МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1986

УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ЛОКАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБОЛОЧКАХ КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ

ОЛЬШАНСКИЙ В. П.

Предлагается комбинация двойных рядов и интегралов для расчета упругих напряжений в пологих изотропных тонкостенных оболочках. Быстрозатухающая составляющая напряжений представляется интегралами Фурье, которые берутся в замкнутом виде или имеют простую асимптотику. Проникающая составляющая описывается двойными тригонометрическими рядами.

Для вычисления местных напряжений в оболочках, нагруженных по малым участкам поверхности, часто используют двойные тригонометрические ряды. Обзор работ по этой теме содержится в [1]. Ввиду очень медленной сходимости разложений у малых площадок нагружения приходится удерживать до миллиона членов [2]. Поэтому расчет полей локальных напряжений при помощи двойных рядов является трудоемкой операцией, особенно в динамических задачах [3], где проводится многократное вычисление компонентов напряженно-деформированного состояния.

В [4–7] для вычисления местных напряжений предлагается двумерное преобразование Фурье на бесконечном интервале. Этот подход связан с анализом сложных несобственных интегралов, которые в случае круговой области нагружения на панели произвольной кривизны выражаются рядами по специальным функциям [5]. Решения в виде степенных рядов с логарифмом для круговой, эллиптической и прямоугольной площадок получены в [8–10]. Интегрирование наиболее просто проводится для сферических оболочек, нагруженных по круговым и кольцевым областям и сводится к табулированным функциям Томсона.

Точность метода интегральных преобразований зависит от кривизны панели. Наиболее высокая она для сферы. В методе двойных несобственных интегралов оболочка является математически бесконечной, т. е. игнорируется влияние граничных условий. Это влияние самое малое для сферы, где происходит наиболее быстрое затухание напряжений [6].

В оболочках нулевой и отрицательной гауссовых кривизн поле напряжений возле локальной нагрузки характеризуется более медленным затуханием [6, 11]. В дополнение к локальному эффекту становится существенной и проникающая составляющая напряжений. Поэтому если учесть замечания относительно точности представления напряженно-деформированного состояния интегралами Фурье [6, с. 312], а также значительное усложнение их аналитического исследования и вычислений, то эффективность двумерного преобразования Фурье при расчете оболочек отрицательной гауссовой кривизны становится сомнительной.

В публикуемой работе предлагается объединить сильные стороны рассмотренных методов: простоту двойных рядов и замкнутые аналитические представления интегралов. Переход к непрерывному спектру, в отличие от обычного использования интегральных преобразований, совершается не во всем двойном тригонометрическом ряде, а в искусственно выделенной его части, порожденной дифференциальным оператором пологой сферы. Поэтому в рядах, описывающих панели произвольной гауссовой кривизны, выделяются слагаемые, соответствующие сферической панели. Эти быстрозатухающие составляющие напряжений аппроксимируются интегралами Фурье. Кроме сильного затухания выделенные составляющие обладают вторым важным свойством: они сингулярны, т. е. стремятся к бесконечности при переходе от локальной распределенной нагрузки к сосредоточенной. Вследствие независимости вида особенностей от формы оболочки [12–14] их достаточно выделить для сферы. Оставшиеся части двойных рядов будут регулярны для всех форм оболочек. Их сходимость гораздо лучше исходных рядов, так как медленно сходящиеся составляющие представлены интегралами. Интегралы следует брать аналитически или преобразовывать к удобному для вычислений виду.

Таким образом, здесь реализуется идея академика А. Н. Крылова о выделении и суммировании медленно сходящейся части ряда. Особенность ее реализации состоит в приближенном суммировании в данном случае двойного ряда. Точное суммирование одинарных рядов для выделения сингулярной части функции Грина использовано в [15–17].

Отметим, что гибридизация методов двойных рядов и интегральных преобразований уже применялась для вычисления местных напряжений [18]. Из двойных рядов выделялась сингулярная составляющая изгиба — четверть бесконечной пластины. Ввиду слабого убывания этой составляющей хорошие результаты получены при условии, что расчетная область, как и площадка нагружения, близки к прямому углу свободно опертой панели. Предлагаемый здесь подход лишен этих ограничений, так как выделяется сильно затухающая часть решения. За счет этого несколько ухудшается практическая сходимость рядов в проникающей части.

