

УДК 539.3

**О СОПРОТИВЛЕНИИ РАЗРУШЕНИЮ СЛОИСТЫХ
АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ДЕФЕКТАМИ
НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА**

МАЧУГА О. С., ПЕЛЕХ Б. Л.

Один из основных механизмов торможения магистральных трещин в композиционных материалах связан с образованием вторичных трещин сдвига на границе раздела фаз [1]. Однако развитие магистральной трещины затормаживается и в том случае, когда вторичные трещины не образуются. Этот механизм связан с наличием на границах раздела зон неидеальной адгезии, технологических, дислокационных и других дефектов, способствующих поглощению энергии деформации [2-4]. Поэтому сопротивление разрушению слоистых композиционных материалов существенно зависит от состояния границ раздела.

Исследования напряженно-деформированного состояния двух различных соединенных полуплоскостей с трещинами со свободными берегами по линии контакта приводят к результатам с осциллирующими особенностями напряжений в вершинах дефектов [5-7]. В [7, 8] показано, что учет контакта берегов трещины приводит к устранению осцилляции. Отметим, что напряженно-деформированное состояние в окрестностях трещины с контактирующими берегами известно лишь в узком классе задач для однородных [9] и разнородных [1] плоскостей.

В публикуемой работе исследуется задача определения напряженно-деформированного состояния многослойных структур с зонами неидеального контакта слоев [10]¹; в частности, получено решение для двухслойной пластины с различными видами дефектов на границе раздела. В случае нормального расслоения пластины (трещина по линии раздела) применяется подход, аналогичный δ_k -модели [12]. При рассмотрении сдвигового расслоения пластины предполагается наличие межслойного дефекта типа пластического течения. Напряженно-деформированное состояние определяется с помощью вариационного метода, предложенного для решения задач концентрации напряжений [13] и развитого в [14] для задач межслойной концентрации напряжений. На основании полученных результатов анализируются возможные механизмы разрушения рассматриваемой двухслойной пластины.

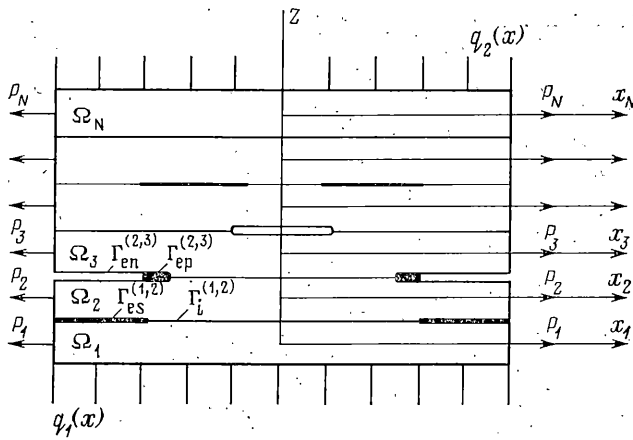
1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим составную пластину длины $2l_n$, состоящую из N различных трансверсально-изотропных слоев Ω_j ($j=1, 2, \dots, N$). Соседние слои контактируют между собой по поверхностям раздела $\Gamma^{(l, l+1)} = \Omega_l \cap \Omega_{l+1}$ ($l=1, 2, \dots, N-1$), состоящих из зон идеального контакта $\Gamma_i^{(l, l+1)}$, зон нормального расслоения $\Gamma_{en}^{(l, l+1)}$, зон неполного нормального расслоения $\Gamma_{ep}^{(l, l+1)}$, зон сдвигового расслоения $\Gamma_{es}^{(l, l+1)}$. Определим влияние указанных дефектов на напряженно-деформированное состояние и разрушение пластины, находящейся под действием поперечных нормальных $q_i = q_i(x)$ ($i=1, 2$) и продольных P_j ($j=1, 2, \dots, N$) усилий (фиг. 1).

