

УДК 539.3

КВАДРАТНАЯ МЕМБРАНА ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

КАБРИЦ С. А., КОЛПАК Е. П., ЧЕРНЫХ К. Ф.

Расчет квадратной резиновой мембраны — сложная двумерная задача физически и геометрически нелинейной безмоментной теории тонких оболочек. В [1] методом сеток решена задача о раздувании квадратной мембраны нормальным давлением. Полагалось, что материал подчиняется закону Гука. Та же задача решалась в [2] для неогуковского материала в пределах восходящего участка диаграммы «прогиб в центре — давление».

В публикуемой работе для получения общего решения задачи используется изложенная в [3] нелинейная теория оболочек. Для достижения достоверности результатов были использованы два метода расчета, построенные с учетом существенной нелинейности проблемы: конечно-разностный и вариационный.

1. Пусть положение мембраны в недеформированной конфигурации описывается прямоугольными декартовыми координатами $0 \leq x_1 \leq b$, $0 \leq x_2 \leq b$ ($-1/2 h^0 \leq x_3 \leq 1/2 h^0$). В качестве материальных координат точек срединной поверхности примем x_1^0, x_2^0 . Введем радиус-векторы $\mathbf{r}^0 = x_1^0 \mathbf{g}_1 + x_2^0 \mathbf{g}_2$, $\mathbf{r} = x_1(x_1^0, x_2^0) \mathbf{g}_1 + x_2(x_1^0, x_2^0) \mathbf{g}_2 + x_3(x_1^0, x_2^0) \mathbf{g}_3$. Отсюда находим $a_{ij}^0 = \mathbf{r}_i^0 \cdot \mathbf{r}_j^0 = \delta_{ij}$, $a^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 - a_{12}^0 a_{21}^0 = 1$, $\mathbf{r}_i = (\partial x_1 / \partial x_i^0) \mathbf{g}_1 + (\partial x_2 / \partial x_i^0) \mathbf{g}_2 + (\partial x_3 / \partial x_i^0) \mathbf{g}_3$, $a_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = a_{ij}$, $a = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Единичный вектор нормали к деформированной срединной поверхности подсчитывается по формулам [3]:

$$\mathbf{n} = (\mu_1 \mathbf{g}_1 + \mu_2 \mathbf{g}_2 + \mu_3 \mathbf{g}_3) / \nu, \quad \nu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \quad (1.1)$$

$$\mu_1 = \frac{\partial x_2}{\partial x_1^0} \frac{\partial x_3}{\partial x_2^0} - \frac{\partial x_3}{\partial x_1^0} \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0}, \quad \mu_2 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1^0} \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} - \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} \frac{\partial x_3}{\partial x_2^0}, \quad \mu_3 = \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0} - \frac{\partial x_2}{\partial x_1^0} \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0}$$

Толщина деформированной мембраны равна $h = h^0 \lambda_3$, где λ_3 — кратность удлинения поперечного волокна мембраны. При этом для несжимаемого материала $\lambda_3 = 1/a$.

Уравнение равновесия элемента деформированной срединной поверхности имеет вид [3]:

$$\partial \mathbf{T}^1 / \partial x_1^0 + \partial \mathbf{T}^2 / \partial x_2^0 + \mathbf{q} a^{1/2} = 0, \quad \mathbf{T}^i = T^{i1} \mathbf{r}_1 + T^{i2} \mathbf{r}_2 \quad (1.2)$$

где \mathbf{q} — интенсивность поверхностной нагрузки в расчете на единицу площади деформированной срединной поверхности, \mathbf{T}^i — погонные векторы усилий.

Для нормального давления согласно (1.1) имеем $\mathbf{q} a^{1/2} = q \mathbf{n} a^{1/2} = q (\mu_1 \mathbf{g}_1 + \mu_2 \mathbf{g}_2 + \mu_3 \mathbf{g}_3)$. Усилия T^{ij} введены в [3] в расчете на единицу длины недеформированной координатной линии. Физические компоненты напряжений σ_{ij} определяются по формулам $\sigma_{ij} = T^{ij} (a_{ii} a_{jj})^{1/2} / h a^{1/2}$.

