

УДК 539.3

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ
КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

БОЙКО А. В.

Рассматривается упругопластическое деформирование круга с центральной трещиной при заданных на его границе смещениях. Используется модель трещины Леонова — Панасюка — Дагдейла. Соответствующая задача теории упругости сведена к сингулярному интегральному уравнению. Получены численное и приближенное аналитическое решения, которые сравниваются между собой. Выявлена возможность устойчивого роста трещины. Установлена связь решения задачи для бесконечной плоскости с данным решением и отмечены его практические приложения.

1. Рассмотрим тонкую круглую пластину радиуса R из упруго идеально пластического материала с центральной трещиной длины $2l$. Пусть берега трещины свободны от нагрузки, а на границе круга — окружности L_0 — заданы смещения. Начало декартовой (x, y) и полярной (ρ, θ) систем координат поместим в центре круга, ось x направим вдоль трещины. Пластические области около вершин трещины в соответствии с гипотезой Дагдейла [1] представим прямолинейными отрезками длины $a=l_1-l$. Исходя из условия пластичности Треска — Сен-Венана можно принять, что в пластической зоне растягивающее напряжение σ_y постоянно и равно пределу текучести материала σ_T . В такой постановке рассматриваемая упругопластическая задача сводится к решению упругой задачи для круга с центральной трещиной длины $2l_1$, когда на берегах концевых зон трещины заданы напряжения $\sigma_y=\sigma_T$, а на границе круга — смещения. Величина a должна быть определена из решения задачи.

2. Сингулярное интегральное уравнение задачи теории упругости о центральной трещине в круглой пластине, когда на ее границе заданы смещения, а в концевых зонах к берегам трещины приложено постоянное напряжение $\sigma_y=\sigma_T$, имеет вид [2]

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g(t)}{t-t_0} [1+P(t_0, t)] dt - \int_{-l_1}^{l_1} \frac{\overline{g(\bar{t})}}{\bar{t}-\bar{t}_0} [1-P(t_0, t)] \overline{d\bar{t}} + \right. \\ \left. + \int_{-l_1}^{l_1} K(t_0, t) g(t) dt + \int_{-l_1}^{l_1} M(t_0, t) \overline{g(\bar{t})} \overline{d\bar{t}} \right\} = F(t_0) \quad (2.1)$$

$$-l_1 < t_0 < l_1, \quad P(t_0, t) = \frac{\overline{dt_0} \cdot t - t_0}{dt_0 \cdot \bar{t} - \bar{t}_0} \quad (2.2)$$

$$K(t_0, t) = 2\alpha^{-1}(\alpha-1)^{-1}R^{-2}\bar{t} + \alpha^{-1}r^{-4}(r^2+R^2)(\bar{t}-\bar{t}_0) + \alpha r^{-2}t\overline{dt_0}/dt_0 + \\ + \alpha^{-1}r^{-6}(R^2-t\bar{t}) [R^2(3t-2t_0) - t^2\bar{t}_0] \overline{dt_0}/dt_0 \quad (2.3)$$

$$M(t_0, t) = -2\alpha^{-1}(\alpha-1)^{-1}R^{-2}t - \alpha^{-1}\bar{r}^{-4}(\bar{r}^2+R^2)(t-t_0) + \\ + \alpha^{-1}r^{-4}t^2(t-t_0)\overline{dt_0}/dt_0, \quad r^2 = R^2 - t\bar{t}_0$$

$$F(t_0) = \begin{cases} \sigma_T + W(t_0), & l < |t_0| < l_1 \\ W(t_0), & |t_0| \leq l \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ — для обобщенного плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона. Незвестная функция $g(t)$ имеет вид

$$g(t) = 2\mu(1 + \kappa)^{-1} d[(u + iv)^+ - (u + iv)^-] / dt \quad (2.5)$$

где μ — модуль сдвига, u^\pm, v^\pm — горизонтальные и вертикальные перемещения, соответственно, левого и правого берегов трещины.

Рассмотрим случай, когда на границе круга заданы постоянные радиальные смещения $w > 0$. При этом функция $W(t_0)$ имеет вид $W(t_0) = -4\mu w / [(\kappa - 1)R]$.

Наряду с уравнением (2.1) должно быть рассмотрено условие однозначности перемещений

$$\int_{-l_1}^{l_1} g(t) dt = 0 \quad (2.6)$$

В силу симметрии рассматриваемой задачи относительно оси абсцисс $t = \bar{t}$, а функция $g(t)$ является чисто мнимой.

$$g(t) = \frac{2i\mu}{1 + \kappa} \frac{d}{dt} (v^+ - v^-) \quad (2.7)$$

где $v^+ - v^- = 2v^+$ — раскрытие трещины.