Отнесем каждую из пластин к декартовой системе координат с центром на ее срединной плоскости. Следуя [14], исходные соотношения запишем в виде:

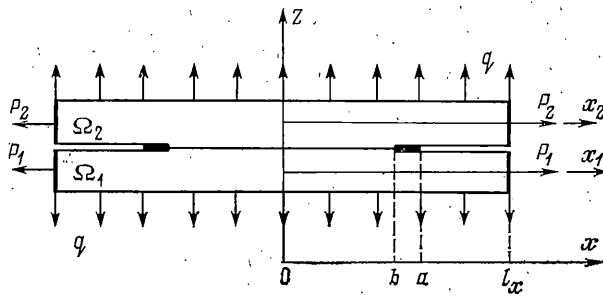
$$N_j(x) = B_j \frac{du_j}{dx} + h_j \lambda_j (\sigma^{(j, j+1)} + \sigma^{(j-1, j)}) \quad (1.1)$$

$$M_j(x) = D_j \frac{d\gamma_j}{dx} + \frac{h_j^2 \lambda_j}{3} (\sigma^{(j, j+1)} - \sigma^{(j-1, j)})$$

¹ См. также: Пелех Б. Л., Лазько В. А. Вариационные принципы механики композитных сред и их приложение.— В кн.: Механика конструкций из композитных материалов: Тез. докл. IV Всес. симп. Новосибирск: Наука, 1982, с. 57.



Фиг. 1



Фиг. 2

$$Q_j(x) = \Lambda_j' \left(\gamma_j + \frac{dw_j}{dx} \right) + \frac{h_j}{6} (\tau^{(j, j+1)} + \tau^{(j-1, j)}) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$$L_{1j} \equiv B_j \frac{d^2 u_j}{dx^2} + h_j \lambda_j \frac{d}{dx} (\sigma^{(j, j+1)} + \sigma^{(j-1, j)}) + \tau^{(j, j+1)} - \tau^{(j-1, j)} = 0 \quad (1.2)$$

$$L_{2j} \equiv D_j \frac{d^2 \gamma_j}{dx^2} - \Lambda_j' \left(\gamma_j + \frac{dw_j}{dx} \right) + \frac{h_j^2 \lambda_j}{3} \frac{d}{dx} (\sigma^{(j, j+1)} - \sigma^{(j-1, j)}) + \frac{5h_j}{6} (\tau^{(j, j+1)} + \tau^{(j-1, j)}) = 0$$

$$L_{3j} \equiv \Lambda_j' \left(\frac{d\gamma_j}{dx} + \frac{d^2 w_j}{dx^2} \right) + \frac{h_j}{6} \frac{d}{dx} (\tau^{(j, j+1)} + \tau^{(j-1, j)}) + \sigma^{(j, j+1)} - \sigma^{(j-1, j)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$$u_{(j)}(x, \pm h_j) = \frac{h_j}{2G_j'} \left(\frac{\tau^{(j, j+1)} - \tau^{(j-1, j)}}{3} \pm \frac{Q_j}{h_j} \right) + u_j \mp h_j \frac{dw_j}{dx}$$

$$w_{(j)}(x, \pm h_j) = \frac{h_j}{E_{0j}'} \left(\frac{\sigma^{(j, j+1)} - \sigma^{(j-1, j)}}{6} \pm \frac{\sigma^{(j, j+1)} + \sigma^{(j-1, j)}}{2} \right) +$$

$$+ w_j - h_j \lambda_j \left(\frac{h_j}{3} \frac{d\gamma_j}{dx} \pm \frac{dw_j}{dx} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (1.3)$$

$$B_j = 2h_j E_j / (1 - \nu_j^2), \quad D_j = B_j h_j^2 / 3, \quad \Lambda_j' = 5G_j' h_j / 3$$

$$\lambda_j = \nu_j' E_j' / ((1 - \nu_j) E_j'), \quad E_{0j}' = (1 - \nu_j) E_j' / (1 - \nu_j - 2(\nu_j')^2 E_j / E_j')$$

Здесь $N_j(x)$, $Q_j(x)$ — продольная и поперечная силы соответственно,

$M_j(x)$ — изгибающий момент, u_j, w_j — перемещения точек срединных поверхностей, γ_j — углы поворота нормальных сечений, $u_{(j)}(x, z), w_{(j)}(x, z)$ — перемещения точек слоев, E_j, ν_j — модуль Юнга и коэффициент Пуассона в продольном направлении, E_j', ν_j', G_j' — упругие постоянные в поперечном направлении, h_j — половина толщины j -й пластины; $\tau^{(j, j+1)}, \sigma^{(j, j+1)}$ — межслойные контактные напряжения, причем: $\sigma^{(l, l+1)} \equiv \sigma_{zz}^{(l)}(x, h_l) \equiv \sigma_{zz}^{(l+1)}(x, -h_{l+1})$, $\tau^{(l, l+1)} \equiv \tau_{xz}^{(l)}(x, h_l) \equiv \tau_{xz}^{(l+1)}(x, -h_{l+1})$ ($l = 1, 2, \dots, N-1$), $\sigma^{(0, 1)} = q_1(x)$, $\sigma^{(N, N+1)} = q_2(x)$, $\tau^{(0, 1)} = \tau^{(N, N+1)} = 0$.

