

УДК 624.042.8

КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ  
НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ  
ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОУСКОРЕННО ДВИЖУЩЕЙСЯ  
НАГРУЗКИ. ПЕРЕХОД ЧЕРЕЗ КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ

КАШУНОВ Ю. Д., МУРАВЬСКИЙ Г. Б.

Действие подвижной нагрузки на деформируемые системы обычно рассматривается для движения с постоянной скоростью. Колебания бесконечной балки на деформируемом основании при ускоренном движении силы изучались в [1], но без рассмотрения перехода через критическую скорость (случай малых скоростей), и в [2], где такой переход был изучен. Динамика свободной бесконечной струны при действии нагрузок, движущихся с переменной скоростью, исследована в [3]. В связи с ростом скоростей движения все чаще встречаются случаи, когда скорость превосходит критические значения, характерные для данной механической системы.

В публикуемой работе рассматривается переход через критическую скорость, аналогичный известному в теории колебаний переходу через резонансную частоту, применительно к одномерному уравнению второго порядка гиперболического типа. Полученные результаты могут быть отнесены к поперечным колебаниям бесконечной струны на деформируемом основании, а также к продольным или крутильным колебаниям бесконечного стержня в деформируемой среде при действии ускоренно движущегося возмущения.

1. Поперечные колебания струны на деформируемом основании при действии равноускоренно движущейся нагрузки описываются уравнением

$$-T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t} + ky = P\delta[x-s(t)], \quad s(t) = v_0 t + \frac{wt^2}{2} \quad (1.1)$$

Здесь  $T$  — натяжение струны,  $m$  — погонная масса,  $\gamma$  — коэффициент сопротивления,  $k$  — коэффициент жесткости основания,  $v_0$ ,  $w$  — начальная скорость и ускорение точки приложения силы  $P$ . В правой части использована дельта-функция для представления сосредоточенной силы. Будем рассматривать случай нулевых начальных данных. Вводя безразмерные величины

$$\xi = x(kT)^{1/2}, \quad \tau = t(k/m)^{1/2}, \quad \gamma_1 = \gamma/[2(km)^{1/2}] \\ v_{01} = v_0(m/T)^{1/2}, \quad w_1 = wm/(kT)^{1/2}, \quad s_1(\tau) = v_{01}\tau + 1/2 w_1 \tau^2 \\ \delta[\xi - s_1(\tau)] = (kT)^{-1/2} \delta[x - s(t)] \quad (1.2)$$

запишем уравнение (1.1) в виде (оставляем прежнее обозначение  $y$  для функции новых аргументов  $\xi$  и  $\tau$ ):

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + 2\gamma_1 \frac{\partial y}{\partial \tau} + y = (kT)^{-1/2} P\delta[\xi - s_1(\tau)] \quad (1.3)$$

Для построения решения уравнения (1.3) целесообразно рассмотреть сначала правую часть вида  $\delta(\xi)\delta(\tau)$  (сосредоточенный импульс). Соответствующее решение  $u(\xi, \tau)$  легко определяется методом преобразования Фурье или [4] соответственно

$$u(\xi, \tau) = \frac{e^{-\tau_1 \tau}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\xi\alpha) \sin[\tau\varphi(\alpha)]}{\varphi(\alpha)} d\alpha, \quad \varphi(\alpha) = (1 - \gamma_1^2 + \alpha^2)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$u(\xi, \tau) = 1/2 e^{-\gamma_1 \tau} J_0(\sqrt{1 - \gamma_1^2} \sqrt{\tau^2 - \xi^2}) \sigma \quad (1.5)$$

$$\sigma = 1 \text{ при } \tau^2 - \xi^2 > 0; \quad \sigma = 0 \text{ при } \tau^2 - \xi^2 < 0$$

Далее, используя функцию  $u(\xi, \tau)$ , запишем решение уравнения (1.3), рассматривая его правую часть как последовательность элементарных импульсов

$$y = \frac{P}{2(kT)^{1/2}} \mu(\xi, \tau), \quad \mu(\xi, \tau) = 2 \int_0^{\tau} u[\xi - s_1(\tau_1), \tau - \tau_1] d\tau_1$$