Подстановка выражений для \mathbf{r}_i и \mathbf{T}^i в (1.2) приводит к следующей системе трех скалярных уравнений ($i=1, 2, 3$):

$$\frac{\partial}{\partial x_1^0} \left(T^{11} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} + T^{12} \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2^0} \left(T^{21} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} + T^{22} \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} \right) + \mu_1 g = 0 \quad (1.3)$$

Для изотропного несжимаемого материала ($a_{11}+a_{22}=A$):

$$T^{ij} = 2\bar{h}^{\circ} \left[\frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial A} a_{ij}^{\circ} - \left(a^{-1} \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial \lambda_3^2} - a \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial a} \right) a^{ij} \right] \quad (1.4)$$

где Φ° — значение упругого потенциала на срединной поверхности. Далее будем использовать двухпараметрическое семейство упругих потенциалов $\Phi = (2\mu/n^2) (\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n - 3)$. Здесь μ — начальный (линейный) модуль сдвига, n — постоянная материала, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — главные кратности удлинений. При этом $\lambda_1^2 = A/2 + (A^2/4 - a)^{1/2}$, $\lambda_2^2 = A/2 - (A^2/4 - a)^{1/2}$. В частности, для неогукковского материала ($n=2$) соотношения (1.4) принимают вид $T^{ij} = \mu \bar{h}^{\circ} (a_{ij}^{\circ} - a^{ij}/a)$.

Остается выписать граничные условия закрепления на контуре:

$$\begin{aligned} x_1=0, \quad x_2=x_2^{\circ}, \quad x_3=0 \quad \text{при} \quad x_1^{\circ}=0 \\ x_1=b, \quad x_2=x_2^{\circ}, \quad x_3=0 \quad \text{при} \quad x_1^{\circ}=b \\ x_1=x_1^{\circ}, \quad x_2=0, \quad x_3=0 \quad \text{при} \quad x_2^{\circ}=0 \\ x_1=x_1^{\circ}, \quad x_2=b, \quad x_3=0 \quad \text{при} \quad x_2^{\circ}=b \end{aligned} \quad (1.5)$$

и вариационное уравнение Лагранжа (для несжимаемого материала) при закреплённом крае и поверхностной нагрузке — нормальном давлении:

$$\int_{\Omega^{\circ}} \left(T^{\alpha\beta} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x_{\alpha}^{\circ}} \frac{\partial \delta x_{\gamma}}{\partial x_{\beta}^{\circ}} - g^{\mu\nu} \delta x_{\nu} \right) dx_1^{\circ} dx_2^{\circ} = 0 \quad (1.6)$$

2. Одним из эффективных методов решения системы нелинейных дифференциальных уравнений типа (1.3), как показано в [1, 2], является метод сеток. Естественно при написании разностных уравнений, описывающих статику напряженного состояния, исходить из уравнений равновесия элементарного элемента мембраны.

В квадрате $[0 \leq x_1^{\circ} \leq b; 0 \leq x_2^{\circ} \leq b]$ введем равномерную сетку с шагом $l=b/N$ в направлении x_1° и x_2° : $\{x_{1,i} = il, x_{2,j} = jl; i, j = 0, 1, \dots, N\}$. Наряду с введенными целыми узлами рассмотрим и полуцелые $x_{1,i+1/2} = x_{1,i} + l/2$, $x_{2,j+1/2} = x_{2,j} + l/2$.

Выделим в мембране элементарный квадрат со стороной l и с центром в точке $(x_{1,i}, x_{2,j})$. Обращаясь к (1.2), напишем уравнение равновесия этого элемента

$$(\mathbf{T}_{i+1/2, j}^1 - \mathbf{T}_{i-1/2, j}^1)l + (\mathbf{T}_{i, j+1/2}^2 - \mathbf{T}_{i, j-1/2}^2)l + (\mathbf{q}a^{1/2})_{i, j}l^2 = 0 \quad (2.1)$$

Индексы (i, j) означают, что соответствующие величины вычисляются в точке $(x_{1,i}, x_{2,j})$. При вычислении $\mathbf{T}_{i+1/2, j}^1$ будем считать, что

$$\partial \mathbf{r} / \partial x_1^{\circ} = (\mathbf{r}_{i+1, j} - \mathbf{r}_{i, j}) / l \quad \partial \mathbf{r} / \partial x_2^{\circ} = 1/4 (\mathbf{r}_{i+1, j+1} + \mathbf{r}_{i, j+1} - \mathbf{r}_{i+1, j-1} - \mathbf{r}_{i, j-1}) / l \quad (2.2)$$