В зонах идеального механического контакта слоев, нормального расслоения $\Gamma_{en}^{(l, l+1)}$ и $\Gamma_{ep}^{(l, l+1)}$ выполняются условия

$$R_{1l} \equiv u_{(l)}(x, h_l) - u_{(l+1)}(x, -h_{l+1}) = 0 \quad (1.4)$$

$$R_{2l} \equiv w_{(l)}(x, h_l) - w_{(l+1)}(x, -h_{l+1}) = 0 \quad (x \in \Gamma_i^{(l, l+1)}, l = 1, 2, \dots, N-1)$$

$$\sigma^{(l, l+1)} = \tau^{(l, l+1)} = 0 \quad (x \in \Gamma_{en}^{(l, l+1)}, l = 1, 2, \dots, N-1) \quad (1.5)$$

$$R_{1l} \equiv u_{(l)}(x, h_l) - u_{(l+1)}(x, -h_{l+1}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\sigma^{(l, l+1)} = \sigma_T^{(l, l+1)} \quad (x \in \Gamma_{ep}^{(l, l+1)}, l = 1, 2, \dots, N-1)$$

где $\sigma_T^{(l, l+1)}$ — заданный уровень нормальных контактных напряжений; считаем, что при достижении контактными напряжениями этого уровня межфазная граница, т. е. тонкая прослойка между слоями, переходит в пластическое состояние.

В зонах сдвигового расслоения $\Gamma_{es}^{(l, l+1)}$ полагаем

$$R_{2l} \equiv w_{(l)}(x, h_l) - w_{(l+1)}(x, -h_{l+1}) = 0 \quad (1.7)$$

$$\tau^{(l, l+1)} = \tau_T^{(l, l+1)} \quad (x \in \Gamma_{es}^{(l, l+1)}, l = 1, 2, \dots, N-1)$$

где $\tau_T^{(l, l+1)}$ — касательные напряжения, вызывающие текучесть межфазной границы.

Граничные условия на торце пластин имеют вид: $N_j(\pm l_x) = P_j$, $M_j(\pm l_x) = 0$, $Q_j(\pm l_x) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$). С учетом (1.1) эти условия запишутся так:

$$\Phi_{1j} \equiv B_j \frac{du_j}{dx} + h_j \lambda_j (\sigma^{(j, j+1)} + \sigma^{(j-1, j)}) - P_j = 0 \quad (1.8)$$

$$\Phi_{2j} \equiv D_j \frac{d\gamma_j}{dx} + \frac{h_j^2 \lambda_j}{3} (\sigma^{(j, j+1)} - \sigma^{(j-1, j)}) = 0$$

$$\Phi_{3j} \equiv \Lambda_j' \left(\gamma_j + \frac{dw_j}{dx} \right) + \frac{h_j}{6} (\tau^{(j, j+1)} - \tau^{(j-1, j)}) = 0, \quad x = \pm l_x$$

Ниже рассмотрены случаи нормального и сдвигового расслоения двухслойной структуры.

2. Нормальное расслоение структуры. Допустим, что нормальные усилия $q_1 = q_2 = q = \text{const} > 0$ являются растягивающими; вследствие их действия на линии контакта при $a \leq |x| \leq l_x$ образовались трещины со свободными берегами (область $\Gamma_{en}^{(1, 2)}$), а при $b \leq |x| < a$ — пластические зоны $(1, 2)_{ep}$. Считаем, что длина пластической зоны $c = a - b$ заранее неизвестна, а длина трещины $l_x - a$ — задана (фиг. 2).