Здесь величина  $\mu$  — динамический коэффициент. Применяя представление (1.5), после замены переменной интегрирования  $z = w_1(\tau - \tau_1)$  получаем

$$\mu(\lambda, v_1) = v \int_0^{\Delta v_1} e^{-\tau_1 v^2} J_0(v \sqrt{1 - \gamma_1^2} \sqrt{F(z)}) \sigma dz \quad (1.6)$$

$$F(z) = z^2 - f^2(z), \quad f(z) = \lambda + v_1 z - 1/2 z^2, \quad \lambda = [\xi - s_1(\tau)] w_1 \\ v_1 = v_{01} + w_1 \tau, \quad \Delta v_1 = v_1 - v_{01}, \quad v = 1/w_1$$

Величина  $\lambda$  — безразмерное расстояние от точки приложения силы до рассматриваемой точки струны; величина  $\sigma$  равна единице при  $F(z) > 0$  и нулю при  $F(z) < 0$ .

Критической скоростью  $v_*$  для данной задачи будет скорость  $v_* = (T/m)^{1/2}$  (скорость звука в струне). При движении силы с такой скоростью стационарное решение уравнения (1.1) при  $w=0$ ,  $\gamma=0$  обращается в бесконечность. Безразмерная скорость  $v_1$ , соответствующая  $v_*$ , равна единице. Динамический эффект, порождаемый переходом скорости через значение  $v_1=1$ , будет проявляться тем более явно, чем меньше ускорение или чем больше параметр  $v$ . В дальнейшем рассматривается, главным образом, область больших значений параметра  $v$ . Заметим, что именно в этом случае возникают вычислительные трудности, связанные с интегралом (1.6), из-за быстрых осцилляций подынтегральной функции.

При интегрировании в (1.6) можно заранее исключить интервалы, где  $\sigma=0$ , т. е.  $F(z) < 0$ . Запишем корни полинома  $F(z)$ :

$$z_1 = v_1 - 1 - D_1^{1/2}, \quad z_2 = v_1 - 1 + D_1^{1/2}, \quad z_3 = v_1 + 1 - D_2^{1/2} \\ z_4 = v_1 + 1 + D_2^{1/2}, \quad D_1 = (v_1 - 1)^2 + 2\lambda, \quad D_2 = (v_1 + 1)^2 + 2\lambda \quad (1.7)$$

Анализ поведения функции  $F(z)$  с учетом соотношений между верхним пределом в (1.6) и корнями (1.7) приводит к следующим выражениям для коэффициента  $\mu$  ( $0 \leq v_{01} < 1$ ):

при  $v_1 \leq 1$ :

$$\mu(\lambda, v_1) = \mu_1 \quad (0 \leq \lambda < \lambda_1), \quad \mu(\lambda, v_1) = \mu_2 \quad (0 \geq \lambda > \lambda_2) \\ \lambda_1 = 1/2[(1 - v_{01}^2) - (v_1 - 1)^2], \quad \lambda_2 = 1/2[(v_{01} + 1)^2 - (v_1 + 1)^2] \quad (1.8)$$

при  $1 \leq v_1 \leq 2 - v_{01}$ :

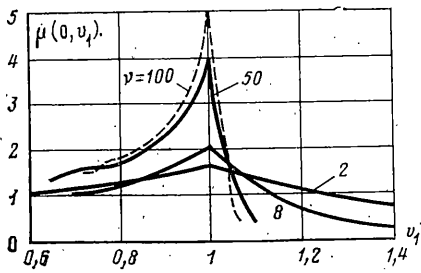
$$\mu(\lambda, v_1) = \mu_1 \quad (0 \leq \lambda < \lambda_1), \quad \mu(\lambda, v_1) = \mu_2 \quad (\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_3) \\ \mu(\lambda, v_1) = \mu_3 + \mu_1 \quad (\lambda_3 \leq \lambda \leq 0), \quad \lambda_3 = -1/2(v_1 - 1)^2 \quad (1.9)$$