Отнесем в (2.1) длины к l_1 и учтем (2.7). Получим

$$\frac{1}{\pi i} \left[\int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H(t_0, t) g(t) dt \right] = F(t_0) \quad (-1 < t_0 < 1) \quad (2.8)$$

$$F(t_0) = \begin{cases} \sigma_T - \frac{4\mu w}{(\kappa - 1)R}, & s < |t_0| < 1, \\ -\frac{4\mu w}{(\kappa - 1)R}, & |t_0| \leq s, \end{cases} \quad s = \frac{l}{l_1} \quad (2.9)$$

$$H(t_0, t) = \lambda^2 \kappa^{-1} \{ 4(\kappa - 1)^{-1} t + t_2^2 [(\kappa^2 + 7)t - 6t_0] - 2\lambda^2 t_2^4 (2t^3 - 5t_0 t^2 + 3t_0^2 t) - 2\lambda^4 t_2^6 (t_0 t^4 - 2t_0 t^3 + t_0^3 t^2) \} \quad (2.10)$$

$$\lambda = l_1 / R, \quad t_2^{-2} = 1 - \lambda^2 t_0 t$$

Замечание. При $R \rightarrow \infty$ и $w/R = \text{const}$ $K(t_0, t) \rightarrow 0$, $M(t_0, t) \rightarrow 0$. Поэтому исходное уравнение (2.1), а следовательно, и (2.8) превращаются в уравнение для трещины в бесконечной плоскости, растянутой на бесконечности напряжением

$$p = 4\mu w / ((\kappa - 1)R) \quad (2.11)$$

3. Уравнение (2.8) относится к сингулярным интегральным уравнениям с разрывной правой частью. Прямое применение для решения таких уравнений одного из численных методов, основанных на квадратурных формулах для сингулярных интегралов [3], будет неэффективно. Вследствие этого воспользуемся подходом, изложенным в [4, с. 113, 116], в соответствии с которым неизвестная функция $g(t)$ разыскивается в виде

$$g(t) = h(t) + \omega(t) \quad (3.1)$$

где $h(t)$ и $\omega(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям и условиям соответственно:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{h(t)}{t - t_0} dt = F(t_0), \quad \int_{-1}^1 h(t) dt = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 H(t_0, t) \omega(t) dt = \varphi(t_0), \quad \int_{-1}^1 \omega(t) dt = 0 \quad (3.3)$$

$$\varphi(t_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 H(t_0, t) h(t) dt \quad (3.4)$$

Таким образом, решение уравнения с разрывной правой частью сводится к обращению интеграла типа Коши (3.2) и численному решению уравнения с гладкой правой частью (3.3).

Неизвестную функцию $g(t)$ (а следовательно, $h(t)$ и $\omega(t)$) будем разыскивать в классе неограниченных на концах интервала интегрирования функций. Тогда решение уравнения (3.2) при дополнительном условии записывается так [5]:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_0^2} F(t_0)}{t_0-t} dt_0 \quad (3.5)$$

Выполнив интегрирование в (3.5), находим

$$h(t) = \frac{it}{\sqrt{1-t^2}} \left[\frac{2\sigma_T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} - \frac{4\mu w}{(\kappa-1)R} - \frac{\sigma_T}{\pi} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \ln \frac{|t\sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-t^2}|}{|t\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-t^2}|} \right] \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.4) и произведя громоздкие выкладки, получим