Для определения напряженно-деформированного состояния двухслойной пластины необходимо решить систему уравнений равновесия (1.2) с граничными условиями (1.8). Кроме того, при $|x| < b$ должны выполняться условия (1.4); при $b \leq |x| < a$ — условия (1.6), а при $a \leq |x| \leq l_x$ — условия (1.5). Длину пластической зоны определим, удовлетворяя условию непрерывности нормальных контактных напряжений: $\lim_{x \rightarrow b-0} \sigma^{(1, 2)} = \sigma_T^{(1, 2)}$ при

Для решения поставленной задачи применим вариационный метод [14]. Вариационное уравнение запишем в виде

$$\int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^2 [L_{1i} \delta u_i + L_{2i} \delta \gamma_i + L_{3i} \delta w_i] \right\} dx + \int_0^b (R_{21} \delta \sigma^{(1,2)}) dx + \int_0^a (R_{11} \delta \tau^{(1,2)}) dx - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \delta \Phi_{ji} A_{ij} = 0 \quad (2.1)$$

где A_{ij} — неопределенные множители Лагранжа, L_{ji} — дифференциальные операторы (1.3), $\delta \Phi_{ji}$ — вариации граничных условий (1.8).

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$u_i(x) = l_x \sum_{t=1}^s A_{u_i}^{(t)} \left(\frac{x}{l_x} \right)^{2t-1}, \quad \gamma_i = \sum_{t=1}^s A_{\gamma_i}^{(t)} \left(\frac{x}{l_x} \right)^{2t-1},$$

$$w_i(x) = l_x \sum_{t=0}^s A_{w_i}^{(t)} \left(\frac{x}{l_x} \right)^{2t} \quad (i=1, 2) \quad (|x| \leq l_x) \quad (2.2)$$

$$\sigma^{(1,2)}(x) = E_1 \sum_{t=0}^s A_{\sigma}^{(t)} \left(\frac{x}{l_x} \right)^{2t} \quad (|x| < b)$$

$$\sigma^{(1,2)}(x) = \sigma_T^{(1,2)} \quad (b \leq |x| < a), \quad \sigma^{(1,2)}(x) = 0 \quad (a \leq |x| \leq l_x)$$

$$\tau^{(1,2)}(x) = E_1 \sum_{t=1}^s A_{\tau}^{(t)} \left(\frac{x}{l_x} \right)^{2t-1} \quad (|x| < a), \quad \tau^{(1,2)}(x) = 0 \quad (a \leq |x| \leq l_x)$$

Выбор искоемых напряжений и перемещений в виде (2.2) обусловлен физической и геометрической симметрией задачи. Кроме того, автоматически удовлетворяются условия для контактных напряжений в областях $\Gamma_{ep}^{(1,2)}$ и $\Gamma_{en}^{(1,2)}$.

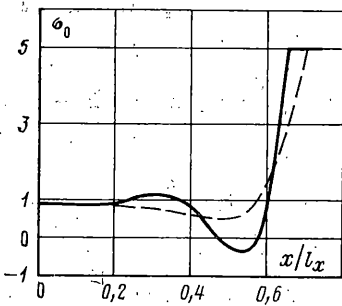
Используя (2.2), выполним в (2.1) варьирование по неизвестным коэффициентам разложения и интегрирование полученных выражений по x . Приравнявая к нулю выражения при одноименных вариациях, получим систему $8s+3$ линейных алгебраических уравнений. Присоединяя к ней граничные условия (1.8), записанные с учетом (2.2), получим полную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложений в (2.2) и множителей Лагранжа.

Для численной реализации задачи была выписана указанная система уравнений при произвольном s ; ее решение строилось с помощью метода Гаусса с выбором главного члена. Расчеты показали, что для достижения 1% точности между двумя приближениями достаточно взять $s=7$.

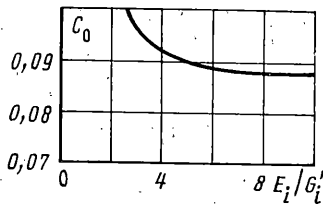
На фиг. 3 приведено распределение величины контактных напряжений $\sigma_0 = \sigma^{(1,2)}/q$ по длине зоны контакта при $E_1/E_2=1$, $\nu_i=0,3$, $\nu_i'=0,4$, $E_i/G_i'=10$, $E_i/E_i'=1$ (сплошная линия), $E_i/E_i'=5$ (штриховая линия), $a/l_x=0,75$, $P_i/(qh_i)=1$, $l_x/h_i=10$, $\sigma_T^{(1,2)}/q=5$ ($i=1, 2$). На фиг. 4 приведена зависимость длины пластической зоны $c_0=c/l_x$ от сдвиговой жесткости материалов слоев. Расчеты показывают, что касательные напряжения $\tau^{(1,2)}$ малы по длине зоны контакта. С уменьшением длины трещины до нуля распределение σ_0 по длине зоны контакта стремится к постоянному значению, равному по величине единице.