1. Изгиб панели нормальной нагрузкой, распределенной по круговой площадке. Поместим начало ортогональной системы координат xoy в ближний к площадке нагружения угол панели. Если площадка находится на середине панели, то выбор угла не требуется. Учитывая, что основными компонентами напряженно-деформированного состояния при действии нормальной силы P являются изгибающие моменты m_1, m_2, рассмотрим только их определяющие ряды. После разделения локальной и проникающей частей имеем

$$m_1=A_1+B_1+\nu(A_2+B_2),\quad m_2=A_2+B_2+\nu(A_1+B_1) \tag{1.1}$$

$$A_1\delta_{1j}+A_2\delta_{2j}+B_1\delta_{3j}+B_2\delta_{4j}=\frac{4P}{l_1l_2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[(\delta_{1j}+\delta_{3j})\alpha_m^2+$$
$$+(\delta_{2j}+\delta_{4j})\beta_n^2][(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2+b^4]^{-1}\{\delta_{1j}+\delta_{2j}+(\delta_{3j}+\delta_{4j})b^4(1-\lambda)[2\alpha_m^2\beta_n^2+$$
$$+(1+\lambda)\beta_n^4][(\alpha_m^2+\beta_n^2)^4+b^4(\alpha_m^2+\lambda\beta_n^2)^2]^{-1}\}\times \tag{1.2}$$
$$\times f(\alpha_m,\beta_n)\sin(\alpha_m x_1)\sin(\beta_n y_1)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)$$
$$\alpha_m=m\pi l_1^{-1},\quad \beta_n=n\pi l_2^{-1},\quad |\lambda|=R_2R_1^{-1},\quad b^4=12(1-\nu^2)h^{-2}R_2^{-2}$$

Здесь R_1, R_2 — радиусы кривизны панели толщиной h, ν — коэффициент Пуассона, δ_{ij} — символ Кронекера, x_1, y_1 — координаты центра круга; знак λ совпадает со знаком кривизны панели, опертой по краям $x=(0, l_1)$ и $y=(0, l_2)$. Множитель $f(\alpha_m, \beta_n)$ зависит от размеров площадки нагружения и закона распределения в ней давлений.

Рассмотрим случай, когда нормальная сила распределена в круге радиуса R по закону (постоянная $\mu\geqslant-1$):

$$q(x,y)=P(1+\mu)(\pi R^2)^{-1}\{1-[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]R^{-2}\}^{\mu} \tag{1.3}$$

При $\mu<0$ имеем сингулярные воздействия с алгебраической особенностью на краю площадки. Если $\mu>0$, давления на краю площадки равны нулю и возрастают по мере продвижения от края к центру круга.

Весовой множитель в рядах (1.2) для плотности давлений (1.3) выражается через функции Эйлера $\Gamma(z)$ и Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле

$$f(\alpha_m,\beta_n)=2^{1+\mu}\Gamma(\mu+2)\,[R(\alpha_m^2+\beta_n^2)^{1/2}]^{-1-\mu}J_{1+\mu}[R(\alpha_m^2+\beta_n^2)^{1/2}]$$

В суммах (1.1) слагаемые A_1, A_2 определяют значения моментов в сферической панели. При малых размерах R по сравнению с размерами панели в плане сходимость этих рядов очень слабая. Она совсем отсутствует для сосредоточенной нагрузки, когда $R=0$; $f(\alpha_m, \beta_n)=1$, и в точке (x_1, y_1) появляется логарифмическая особенность. В связи с этим ряды целесообразно заменить интегралами

$$A_k=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^{i+j}\Phi_{kij},\qquad \Phi_{kij}=P(4\pi^2)^{-1}\iint_{-\infty}^{\infty}(\alpha^2\delta_{1k}+$$
$$+\beta^2\delta_{2k})[(\alpha^2+\beta^2)^2+b^4]^{-1}f(\alpha,\beta)\cos(\alpha X_i)\cos(\beta Y_j)\,d\alpha\,d\beta \tag{1.4}$$
$$X_{0,1}=x\mp x_1,\quad Y_{0,1}=y\mp y_1\quad (k=\overline{1,2})$$

На краях $x=0$, $y=0$ интегралы равны нулю, т. е. точно выполнены условия свободного опирания. На более удаленных от площадки гранях $x=l_1$, $y=l_2$ значения A_1 и A_2 близки к нулю за счет экспоненциального убывания интегралов.