при  $2 - v_{01} \leq v_1$ :

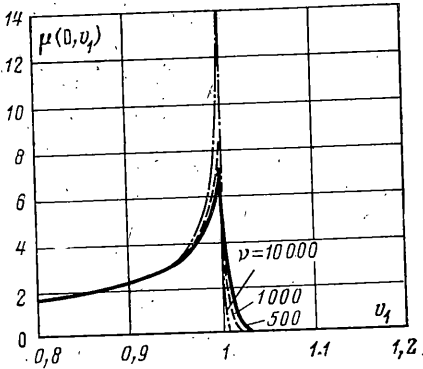
$$\mu(\lambda, v_1) = \mu_2 (\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_3), \quad \mu(\lambda, v_1) = \mu_3 + \mu_1 \\ (\lambda_3 \leq \lambda \leq \lambda_1), \quad \mu(\lambda, v_1) = \mu_3 \quad (\lambda_1 \leq \lambda \leq 0) \quad (1.10)$$

$$\mu_1 = v \int_{z_2}^{\Delta v_1} \Phi(z) dz, \quad \mu_2 = v \int_{z_3}^{\Delta v_1} \Phi(z) dz, \quad \mu_3 = v \int_{z_3}^{z_1} \Phi(z) dz$$

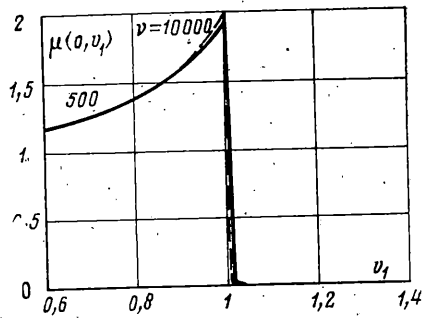
$\Phi(z)$  — подынтегральная функция в (1.6) без множителя  $\sigma$ .



Фиг. 1



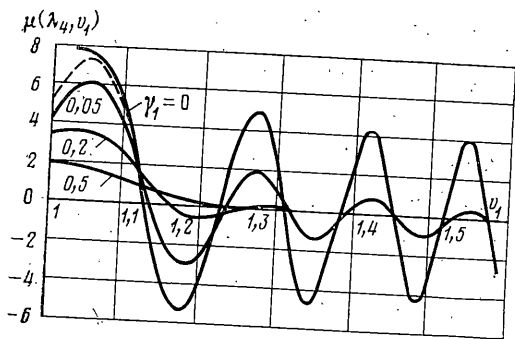
Фиг. 2



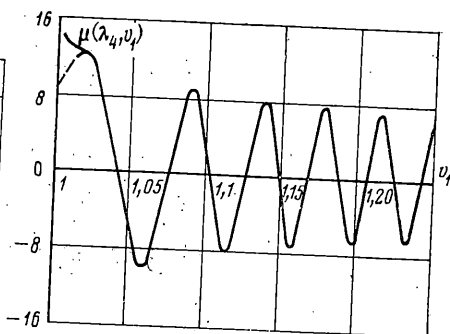
Фиг. 3

При значениях  $\lambda$ , не указанных в (1.8), (1.9), (1.10), величина  $\mu$  равна нулю. Значения  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$  соответствуют передней (при  $v_1 \leq 2 - v_{01}$ ) и задней границам возмущенной области (при  $v_1 > 2 - v_{01}$  точка приложения силы находится впереди точки  $\lambda = \lambda_1$ , т. е. передняя граница соответствует точке  $\lambda = 0$ ). Точка  $\lambda = \lambda_3$  может быть интерпретирована как движущееся со скоростью  $v_1 = 1$  точечное возмущение, которое возникло в точке приложения силы в момент перехода через критическую скорость.