Отметим, что в случае слабого межфазного взаимодействия направление роста трещины будет совпадать с линией контакта. В силу такого предположения разрушение рассматриваемой структуры, согласно гипотезам δ_k -модели [12], наступит при таких значениях внешней нагрузки, когда выполняется условие $\delta(a) \equiv w_{(2)}(a, -h_2) - w_{(1)}(a, h_1) = \delta_k$.

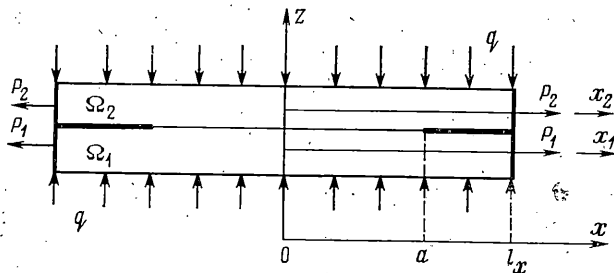
3. Сдвиговое расслоение. Рассмотрим случай $q_1=q_2=q=\text{const} < 0$, соот-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ветствующий поперечному сжатию структуры. Считаем, что вследствие действия усилий P_i на участках $a \leq |x| \leq l_x$ линии контакта нарушились адгезионные связи между слоями пластины — область $\Gamma_{es}^{(l, l+1)}$ (фиг. 5).

Для определения полей напряжений и перемещений в данном случае необходимо решить систему уравнений (1.3) с граничными условиями (1.8) совместно с условиями (1.4) при $|x| < a$ и условиями (1.7) при $a \leq |x| \leq l_x$.

Перемещения точек пластин будем искать в том же виде, что и в предыдущей задаче; для контактных напряжений принимаем

$$\sigma^{(1, 2)}(x) = E_1 \sum_{i=0}^s A_{\sigma}^{(i)} \left(\frac{x}{l_x} \right)^{2i} \quad (|x| \leq l_x),$$

$$\tau^{(1, 2)}(x) = E_1 \sum_{i=1}^s A_{\tau}^{(i)} \left(\frac{x}{l_x} \right)^{2i-1} \quad (|x| < a)$$

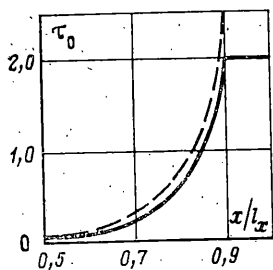
$$\tau^{(1, 2)}(x) = \tau_T^{(1, 2)} \operatorname{sign}(x) \quad (a \leq |x| \leq l_x)$$

Данное представление контактных напряжений обеспечивает непрерывность $\sigma^{(1, 2)}$ вдоль линии контакта, а также выполнение условия, налагаемого на напряжение $\tau^{(1, 2)}$ в области $\Gamma_{es}^{(1, 2)}$.

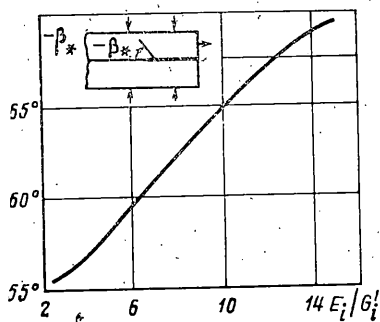
Вариационное уравнение задачи запишем следующим образом:

$$\int_0^x \left\{ \sum_{i=1}^2 [L_{1i} \delta u_i + L_{2i} \delta \gamma_i + L_{3i} \delta w_i] \right\} dx + \int_0^x (R_{21} \delta \sigma^{(1, 2)}) dx + \\ + \int_0^a (R_{11} \delta \tau^{(1, 2)}) dx + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \delta \Phi_{ij} A_{ij} = 0$$