Слагаемые B_1 и B_2 дают поправку на отклонение заданной формы панели от сферической. Определяющие их ряды сходятся очень быстро, начиная со значений m и n, когда $\alpha_m^2+\beta_n^2>b^2$. В случае пологих панелей это неравенство соблюдается при небольших m и n. Таким образом, при наличии простых аналитических представлений интегралов (1.4) расчет поля локальных напряжений несложный.

Для вычисления интегралов можно использовать частные решения дифференциальных уравнений пологих сферических оболочек из [1, 6]. Не выписывая известных формул, отметим, что вне круга ($R<r$) интегралы при любых μ сводятся к функциям Кельвина (в r и θ индексы опущены):

$$\begin{gathered}\Phi_{kij}=P2^s\Gamma(s+1)\,[4\pi(bR)^s]^{-1}\{[1-(-1)^k\cos 2\theta]\times\\ \times\{\cos{}^3/_4\pi s[B_{sR}K_{0r}-C_{sR}T_{0r}]+\sin{}^3/_4\pi s[C_{sR}K_{0r}+B_{sR}T_{0r}]\}+\\ +2(br)^{-1}(-1)^k\cos 2\theta\{\sin{}^3/_4\pi\mu[B_{sR}K_{1r}-C_{sR}T_{1r}]-\\ -\cos{}^3/_4\pi\mu[B_{sR}T_{1r}+C_{sR}K_{1r}]\}\}\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$r=(X_i^2+Y_j^2)^{1/2},\quad \theta=\operatorname{arc\,tg}(X_iY_j^{-1})$$

$$B_{st}=\operatorname{ber}_s(bt),\quad C_{st}=\operatorname{bei}_s(bt),\quad s=1+\mu$$

$$T_{st}=\operatorname{kei}_s(bt),\quad K_{st}=\operatorname{ker}_s(bt),\quad t=\overline{(r,R)}$$

Отмеченное резкое убывание интегралов по мере удаления от площадки нагружения подтверждается формулой (1.5), так как функции Кельвина $\operatorname{ker}_0(z)$, $\operatorname{kei}_0(z)$, $\operatorname{ker}_1(z)$, $\operatorname{kei}_1(z)$ имеют экспоненциальное убывание [19].

При значительном удалении круга от краев панели основное значение в сумме (1.4) имеют слагаемые Φ_{k00}. Остальные можно принять равными нулю или приближенно вычислить по формуле, полученной из (1.5) предельным переходом при $R\to 0$:

$$\Phi_{kij}=P(4\pi)^{-1}\{[1-(-1)^k\cos 2\theta]K_{0r}-(-1)^k\cos(2\theta)\sqrt{2}(br)^{-1}(K_{1r}-T_{1r})\} \tag{1.6}$$

Отрицательные показатели μ дают распределения нагрузки с особенностью на краю круга. Поэтому моменты достигают наибольшего значения возле контура площадки и их вычисление проводится по формулам (1.1), (1.4), (1.5).

Положительные показатели μ приводят к наибольшим значениям моментов в центре круга. Для вычисления Φ_{k00} внутри площадки нагружения использовать формулы (1.5) нельзя. Требуются новые аналитические представления. Выразить интегралы через функции Томсона здесь удается только при целых значениях μ. В общем случае их можно представить рядами по степеням параметра bR [8]. Такая форма решения эффективна для площадок, когда $br<2$. Не выписывая этих рядов, приведем формулы, определяющие Φ_{k00} внутри круга при некоторых целых μ:

равномерное нагружение панели по окружности ($\mu=-1$):

$$\Phi_{k00}=P(4\pi)^{-1}[B_{0r}K_{0R}-C_{0r}T_{0R}+(-1)^k\cos 2\theta(B_{2r}K_{0R}-C_{2r}T_{0R})]$$

равномерное нагружение по кругу ($\mu=0$):

$$\begin{gathered}\Phi_{k00}=P(2\sqrt{2}\pi bR)^{-1}\{B_{0r}(T_{1R}-K_{1R})+C_{0r}(K_{1R}-T_{1R})+\\ +(-1)^k\cos 2\theta[B_{2r}(T_{1R}-K_{1R})+C_{2r}(K_{1R}-T_{1R})]\}\end{gathered}$$

параболический закон распределения нагрузки ($\mu=1$):

$$\begin{gathered}\Phi_{k00}=2P\pi^{-1}(bR)^{-2}[2(bR)^{-2}-B_{0r}T_{2R}-C_{0r}K_{2r}-\\ -(-1)^k\cos 2\theta(B_{2r}T_{2R}+C_{2r}K_{2R})]\end{gathered}$$