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) = & -\frac{\lambda^2 \sigma_T}{\kappa} \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} - \frac{2\mu w}{(\kappa-1)R\sigma_T} \right) \left[\frac{2}{\kappa-1} + \frac{2}{\lambda^2} + \right. \right. \\ & + \frac{13-\kappa^2-\lambda^2}{t_1^2} - \frac{12\lambda^2}{t_1^3} + \frac{1}{\sqrt{1-t_1^2}} \left(\frac{\kappa^2+7}{t_1^2} - \frac{6}{\lambda^2} + \frac{1}{1-t_1^2} \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{10}{t_1^2} (3t_1^2-2) - \frac{4\lambda^2}{t_1^4} (4t_1^2-3) - \frac{6}{\lambda^2} (2t_1^2-1) + \frac{1}{1-t_1^2} \left(\frac{6\lambda^2}{t_1^3} (2-5t_1^2+ \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 4t_1^4) - \frac{\lambda^2}{t_1^4} (12-29t_1^2+20t_1^4) - \frac{1}{\lambda^2} (2-5t_1^2+6t_1^4) \right) \right) \right] - \\ & - \frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi} \left[s \left(\frac{2}{\kappa-1} - \frac{1}{t_1 t_0} \right) - \frac{2}{t_1 \sqrt{1-s^2}} \operatorname{arctg} \frac{t_1 s \sqrt{1-s^2}}{1+\sqrt{1-t_1^2}-t_1^2 s^2} \times \right. \\ & \times \left(t_0 + \frac{13-\kappa^2}{2t_1} - \frac{6}{t_1 t_0} \right) + \frac{s}{(1-t_1^2 s^2) \sqrt{1-t_1^2}} \left(2 \left(5-3t_1 t_0 - \frac{2}{t_1 t_0} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{(1-t_1^2 s^2)(1-t_1^2)} \left(t_1 t_0 (1-t_1^2 (2+3s^2) + 4t_1^4 s^2) - \frac{2}{t_0} \left(3-t_1^2 (4+5s^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 6t_1^4 s^2 \right) + \frac{1}{t_1 t_0} (5-t_1^2 (6+7s^2) + 8t_1^4 s^2) \right) \right) \right] \left. \right\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

где $t_1 = \lambda^2 t_0$, $\lambda = l/R$, $s = l/l_1$.

Неизвестную функцию в уравнении (3.3) представим следующим образом:

$$\omega(t) = -i\sigma_T \chi(t) / \sqrt{1-t^2} \quad (3.8)$$

где $\chi(t)$ — новая неизвестная функция.

Значение $s = l/l_1$ определим из условия ограниченности напряжений на концах трещины $|t|=1$. Для этого потребуем, чтобы коэффициент интенсивности напряжений k_1 в этих точках равнялся нулю

$$k_1 = i\sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow 1} [V\sqrt{1-t} g(t)] = 0 \quad (3.9)$$

Условие (3.9) с учетом (3.1), (3.6) и (3.8) приводит к соотношению

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} - \chi(1) = \frac{4\mu\nu}{(\kappa-1)R\sigma_T} \quad (3.10)$$

которое можно переписать, вводя $a=l_1-l$ и p по (2.11):

$$\frac{a}{l_1} = 1 - \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{p}{\sigma_T} + \chi(1) \right) \right] \quad (3.11)$$

Значение $\chi(1)$ получим, решая численно уравнение (3.3) с учетом (3.8) одним из численных методов [3]. При этом выражение в первой круглой скобке соотношения (3.7) нужно заменить согласно (3.10) на $1/2\chi(1)$.

На основании (3.1), (3.6), (3.8) и (3.10) функция $g(t)$ представляется в виде

$$g(t) = \frac{i\sigma_T}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ t \left[\chi(1) - \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \ln \frac{|t\sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-t^2}|}{|t\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-t^2}|} \right] - \chi(t) \right\} \quad (3.12)$$

Выражение для раскрытия трещины, отнесенного к размеру l_1 , с учетом (2.7) при условии $\delta(\pm 1) = 0$ можно записать так:

$$\delta(t) = -\frac{1+\kappa}{2i\mu} \int_t^1 g(x) dx \quad (-1 < t < 1) \quad (3.13)$$

Подставляя (3.12) в (3.13), находим

$$\delta(t) = \sigma_T \frac{1+\kappa}{2\pi\mu} \left[t \ln \frac{|t\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-t^2}|}{|t\sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-t^2}|} - s \ln \frac{|\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-s^2}|}{|\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-s^2}|} + \pi \left(\int_t^1 \frac{\chi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \chi(1)\sqrt{1-t^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

Решение уравнения (3.3) получим с помощью численного метода, основанного на квадратурных формулах типа Гаусса — Чебышева для сингулярных и регулярных интегралов. Тогда значения функции $\chi(x)$ будут найдены на дискретной системе точек, являющихся нулями многочлена Чебышева некоторого порядка n [6]. Величину $\chi(1)$ определим с помощью интерполяционного многочлена, представление которого в виде разложения по многочленам Чебышева приводит к следующему выражению для интеграла в формуле (3.14):

$$\int_t^1 \frac{\chi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi(y)}{\sqrt{1-y^2}} \left[\arccos t + 2\sqrt{1-t^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} T_k(y) U_{k-1}(t) \right] dy \quad (3.15)$$

где $T_k(y)$, $U_{k-1}(t)$ — многочлены Чебышева, соответственно, первого и второго рода. К интегралу в правой части (3.15) применим квадратурную формулу Гаусса — Чебышева по узлам $T_n(y)$.