2. Остановимся на вопросе нахождения интегралов, представляющих решение. Сложность возрастает по мере роста параметра  $\nu$ , при этом основной вклад в значения  $\mu$  будут вносить окрестности точек, в которых производная функции  $(F(z))^{1/2}$  равна нулю или мала по модулю. Можно показать, что вторая производная указанной функции при  $z < v_1$  либо отрицательна, либо только один раз может сменить знак с минуса на плюс при увеличении  $z$ ; это относится и ко второй производной функции  $F(z)$ . Отметим, кроме того, что  $F'(\Delta v_1) > 0$  при представляющих интерес значениях  $\lambda$  и  $v_1$  и  $F''(z_2) > 0$  при  $v_1 > 0$ ,  $F''(z_3) > 0$  при  $v_1 \leq 1$  для  $z_2$  и  $z_3$ , входящих в выражения  $\mu_i$ . Эти факты помогают выяснить характер поведения функции  $(F(z))^{1/2}$  в промежутках интегрирования в (1.8), (1.9), (1.10). Сложное поведение функции  $(F(z))^{1/2}$ , когда на промежутке интегрирования расположены две стационарные точки или точка перегиба при малом значении производной в ней, имеет место лишь в случае величины  $\mu_2$  при условиях, указанных в формулах (1.9) и (1.10). Приравнивая одновременно нулю  $F'(z)$  и  $F''(z)$ , находим точку ( $v_1 > 1$ ):  $\lambda_4 = \frac{3}{2}v_1^{2/3} - 1/2v_1^2 - 1$ . Это значение удовлетворяет условию  $\lambda_2 < \lambda_4 < \lambda_3$ , а соответствующая точка  $z = z_5 = v_1 - v_1^{1/3}$  принадлежит промежутку интегрирования в  $\mu_2$ . Если  $\lambda_4 < \lambda < \lambda_3$ , то на интервале  $(z_3, \Delta v_1)$  найдутся две стационарные точки, разделенные точкой  $z_5$ . При  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_4$  на интервале  $(z_3, \Delta v_1)$  может находиться (при значениях  $\lambda$ , близких к  $\lambda_4$ ) точка перегиба, в которой модуль производной функции  $(F(z))^{1/2}$  минимален; наличие или отсутствие точки перегиба определяется по знаку второй производной функции  $(F(z))^{1/2}$  при  $z = \Delta v_1$ . В промежутке интегрирования для  $\mu_3$  имеется одна стационарная точка; между этой точкой и концевыми точками



Фиг. 4



Фиг. 5

производная функция  $(F(z))^{1/2}$  изменяется монотонно. При  $\nu_1=1$  и  $\lambda=0$  в нуль обращается производная  $(F(z))^{1/2}$  при аргументе, равном нижнему пределу, т. е. при  $z=z_2=z_3=0$ . Отметим также точки, для которых возможно обращение в нуль функции  $F(z)$  и ее производной ( $F'(z) \neq 0$ ). В этом случае производная функции  $(F(z))^{1/2}$  отлична от нуля. Такая точка  $z$  возможна при  $\lambda=0$  и  $\nu_1 < 1$  ( $z=z_2=z_3=0$ , т. е. это значение равно нижнему пределу в интегралах  $\mu_1, \mu_2$ ), а также при  $\lambda=\lambda_3$  и  $\nu_1 > 1$  ( $z=z_1=z_2$ ). Эти точки вносят такой же вклад в асимптотику величины  $\mu$ , как и стационарные точки функции  $(F(z))^{1/2}$  первого порядка при  $F(z) > 0$ . Для величин  $\mu_1$  и  $\mu_2$  при значениях  $\nu_1 < 1$  (и не очень близких к единице) и для величины  $\mu_1$  при  $\nu_1 > 1$  производная функции  $(F(z))^{1/2}$  далека от нуля. Изложенная информация о характерных точках функции  $(F(z))^{1/2}$  важна для успешного проведения вычислений при больших значениях параметра  $\nu$ . Следуя работе [5], будем окружать указанные точки окрестностями (уменьшающимися при увеличении  $\nu$ ), для которых интегралы определяются численно, и добавлять слагаемые, получаемые в результате интегрирования по частям по остальным участкам промежутка интегрирования. Интервалы численного счета целесообразно вводить вплотную к нижнему пределу интегралов  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  и вплотную к верхнему пределу интеграла  $\mu_3$ . Это позволяет вне этих интервалов применять асимптотические разложения для функции Бесселя и весьма просто проводить интегрирование по частям.