Как и ранее, можем получить значения контактных напряжений и перемещений точек пластин. На фиг. 6 приведено распределение величины $\tau_0 = -\tau^{(1, 2)}/q$ по длине зоны контакта при $a/l_x = 0,9$, $\tau_T^{(1, 2)}/q = -2$, $P_1/(qh_1) = 0$, $P_2/(-qh_2) = 5$, $\nu_1' = 0,3$, $E_1/G_1' = 2,6$, $E_1/E_1' = 4$ (сплошная ли-



Фиг. 6



Фиг. 7

ния), $E_i/E_i' = 5$ (штриховая линия), $E_2/E_1 = 3$ ($i=1, 2$): значения остальных параметров такие же, как и прежде.

Отметим, что межслойный дефект является концентратором напряжений и может способствовать возникновению трещины. Для определения предельного состояния тел с дефектами существует ряд гипотез [9, 12, 15–17]. В публикуемой работе использована гипотеза [12], заключающаяся в том, что развитие трещины происходит в плоскости, в которой наибольшие растягивающие напряжения будут максимальными и равными пределу прочности на разрыв $[\sigma]$:

$$\partial \sigma_{\alpha\alpha}(a) / \partial \alpha = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha}(a) = [\sigma] \quad (3.1)$$

где α — угол между положительным направлением оси x и нормалью к рассматриваемой площадке. Из (3.1), согласно [14], можем получить соотношение для угла α_* , определяющего нормаль к направлению первоначального развития трещины:

$$\alpha_* = \arctg \frac{\sigma_{\alpha\alpha}(a) - \sigma_{11}(a)}{\tau^{(1,2)}(a)}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_{11} + \sigma^{(1,2)}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma^{(1,2)})^2 - 4(\tau^{(1,2)})^2}, \quad \sigma_{11} = \frac{N_2}{2h_2} - \frac{3M_2}{2h_2^2}$$

На фиг. 7 представлена зависимость угла распространения трещины $\beta_* = \alpha_* - 90^\circ \text{sign}(\alpha_*)$ от сдвиговой жесткости материалов слоев при $a/l_x = 0,8$, $E_i/E_i' = 2$; значения остальных параметров указаны выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П. О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4, с. 120–128.
2. Пелех Б. Л. Формулировка и решение задач торможения и остановки трещин в композиционных средах. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 6, с. 48–51.
3. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Сокольников А. М., Таланов А. И. Исследование торможения роста трещин в слоистых металлических композициях. — Физ.-хим. механ. материалов, 1977, т. 13, № 3, с. 3–11.
4. Theocaris P. S., Miliotis J. The process of the momentary arrest of the moving crack approaching a material discontinuity. — Internat. J. Mech. Sci., 1981, v. 23, N 7, p. 423–436.
5. Williams M. L. The stress around a fault or crack in dissimilar media. — Bull. Seismol. Soc. America, 1959, v. 49, N 2, p. 199–204.
6. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами. — Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1962: № 4, с. 131–137.
7. Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 957–962.
8. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины. — Механ. композитн. материалов, 1979, № 3, с. 387–396.
9. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 82–93.
10. Пелех Б. Л., Лазыко В. А. Вариационные принципы механики композитных сред и их приложения. — В кн.: Механика конструкций из композитных материалов. Тез. докл. IV Всес. симп. Новосибирск, 1982. с. 57.

11. *Лазько В. А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 2. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела. — *Механ. композитн. материалов*, 1982, № 1, с. 77–84.
12. *Ланасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
13. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шперенко К. И.* Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев: Наук. думка, 1974. 272 с.
14. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. Киев: Наук. думка, 1982. 296 с.
15. *Павлов П. А., Никулина Н. Е.* Критерии предельного сопротивления хрупкого материала с исходной трещиной при плоском напряженном состоянии. — *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, 1973, № 334, с. 12–17.
16. *Дудукаленко В. В., Ромалис Н. Б.* О направлении роста трещины в условиях плоского напряженного состояния. — *Изв. АН СССР. МТТ*, 1973, № 2, с. 129–136.
17. *Sih G. S.* Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. — *Internat. J. Fract.*, 1974, v. 10, N 3, p. 305–321.

Львов

Поступила в редакцию
11.V.1984