Для иллюстрации эффективности комбинированного метода проведены вычисления изгибающих моментов в панели, нагруженной равномерно по окружности ($\mu=-1$). Принимались следующие значения параметров: $\nu=0{,}3$, $h=10^{-2}R_2$, $l_1=l_2=1{,}38\,R_2$, $R=l/40$, $x_1=y_1=0{,}5\,l_1$, $R_2=1$ м. В каждом из рядов учитывалось по N членов. Результаты вычисления момента $m_2^0=10^4\,m_2P^{-1}$ в точке ($x=x_1+R$, $y=y_1$) представлены в табл. 1.

Первые строчки получены методом рядов, а вторые — комбинированным приемом. В расчетах приближенно принималось $A_1=\Phi_{100}$, $A_2=\Phi_{200}$. Параметр λ характеризует форму панели. Из таблицы видно, что самая слабая сходимость рядов — в сферической панели, где наиболее сильно локализуется напряженное состояние. Комбинированный вариант расчета дает хорошие приближения при удержании 100 членов двойного ряда, тогда как в методе рядов эта точность достигается при удержании 2500 слагаемых.

Следует отметить, что наибольшие изгибающие моменты имеют место не в цилиндрической оболочке, а в гиперболическом параболоиде ($\lambda=-1$). Переход от цилиндра к панелям отрицательной гауссовой кривизны сопровождается сначала уменьшением моментов (примерно до $\lambda=-0{,}8$), а затем происходит их увеличение, притом значительное для гипара ($\lambda=-1$).

2. Замкнутая цилиндрическая оболочка с круговой площадкой нагружения. Примем торцы оболочки свободно опертыми. В этом случае расчет можно проводить в двойных тригонометрических рядах. Поместим начало координат $xo\varphi$ на том торце, который ближе к области нагружения, и направим x по оси цилиндра. Угол φ будем отсчитывать по направляющей окружности так, чтобы центр площадки имел координаты $(x_1, 0)$. Радиус оболочки обозначим R_2, сохранив прежними остальные обозначения.

Если для вычисления моментов использовать теорию пологих оболочек (это ограничение не обязательно), то ряды (2) сохранят свой вид. Нужно только положить в них $\lambda=0$, $l_2=\pi R_2$ и заменить $2\sin(\beta_n y_1)\sin(\beta_n y)$ на $\cos n\varphi$. Суммирование во втором ряду следует вести от $n=0$, поделив нулевой член пополам.

Для упрощения вычислений представим составляющие A_1, A_2 интегралами (4). В них сохранится суммирование по i, а индекс j надо положить равным нулю. Кроме того, вместо Y_0 следует подставить $R_2\varphi$. Эти изменения учитываются и для замкнутых аналитических представлений интегралов.

Проведем анализ результатов расчета моментов в цилиндрической оболочке при $R_2=1$ м, $h=10^{-2}R_2$, $\nu=0{,}3$, $x_1=0{,}5\,l_1$, $l_1=\pi R_2$. Нормальная сила равномерно распределена по кругу радиуса $R=10^{-2}\pi R_2$. Значения моментов $m_j^0=10^4\,m_jP^{-1}$ $(j=\overline{1,2})$ получены с удержанием в каждом из рядов по N членов и приведены в табл. 2. Вычисление проводилось для центра круга, причем A_k определялось приближенно при помощи таблиц специальных функций [19] по формулам

$$A_1=A_2=\Phi_{100}=P(2\sqrt{2}\pi bR)^{-1}(T_{1R}-K_{1R}) \tag{2.1}$$

Расчет показывает, что комбинированный метод (последние два столбика) позволяет примерно в 16 раз уменьшить число членов, удерживаемых в методе рядов. Следовательно, аппроксимация интегралами локальной части решения целесообразна и в случае замкнутой оболочки.