В случае  $\gamma_1=0$  нетрудно непосредственно получить асимптотические представления величин  $\mu_i$ . Рассмотрим значение  $\lambda=0$ , а также при  $\nu_1 > 1$  значения  $\lambda=\lambda_4, \lambda=\lambda_3$ . При  $\lambda=0$  имеем

$$\sqrt{F(z)} = z\sqrt{1 - (\nu_1^{-1}/2z)^2} \quad (2.1)$$

Нижний предел интеграла для  $\mu_1$  или  $\mu_2$  равен нулю при  $\nu_1 \leq 1$  и равен  $2(\nu_1-1)$  при  $\nu_1 > 1$ . Пусть  $\nu_1 < 1$ . В интеграле (1.8) делаем замену  $\nu z = u$ . Получаем ( $\gamma_1=0$ ):

$$\mu(0, \nu_1) = \int_0^{\nu \Delta \nu_1} J_0\left(u \sqrt{1 - \left(\nu_1 - \frac{u}{2\nu}\right)^2}\right) du \quad (2.2)$$

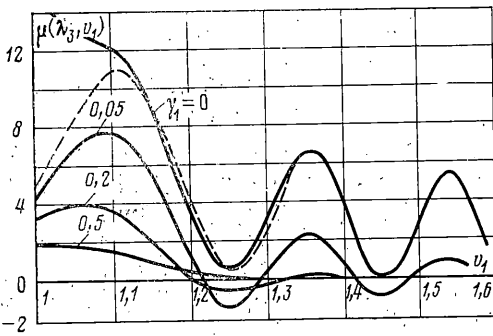
Поскольку производная аргумента функции Бесселя ограничена снизу в промежутке интегрирования, допустим переход к пределу при  $\nu \rightarrow \infty$ . Будем иметь

$$\mu(0, \nu_1) \approx \int_0^{\infty} J_0(u \sqrt{1 - \nu_1^2}) du = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu_1^2}} \quad (2.3)$$

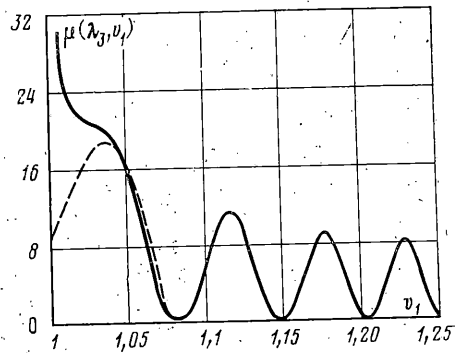
Этот результат соответствует стационарному решению, относящемуся к случаю равномерного движения силы.

При  $\nu_1=1$  имеем

$$\sqrt{F(z)} = z^{3/2} \sqrt{1 - 1/4z} \quad (2.4)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

После замены переменной  $vz^{1/2} = u$  получаем

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2}{3} v^{1/3} \int_0^{v(\Delta v_1)^{3/2}} u^{-1/3} J_0 \left( u \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{u}{v} \right)^{2/3}} \right) du \approx \\ &\approx \frac{2}{3} v^{1/3} \int_0^\infty u^{-1/3} J_0(u) du = \frac{2\sqrt{\pi} v^{1/3}}{3\Gamma(5/6)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

При  $v_1 > 1$  динамический коэффициент  $\mu$  убывает с ростом  $v$ , поскольку в отличие от случая (2.3) теперь производная функции  $(F(z))^{1/2}$  неограниченно растет при стремлении  $z$  к нижнему пределу интегрирования.

