant 0,\ \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt>2\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[-p(t)]\,dt} \quad (4.1)$$

или

$$p_{\max}>0,\ \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt>\frac{1}{T\sqrt{p_{\max}}}\int_0^T[p_{\max}-p(t)]\,dt \quad (4.2)$$

то тривиальное решение уравнения (2.8) асимптотически устойчиво.

В последних равенствах $p_{\max}$ является максимальным значением функции $p(t)$, которая определяется соотношением

$$p(t)=Q(t)-{}^1\!/_4P^2(t)-{}^1\!/_2P^{\cdot}(t) \quad (4.3)$$

Заметим, что последнее соотношение получается, если провести в уравнении (2.8) известную замену переменных [7]

$$\beta_1=\beta_*\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T P(t_1)\,dt_1\right) \quad (4.4)$$

преобразующую уравнение (2.8) к виду (3.3).

При использовании выражений для $P(t)$ и $Q(t)$, а также (2.5), (3.6) функцию (4.3) представим следующим образом:

$$p(t)=p^*(t)-\mu^2I_0^2(t)/(B^2C^2\cos^4\alpha_*(t)) \quad (4.5)$$

$$p^*(t)=\nu^2\left(\frac{A-B}{B}+\frac{C}{I_0(t)}\right)\cos\alpha_*(t)+2\nu^2\left[\frac{(A-B)(A-C)}{BC}+\right.$$
$$\left.+2\frac{A-B}{I_0(t)}+\frac{BC+2C(B-C)\cos^2\alpha_*(t)}{I_0^2(t)}\right]\left(\cos\alpha_*(t)-\cos\alpha_*(0)\right) \quad (4.6)$$

Продифференцируем функцию $p(t)$ по времени. Приравнивая производную нулю и принимая во внимание равенство (3.6), приходим к выводу, что эта функция имеет две точки экстремума при $A>B\geqslant C$: $\alpha=0$, $\alpha=\alpha_*(0)$. Нетрудно показать, что при $\alpha_*=\alpha_*(0)$ функция $p(t)$ имеет минимум, а при $\alpha_*(t)=0$ — максимум. Подставим значение $\alpha_*(t)=0$ в выражение (4.5). Будем иметь после соответствующих преобразований

$$p_{\max}=\nu^2\frac{A}{B}-\frac{\mu^2}{B^2}+2\nu^2\frac{1-\cos\alpha_*(0)}{BC}[(A-C)(A+B)+B^2] \quad (4.7)$$

Пусть выполняются условия (4.1). Тогда из первого условия получим при учете равенств (4.5) и (4.7)

$$\frac{\mu^2}{B^2} \geqslant p^*_{\max} = \nu^2 \frac{A}{B} + 2\nu^2 \frac{1-\cos\alpha_*(0)}{BC}\left[(A-C)(A+B)+B^2\right] \quad (4.8)$$

Второе условие (4.1) при использовании (4.5) и выражения для $P(t)$ из (2.8) может быть приведено к виду

$$\left(\frac{\mu}{B} + \frac{\mu}{TC}\int_0^T \operatorname{tg}^2\alpha_*(t)\,dt - \frac{B}{T}\int_0^T \frac{\operatorname{tg}\alpha_*(t)\cdot\alpha_*^{\boldsymbol{\cdot}}(t)\,dt}{J_0(t)}\right)^2 - \quad (4.9)$$

$$-\frac{\mu^2}{B^2C^2T}\int_0^T (B^2\operatorname{tg}^4\alpha_*(t) + 2BC\operatorname{tg}^2\alpha_*(t) + C^2)\,dt > -\frac{1}{T}\int_0^T p^*(t)\,dt$$

Так как функция $\operatorname{tg}\alpha_*(t)$ нечетная, то

$$\int_0^T \operatorname{tg}\alpha_*(t)\cdot\alpha_*^{\boldsymbol{\cdot}}(t)\,dt = \int_{-\alpha_*(0)}^{\alpha_*(0)} \operatorname{tg}\alpha\,d\alpha = 0 \quad (4.10)$$

Воспользовавшись этим равенством и формулой (3.6), неравенство (4.9) можно представить следующим образом:

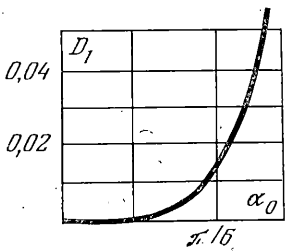
$$\frac{\mu^2}{C^2} D_1(\alpha_*(0)) < \langle p^*\rangle, \quad (4.11)$$

$$D_1(\alpha_*(0)) = \frac{1}{K}\int_0^{\alpha_*(0)} \frac{\operatorname{tg}^4\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\alpha_*(0))}} -$$

$$-\frac{1}{K^2}\left(\int_0^{\alpha_*(0)} \frac{\operatorname{tg}^2\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\alpha_*(0))}}\right)^2 \quad (4.12)$$