а при вычислении $\mathbf{T}_{i, j+1/2}^2$:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{r} / \partial x_1^{\circ} = 1/4 (\mathbf{r}_{i+1, j+1} + \mathbf{r}_{i+1, j} - \mathbf{r}_{i-1, j+1} - \mathbf{r}_{i-1, j}) / l \\ \partial \mathbf{r} / \partial x_2^{\circ} = (\mathbf{r}_{i, j+1} - \mathbf{r}_{i, j}) / l \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть $A_{i+1, j} = T_{i+1/2, j}^{11} / l^2$, $B_{i, j+1} = T_{i, j+1/2}^{22} / l^2$. Введем в рассмотрение векторы \mathbf{u} и \mathbf{f} и операторы $\Lambda_1 (T^{11})$ и $\Lambda_2 (T^{22})$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i, j} = (x_1, x_2, x_3)_{i, j}^*, \quad \mathbf{f}_{i, j} = [(T^{12} \partial \mathbf{u} / \partial x_2^{\circ})_{i+1/2, j} - (T^{12} \partial \mathbf{u} / \partial x_2^{\circ})_{i-1/2, j}] / l + \\ + [(T^{21} \partial \mathbf{u} / \partial x_1^{\circ})_{i, j+1/2} - (T^{21} \partial \mathbf{u} / \partial x_1^{\circ})_{i, j-1/2}] / l + (\mathbf{q}a^{1/2})_{i, j} \end{aligned}$$

$$(\Lambda_1 \mathbf{u})_{i, j} = A_{i, j} \mathbf{u}_{i-1, j} - (A_{i, j} + A_{i+1, j}) \mathbf{u}_{i, j} + A_{i+1, j} \mathbf{u}_{i+1, j}$$

$$(\Lambda_2 \mathbf{u})_{i, j} = B_{i, j} \mathbf{u}_{i, j-1} - (B_{i, j} + B_{i, j+1}) \mathbf{u}_{i, j} + B_{i, j+1} \mathbf{u}_{i, j+1}$$

С учетом введенных величин и правил вычисления производных (2.2), (2.3) система разностных уравнений (2.1) примет вид (индексы i, j опущены):

$$\Lambda_1(T^{11})\mathbf{u} + \Lambda_2(T^{22})\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.4)$$

Полученная система алгебраических уравнений является нелинейной, для ее решения будем использовать итерационные методы в сочетании с методом продолжения по параметру. Заметим, что при отсутствии нагрузки операторы Λ_1 и Λ_2 вырождаются. Поэтому, учитывая, что согласно (1.4) T^{ij} представимы в виде $T^{12} = ca_{12}$, $T^{11} = d - ca_{22}$, $T^{22} = d - ca_{11}$, а операторы Λ_1 и Λ_2 линейны относительно T^{ii} , уравнение (2.4) перепишем в следующей форме: $\Lambda_1(d)\mathbf{u} + \Lambda_2(d)\mathbf{u} + \mathbf{f}_1(\mathbf{u}) = 0$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - (\Lambda_1(ca_{22}) + \Lambda_2(ca_{11}))\mathbf{u}$.

К этому уравнению можно применить итерационные методы, используемые при решении уравнений эллиптического типа (при $d=1$ оператор $\Lambda_1 + \Lambda_2$ является разностным аналогом оператора Лапласа). В качестве такого метода использовался метод простой итерации в следующей модификации:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \tau (\Lambda_1^k \mathbf{u}^{k+1} + \Lambda_2^k \mathbf{u}^k + \mathbf{f}_1(\mathbf{u}^k)) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u}^{k+2} = \mathbf{u}^k + \tau (\Lambda_1^{k+1} \mathbf{u}^{k+1} + \Lambda_2^{k+1} \mathbf{u}^{k+2} + \mathbf{f}_1(\mathbf{u}^{k+1}))$$

При выборе релаксационного параметра τ в методе переменных направлений для оператора Лапласа должно выполняться [4] условие $\tau \approx \approx 0,2l$. Аналогичное условие использовалось и при реализации итерационного процесса (2.5).