На фиг. 1-3 представлены некоторые результаты числовых расчетов, относящиеся к случаю  $\lambda = 0$ ,  $v_{01} = 0$ . Кривые фиг. 1 соответствуют отсутствию диссипации в материале основания ( $\gamma_1 = 0$ ). На кривых для  $v = 50$  и  $v = 100$  заметны колебания, отражающие переходный процесс. После достижения максимального значения при  $v_1 = 1$  величина  $\mu$  резко уменьшается (тем резче, чем больше  $v$ ). При  $\gamma_1 > 0$  ( $\gamma_1 = 0,05$  на фиг. 2 и  $\gamma_1 = 0,5$  на фиг. 3) и больших значениях величины  $v$  вне малой окрестности точки  $v_1 = 1$  коэффициенты  $\mu$  мало отличаются друг от друга и от значения, соответствующего стационарному решению при  $v_1 = \text{const}$ . Аналогично явлению перехода через резонансную частоту переход через критическую скорость сопровождается ростом динамического коэффициента по мере уменьшения ускорения (увеличения  $v$ ) и коэффициента демпфирования.

Рассмотрим теперь точку  $\lambda = \lambda_4$  при  $v_1 > 1$ . Для вычислений будем использовать формулу (1.9) или (1.10). Для точки  $z = z_5$ , где обращаются в нуль первая и вторая производные функции  $F(z)$ , а значит, и функции  $(F(z))^{1/2}$ , имеем

$$\left( \sqrt{F(z)} \right)''' = \frac{1/2 F'''(z)}{(F(z))^{1/2}} = \frac{3(v_1 - z_5)}{(F(z_5))^{1/2}} \quad (2.6)$$

Эта точка дает увеличивающийся с ростом  $v$  вклад в интеграл  $\mu_2$  при  $\lambda = \lambda_4$ ; вклад концевых точек промежутка интегрирования будет убывать с ростом  $v$ . Выражение для  $\mu_2$  показывает, что при больших  $v$  функцию Бесселя в окрестности точки  $z_5$  можно заменить ее асимптотическим представлением, т. е.

$$\Phi(z) \approx \frac{\sqrt{2}}{(\pi v)^{1/2}} [F(z)]^{-1/4} \cos[v\sqrt{F(z)} - 1/4\pi]$$

Далее согласно методу стационарной фазы [6] получаем

$$\mu(\lambda_4, v_1) \approx v^{1/6} (v_1 - z_5)^{-1/2} [F(z_5)]^{-1/4} 2^{1/2} (6/\pi)^{1/2} \Gamma(4/3) \cos(v\sqrt{F(z_5)} - 1/4\pi) \quad (2.7)$$

Результаты вычислений  $\mu(\lambda_4, v_1)$  для значений  $v = 100$  и  $v = 500$  представлены на фиг. 4, 5 ( $v_{01} = 0$ ). Пунктирная кривая при  $\gamma_1 = 0$  и кривые при  $\gamma_1 \neq 0$  на фиг. 4 соответствуют численному нахождению интегралов, а также сочетанию численного интегрирования для окрестностей характерных точек с интегрированием по частям для остальных промежутков; сплошная кривая при  $\gamma_1 = 0$  соответствует асимпто-

ческой формуле (2.7). Эта формула приводит к приемлемым результатам при больших значениях  $v$ , начиная со значений  $v_1$ , не очень близких к единице (эти допустимые значения  $v_1$  смещаются к единице с ростом  $v$ ). Заметим, что при  $v_1 \rightarrow 1$  коэффициент  $\mu(\lambda_4, v_1) \rightarrow \mu(0, 1)$ . Как видно, максимальные значения  $\mu(\lambda_4, v_1)$  значительно превосходят при малых значениях  $v_1$  максимальные значения  $\mu(0, 1)$ .

Пусть  $\lambda = \lambda_3$ ,  $v_1 > 1$ . Асимптотическое представление интеграла  $\mu = \mu_2$  определяется точкой  $z = z_1 = z_2$  и стационарной точкой  $z_6 = \frac{1}{2}[1 + 2v_1 - (1 + 8v_1)^{1/2}]$ , принадлежащей интервалу  $(z_3, z_1)$ . Вклад стационарной точки  $z_6$  определяется при помощи метода стационарной фазы по аналогии со случаем  $\lambda = \lambda_4$ , кроме того, учитывается точка  $z = z_1 = z_2$ , интегралы по окрестности которой определяются, как в случае  $\lambda = 0$ ,  $v_1 < 1$ . Приведем окончательный результат ( $\lambda = \lambda_3$ ,  $v_1 > 1$ ,  $\gamma_1 = 0$ ):

$$\mu(\lambda_3, v_1) \approx 4 \sin(\sqrt{v_1} \overline{F(z_6)}) / \sqrt{2|F''(z_6)|} + 2/\sqrt{v_1 - 1} \quad (2.8)$$