4. Наряду с численным получим приближенное аналитическое решение уравнения (2.8) при малых значениях $\lambda=l_1/R$. В разложении ядра

уравнения по степеням λ будем удерживать члены, порядок которых не превышает λ^2 . Тогда получим приближенное уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-t_0} dt + \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(4\eta t - \frac{6t_0}{\kappa}\right) g(t) dt = F(t_0) \quad (-1 < t_0 < 1),$$

$$\eta = (\kappa^3 - \kappa^2 + 7\kappa - 3)/(4\kappa(\kappa - 1)) \quad (4.1)$$

$F(t_0)$ определяется формулой (2.9).

Решение уравнения (4.1) в классе неограниченных на концах интервала интегрирования функций принимает вид

$$g(t) = -\frac{it}{\pi \sqrt{1-t^2}} \left\{ \frac{1}{1+\lambda^2\eta} \left[\pi \frac{4\mu w}{(\kappa-1)R} - 2\sigma_T \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} + \lambda^2\eta s \sqrt{1-s^2} \right) \right] + \sigma_T \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \ln \frac{|t\sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-t^2}|}{|t\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-t^2}|} \right\} \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (3.9), приходим к двум формам соотношения для определения значения $s=l/l_1=1-a/l_1$:

$$\frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} + \lambda^2\eta s \sqrt{1-s^2} \right) = \frac{4\mu w}{(\kappa-1)R\sigma_T} \quad (4.3)$$

$$\frac{a}{l_1} = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{p}{\sigma_T} - \lambda^2\eta s \sqrt{1-s^2} \right) \quad (4.4)$$

Заметим, что $\lambda^2\eta s\sqrt{1-s^2} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ и $w/R = \text{const}$. Вследствие этого соотношение (4.4) переходит в соответствующую зависимость модели Леонова — Панасюка — Дагдейла для бесконечной плоскости [1, 7]. Таким образом, второе слагаемое в левой части (4.3) отражает взаимодействие трещины с границей круговой пластины. Аналогичные утверждения справедливы для соотношений (3.10) и (3.11).

С учетом зависимости (4.3) функция $g(t)$ принимает вид

$$g(t) = i \frac{\sigma_T}{\pi} \ln \frac{|t\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-t^2}|}{|t\sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-t^2}|} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (3.13), находим выражение для раскрытия трещины

$$\delta(t) = \sigma_T \frac{1+\kappa}{2\pi\mu} \left(t \ln \frac{|t\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-t^2}|}{|t\sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-t^2}|} - s \ln \frac{|\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-s^2}|}{|\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-s^2}|} \right) \quad (4.6)$$

Практический интерес представляют значения $\delta(t)$ в точках $t=0$ (середина трещины) и $t=s$ (вершина трещины). При $t=s$ выражение (4.6) содержит неопределенность, после раскрытия которой находим

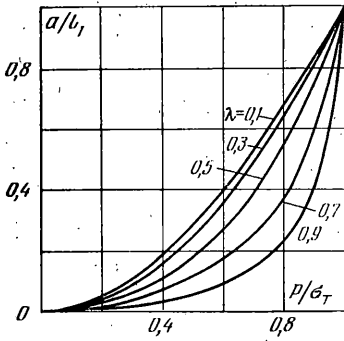
$$\delta(s) = \sigma_T [(1+\kappa)/(\pi\mu)] s \ln s^{-1} \quad (4.7)$$

Заметим, что для плоского напряженного состояния $(\kappa+1)/\mu=8/E$, где E — модуль упругости.

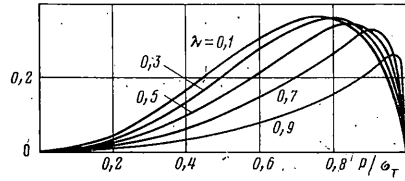
Зависимость (4.7) необходимо также иметь в виду при расчетах по формуле (3.14).

Аналогично тому, как это было сделано в пп. 3, 4, могут быть рассмотрены варианты данной задачи при любом другом гладком задании смещений на границе круга.

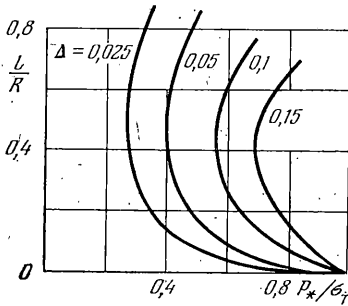
5. Расчеты велись по алгоритму, описанному в п. 3, для $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$, $\nu=0,3$. Выражение (3.7) вычислялось с удвоенной точностью.