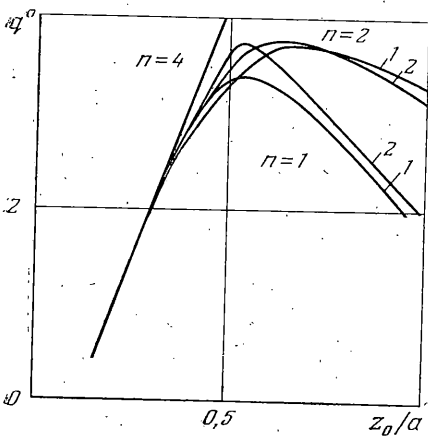
В тех случаях, когда с увеличением деформации давление начинает падать, т. е. диаграмма равновесных состояний имеет предельную точку по давлению, производилась смена параметра продолжения. Для этого к системе уравнений (1.3) добавлялось уравнение состояния идеального газа при постоянной температуре $qV = \text{const } m$, где V — объем пространства под мембраной, m — масса газа, создающего давление q , и движение осуществлялось по параметру m .

Решение вариационного уравнения Лагранжа (1.6) для квадратной мембраны ищется в виде, обеспечивающем выполнение граничных условий (1.5):

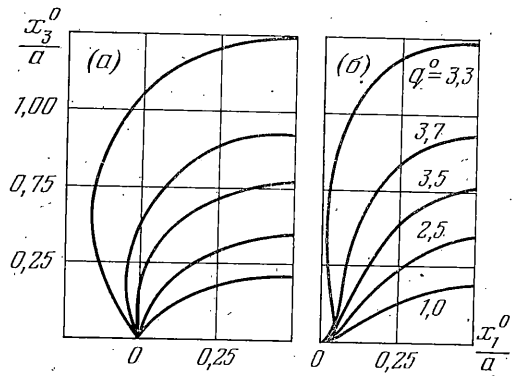
$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C_{i,j}^1 \sin \frac{\pi 2i x_1^0}{b} \sin \frac{\pi (2j-1) x_2^0}{b} \\ x_2 &= x_2^0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C_{i,j}^2 \sin \frac{\pi (2i-1) x_1^0}{b} \sin \frac{\pi 2j x_2^0}{b} \\ x_3 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C_{i,j}^3 \sin \frac{\pi (2i-1) x_1^0}{b} \sin \frac{\pi (2j-1) x_2^0}{b} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $C_{i,j}^p$ — подлежащие определению коэффициенты. Подстановка выписанных выражений в уравнение (1.6) приводит к разрешающей системе трансцендентных уравнений относительно $3k^2$ неизвестных коэффициентов $C_{i,j}^p$.

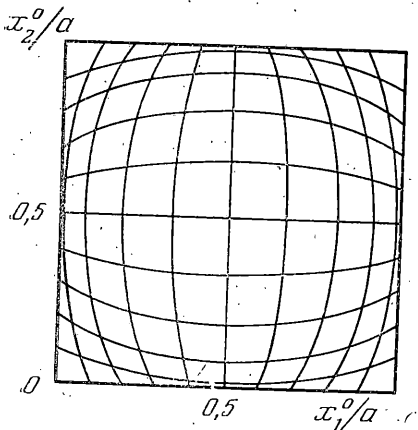
Для рассматриваемого в работе семейства упругих потенциалов получить аналитическое выражение для интегралов (1.6) не удастся, поэтому интегрирование проводилось численно. Двойной интеграл разбивался на повторный, интегрирование осуществлялось методом Симпсона. Система уравнений (1.6) решалась на основе сочетания метода продолжения по параметру [5] и метода Ньютона с модификациями [6]. Основным параметром продолжения являлось нормальное давление или, в случае наличия предельной точки по давлению, прогиб центра мембраны.



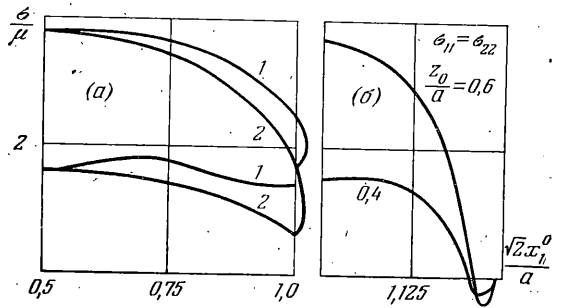
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Сопоставление результатов, полученных методом сеток при разбиении стороны квадрата на 20 частей, и результатов, полученных вариационным методом при учете 9 функций ($k=3$) в (2.7), дало отличие в решении 3–4%. Результаты расчетов представлены на фигурах в безразмерном виде.