Вычисления для случая  $\lambda = \lambda_3$  показаны на фиг. 6, 7. Сплошные кривые при  $\gamma_1 = 0$  соответствуют формуле (2.8), а при построении остальных кривых применялось численное определение интегралов. В отличие от случая  $\lambda = \lambda_4$  значения прогибов при  $\lambda = \lambda_3$ ,  $\gamma_1 = 0$  остаются положительными.

Сравнение результатов для разных значений  $\lambda$  показывает, что максимальные значения  $\mu$  при малых величинах  $v_1$  соответствуют точке  $\lambda = \lambda_3$ , хотя по виду асимптотических формул (2.8), (2.7), (2.5) наибольших значений коэффициента  $\mu$  следует, казалось бы, ожидать при  $\lambda = 0$  ( $v_1 = 1$ ). Дело в том, что увеличение  $v$  приводит к изменению (стремлению к единице) тех значений  $v_1$ , при которых достигается максимум коэффициента  $\mu$ . Это косвенное влияние параметра  $v$  и обеспечивает указанное соотношение между максимальными значениями коэффициента  $\mu$  при разных значениях  $\lambda$ . Числовые расчеты, а также рассмотрение асимптотических представлений показывают, что при значениях  $\lambda$ , отличных от  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -\lambda_3$ ,  $\lambda = \lambda_4$ , значения динамического коэффициента меньше его значений для  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \lambda_3$ ,  $\lambda = \lambda_4$ .

В заключение укажем, что изучение выражений для коэффициента  $\mu$  обнаруживает разрывность производной  $\partial\mu/\partial\lambda$  в точках  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\lambda = \lambda_2$ ,  $\lambda = \lambda_3$ . В окрестности точек  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\lambda = \lambda_2$  при всех значениях  $v_1$  и в точке  $\lambda = 0$  при  $v_1 \neq 1$  производная ограничена (разрыв первого рода), при  $v_1 \rightarrow 1$  производная в точке  $\lambda = +0$  стремится к  $-\infty$ . Этот предел характерен далее для точки  $\lambda = \lambda_3 + 0$ , которая совпадает при  $v_1 = 1$  с точкой  $\lambda = 0$  и затем отстает от нее по мере роста скорости. Производная при  $\lambda = -0$ ,  $\lambda = \lambda_3 - 0$  положительна и ограничена при всех  $v_1 \geq 0$ . Приведенные данные о поведении производной показывают, что переход через критическую скорость сопровождается бесконечными напряжениями и нарушением справедливости (для окрестности точки  $\lambda_3$ ) самого исходного уравнения, основанного на законе Гука. Однако рассмотрение нагрузки, распределенной по некоторому отрезку оси  $X$ , вместо нагрузки сосредоточенной или учет вязкости в материале струны (стержня) устраняют неограниченность напряжений, так что переход через критическую скорость может изучаться и в рамках линейной теории.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Римский Р. А. Колебания балки на упругом основании при действии равноускоренно перемещающейся нагрузки. — Тр. Гипророниавиапром, 1978, вып. 17, с. 95–104.
2. Муравский Г. Б., Красикова Н. П. Колебания балки на деформируемом основании при равнопеременном движении по балке сосредоточенной силы. — Строит. механика и расчет сооружений, 1984, № 3, с. 46–50.
3. Flaherty F. T. Transient resonance of an ideal string under a load moving with varying speed. — Internat. J. Solids Structures, 1968, v. 4, No. 12, p. 1221–1231.
4. Корнев В. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.
5. Муравский Г. Б. О вычислениях некоторых интегралов, встречающихся в задачах механики. — Науч. тр. Моск. ин-та инж. трансп., 1983, вып. 720, с. 61–69.
6. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 127 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.II.1984