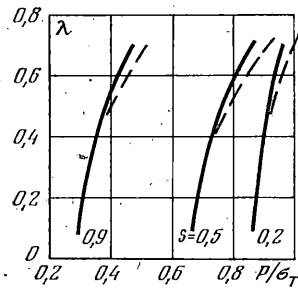
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Погрешность вычислений, во всех случаях не превышавшая 0,1%, контролировалась путем сравнения результатов расчетов, полученных при различной точности алгебраической аппроксимации интегрального уравнения, которая определяется порядком N соответствующей системы алгебраических уравнений [3]. Например, для $\lambda=l_1/R=0,8$, $s=l/l_1=0,8$ получены следующие данные:

N	10	20	30
a/l	0,69216	0,69162	0,69162
$\frac{2\mu\delta(s)}{(1+\nu)\sigma_T}$	0,15874	0,15821	0,15821

Сходимость результатов ухудшалась по мере увеличения λ . Если для $\lambda=0,1$ указанная точность достигалась при $N=4$, то для $\lambda=0,9$ — при $N=40$. На фиг. 1, 2 представлены зависимости безразмерных величин a/l_1 и $2\mu\delta(s)/[(1+\nu)\sigma_T]$ от p/σ_T (p определяется формулой (2.11)) для различных значений $\lambda=l_1/R$.

На фиг. 3 представлена зависимость относительного размера трещины и соответствующей предельной нагрузки для ряда критических значений безразмерного раскрытия трещины $\Delta^*=2\mu\delta^*(s)\lambda/[(1+\nu)\sigma_T]$ (величина Δ^* удобна для анализа тем, что не содержит размера l_1 , изменяющегося в процессе нагружения пластины). Как видно, при $l/R>l^*/R\approx 0,5$ трещина устойчиво растет с увеличением нагрузки. Аналогичный вывод в случае хрупкого разрушения был сделан в работе [8].

На фиг. 4 представлены численные результаты расчета (сплошная линия) и полученные на основании формулы (4.3) (штриховая линия). Очевидно, что приближенное аналитическое решение задачи обладает достаточно высокой степенью точности при $\lambda<0,5$.

6. Количественные расчеты, проводимые на основе гипотезы Дагдейла о том, что пластические области около вершин трещины представляют собой прямолинейные отрезки, оказываются в хорошем согласии с экспериментальными данными для тонких пластин даже в случае, когда пластическая зона вблизи вершины трещины имеет форму, отличную от прямолинейной [9].

В качестве простого средства испытания пластин при двухосном растяжении в условиях статического и циклического нагружения предложен дисковидный образец [10], состоящий из пластинчатой рабочей части и жесткого кольцевого обода. При испытаниях пластичных материалов задачу теоретического определения несущей способности образца с трещиной целесообразно поставить как задачу о трещине Дагдейла в круглом диске с заданными смещениями точек круговой границы. Рассмотренную модель можно предложить как расчетную и в некоторых других случаях, например для крестообразного образца [11], применяемого при испытаниях пластин с трещинами, поскольку обычно имеется возможность измерять смещения в зоне рабочей части образца с помощью делительной сетки, либо иным способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dugdale D. C.* Yielding of steel sheets containing slits.— *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, v. 8, No. 2, p. 100–104.
2. *Карпенко Л. Н., Бойко А. В.* Плоская задача теории упругости для произвольной системы трещин в круге при заданных на его границе смещениях.— *Проблемы прочности*, 1983, № 10, с. 72–75.
3. *Boiko A. V., Karpenko L. N.* On some numerical methods for the solution of the plane elasticity problem for bodies with cracks by means of singular integral equations.— *Intern. J. Fract.*, 1984, v. 17, No. 4, p. 381–388.
4. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика.— *Успехи матем. наук*, 1948, т. 3, № 6, с. 89–185.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
6. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
7. *Леонов М. Я., Панасюк В. В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле.— *Прикл. механика*, 1959, т. 5, № 4, с. 391–401.
8. *Бойко А. В., Карпенко Л. Н.* Предельное состояние круглой пластины с трещиной сложной формы.— *Проблемы прочности*, 1983, № 12, с. 56–59.
9. *Cheegeranov G. P.* *Mechanics of Brittle Fracture*. N. Y.: McGraw-Hill, 1979. 952 p.
10. *Лебедев А. А., Бойко А. В., Музыка Н. Р.* Метод испытаний материалов при равномерном двухосном растяжении.— *Проблемы прочности*, 1982, № 2, с. 105–107.
11. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 415 с.

Киев

Поступила в редакцию
21.III.1984