На фиг. 1 показана зависимость величины безразмерного давления $q_0 = qb/\mu h^0$ от безразмерного прогиба в центре мембраны $z_0 = x_3(b/2, b/2)/b$ для различных материалов (кривые 1). Из этой фигуры видно, что мембраны из материалов Бартенева – Хазановича ($n=1$) и неогукковского ($n=2$) имеют ограниченную несущую способность по давлению.

На фиг. 2, а изображены профили мембраны из неогукковского материала в сечении $x_2^0 = b/2$, а на фиг. 2, б. – в сечении $x_1^0 = x_2^0$ (по диагонали) при различных значениях нагрузки q_0 . Вид деформированной мембраны сверху при давлении $q_0 = 3,5$ ($z_0 = 0,6$) показан на фиг. 3. Зависимость напряжений от x_1^0 в сечении $x_2^0 = b/2$ и в сечении $x_1^0 = x_2^0$ (по диагонали) при различных значениях давления дана на фиг. 4, а, б (кривые 1 соответствуют σ_{11} , кривые 2 – σ_{22}). Из фиг. 4 видно, что в углах мембраны имеют место отрицательные напряжения. Поэтому, строго говоря, необходимо ввести в рассмотрение локализованные в углах одноосные зоны. Так как эти зоны локализованы в небольшой окрестности угловых точек и их размер уменьшается с увеличением нагрузки, а величины отрицательных напряжений значительно меньше уровня напряжений вдали от углов, то следует ожидать, что учет одноосности мало повлияет на напряженно-деформированное состояние мембраны вдали от края. Поэтому при расчете квадратной мембраны на прочность возможность появления одноосных зон не рассматривалась.

Предложенные выше численные алгоритмы решения задачи достаточно сложны и требуют применения соответствующей вычислительной техники. В ряде же случаев можно ограничиться определением максимальных напряжений и прогибов. При исследовании полученных результатов было замечено, что в сечениях $x_1^0 = b/2$ и $x_2^0 = b/2$ срединная поверхность квадратной мембраны фактически является дугой окружности. Учитывая это, а также то, что в центре мембраны $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} = \lambda^2$,

$T^{11}=T^{22}$, зависимость «давление — прогиб в центре» мембраны удалось приближенно описать при помощи следующей системы алгебраических уравнений:

$$R \sin \varphi_* = b/2, \quad R(1 - \cos \varphi_*) = z_0 b \quad (3.1)$$

$$\lambda = 2R\varphi_*/b, \quad q = 4T^{11}(\lambda, \lambda) \sin \varphi_*$$

при этом напряжения в центре $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda^2 T^{11}$.

На фиг. 1 зависимостям $q(z_0)$, построенным по формулам (3.1), соответствуют кривые 2 для $n=1$ и $n=2$, а для случая $n=4$ аналогичная кривая практически совпадает с точной. Заметим, что для бесконечно длинной в одном направлении мембраны система алгебраических уравнений, аналогичная (3.1), вытекает из решения соответствующей краевой задачи [7].

Следует отметить, что на восходящем участке зависимости «прогиб в центре — давление» для неогукковского материала полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А. С., Шадрин В. А. О равновесии квадратной мембраны при больших прогибах. — В кн.: Исследование по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1980, вып. 24, с. 115—120.
2. Yang W. H., Lu C. H. General deformation of Neo-Hookean membranes. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, v. 40, No. 1, p. 7—12.
3. Черныш К. Ф. Нелинейная теория изотропно-упругих тонких оболочек. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 148—159.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
5. Кабриц С. А., Терентьев В. Ф. О численном построении диаграмм нагрузка — перемещение в одномерных нелинейных задачах теории стержней и оболочек. — В кн.: Актуальные проблемы нелинейной механики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977, с. 155—171.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1973. 631 с.
7. Колпак Е. П. О краевом эффекте в нелинейной теории тонких оболочек. — В кн.: Механика эластомеров. Краснодар: Изд-е Краснодар. политехн. ин-та, 1981, с. 87—95.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.IX.1983.