Функция $D_1(\alpha_*(0))$ представлена графически на фиг. 4. Она положительна, мала при небольших значениях $\alpha_*(0)$. Учитывая, кроме того, что, согласно равенству (4.6), при $A>B\geqslant C$ $p^*(t)>0$ и, следовательно, $\langle p^*\rangle > 0$, приходим к выводу, что неравенство (4.11) не является противоречивым. Таким образом, совокупность неравенств (4.1) в данном случае может быть приведена к виду

$$p^*_{\max} \leqslant \frac{\mu^2}{B^2} < \frac{C^2}{B^2 D_1(\alpha_*(0))}\langle p^*\rangle \quad (4.13)$$



Фиг. 4

Легко убедиться в том, что при любом $\mu^2/B^2 > A\nu^2/B$ система неравенств (4.13) может быть удовлетворена соответствующим выбором значения $\alpha_*(0)$. Действительно, путем уменьшения $\alpha_*(0)$ правую часть этих неравенств можно сделать сколь угодно большой. Замечая, согласно формуле (4.6), что

$$\lim_{\alpha_*(0)\to 0} p^*_{\max} = \lim_{\alpha_*(0)\to 0} p^*_{\min} = \lim_{\alpha_*(0)\to 0}\langle p^*\rangle = \nu^2 A/B \quad (4.14)$$

получаем, что в предельном случае (при $\alpha_*(0)\to 0$) система неравенств (4.13) принимает вид

$$A\nu^2/B \leqslant \mu^2/B^2 < \infty \quad (4.15)$$

Рассмотрим случай, когда выполняются условия (4.2). Из первого из них при учете равенства (4.7) получаем

$$\frac{\mu^2}{B^2} < p^*_{\max} = \nu^2 \left\{ \frac{A}{B} + 2\,\frac{1-\cos\alpha_*(0)}{BC}\,[(A-C)(A+B)+B^2] \right\} \tag{4.16}$$

Второе условие (4.2) при использовании выражения для $P(t)$ из (2.8) и (4.5), (4.10) и после элементарных преобразований может быть преобразовано к виду

$$\frac{\mu}{B} > \frac{p^*_{\max} - \langle p^* \rangle}{2\sqrt{p_{\max}}} + \frac{\mu^2}{2TC^2\sqrt{p_{\max}}} \int_0^T \mathrm{tg}^4\,\alpha_*(t)\,dt + \frac{\mu}{TC\sqrt{p_{\max}}} \left(\frac{\mu}{B} - \sqrt{p_{\max}} \right) \int_0^T \mathrm{tg}^2\,\alpha_*(t)\,dt \tag{4.17}$$

Проведем исследование совокупности неравенств (4.15) и (4.17), которая является более сложной для анализа по сравнению с предыдущими неравенствами (4.8) и (4.11). При использовании соотношений (4.14) нетрудно заметить, что выбором значения $\alpha_*(0)$ правая часть неравенства (4.17) может быть сделана сколь угодно малой. Отсюда можно сделать заключение о существовании области (μ, $\alpha_*(0)$), в которой одновременно удовлетворяются оба неравенства (4.15) и (4.17). В предельном случае при $\alpha_*(0) \to 0$ эти неравенства приобретают вид

$$0 < \mu^2/B^2 < \nu^2 A/B \tag{4.18}$$

В заключение отметим, что использованные в данной работе признаки (4.1) и (4.2) просты, но не достаточно строги, так как основаны на применении довольно грубых оценок характеристических показателей (см. [7]). Поэтому проведенное исследование асимптотической устойчивости колебаний твердого тела при учете трения может рассматриваться лишь как принципиальное доказательство асимптотической их устойчивости и не может служить основанием для числовых расчетов.

Авторы признательны В. Ф. Журавлеву, в беседе с которым возникла идея проведения данного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Млодзеевский Б. К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки.– ТРОФЛЕ (Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания). М., 1894, т. 7, вып. 1, с. 46–48.
2. *Ишлинский А. Ю., Василенко В. П., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* Об одной форме установившихся колебаний тяжелого твердого тела.– Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 2, с. 3–18.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 204 с.
4. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
5. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. Т. 1. М.: Наука, 1977. 479 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.
7. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.

Москва – Киев

Поступила в редакцию
3.VI.1985