Таблица 1

N	$\lambda=-1$	$\lambda=-0{,}5$	$\lambda=0$	$\lambda=0{,}5$	$\lambda=1$
5	1621	388	578	188	99
	224	1008	1198	808	719
10	1918	741	952	499	336
	2301	1125	1335	882	719
50	2297	1135	1348	886	705
	2312	1150	1363	901	719
200	2306	1144	1357	895	714
	2312	1150	1363	901	719

Таблица 2

N	m_1^0	m_2^0	m_1^0	m_2^0
10	225	477	1434	1684
20	636	1017	1579	1954
50	1371	1774	1612	2013
100	1648	2049	1613	2015
200	1605	2007	1613	2015

3. Другие формы площадок нагружения. Ограничимся случаем равномерного распределения давлений по эллиптической и прямоугольной площадкам. Весовая функция в рядах (1.2) имеет вид [3]: для эллипса с полуосями u, v и для прямоугольника $2u\times2v$ соответственно

$$f(\alpha_m,\beta_n)=2[(\alpha_m u)^2+(\beta_n v)^2]^{-1/2}J_1\{[(\alpha_m u)^2+(\beta_n v)^2]^{1/2}\}$$

$$f(\alpha_m,\beta_n)=(\alpha_m u\beta_n v)^{-1}\sin(\alpha_m u)\sin(\beta_n v)$$

Здесь u, v характеризуют размеры области нагружения в направлении осей x, y.

Аналитическое вычисление интегралов Фурье существенно усложняется. Их можно представить рядами [9, 10], из которых при малых размерах площадок $\sup(u,v)<2b^{-1}$ следуют простые асимптотические формулы в центре эллипса и прямоугольника соответственно

$$\Phi_{k00}=-\frac{P}{8\pi}\left[2\ln\frac{b(u+v)}{4}+0{,}154-(-1)^k\frac{u-v}{u+v}-\frac{\pi b^2}{64}(u_k^2+v_k^2)\right]$$

$$u_k^2=[2-(-1)^k]u^2,\quad v_k^2=[2+[-1)^k]v^2 \tag{3.1}$$

$$\Phi_{k00}=-\frac{P}{8\pi}\left[2\ln\frac{b(u^2+v^2)^{1/2}}{2}-1{,}846+2\gamma_k-\frac{\pi b^2}{48}(u_k^2+v_k^2)\right]$$

$$\gamma_1=uv^{-1}\operatorname{arc\,tg}(vu^{-1}),\quad \gamma_2=vu^{-1}\operatorname{arc\,tg}(uv^{-1}) \tag{3.2}$$

Приближенное вычисление остальных Φ_{kij} можно вести заменив эллипс или прямоугольник кругом той же площади. Для удаленных от края площадок целесообразно использовать формулу (1.6).

Вернемся к примеру для замкнутой цилиндрической оболочки и заменим круговую площадку квадратом со стороной $2u=10^{-1}R_2$. В связи с малыми размерами площадок переход от круга к квадрату существенно изменит быстрозатухающую составляющую и незначительно проникающую, поэтому пересчитаем только составляющую, представленную интегралом. Ее безразмерные значения, вычисленные по формулам (1.1), (2.1), (3.1), для круга равны 1248 и 1250 соответственно. Малые отличия чисел подтверждают эффективность асимптотических представлений (3.1) и (3.2). Вычислив эту величину для квадрата по формулам (1.1), (3.2), имеем 711. Вычитая в табл. 2 из значений m_1^0, m_2^0 разность 1248—711, получаем $m_1^0=1076$, $m_2^0=1478$. Эти результаты хорошо соответствуют графикам [6] и номограммам [20]. Таким образом, комбинированный подход упрощает расчет локальных напряжений и в случае площадок, отличных от круговых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жигалко Ю. П.* Статика оболочек при силовых локальных воздействиях.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975, вып. 11, с. 62—91.
2. *Даревский В. М.* Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) — В кн.: Тр. 6-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966, с. 927—934.
3. *Голоскоков Е. Г., Ольшанский В. П.* Колебания несимметричных трехслойных пластин при действии локальных подвижных импульсов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 126—132.
4. *Шевляков Ю. А., Шевченко В. П.* К вопросу о действии сосредоточенных воздействий на пологие оболочки.— Концентрация напряжений: Сб. статей Киев: Наук. думка, 1965, вып. 1, с. 326—337.

5. *Величко П. М., Хижняк В. К., Шевченко В. П.* Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизны.– В кн.: Тр. 10-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси: Мецниереба, 1975, т. 1, с. 31–41.
6. *Лукасевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир, 1982. 542 с.
7. *Ольшанский В. П.* Изгиб оболочки двоякой кривизны в зоне прямоугольной площадки нагружения.– Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1980, вып. 14, с. 75–81.
8. *Ольшанский В. П.* Местные напряжения в оболочке двоякой кривизны, нагруженной по кругу.– Изв. вузов. Строит. и архитектура, 1979, № 1, с. 37–41.
9. *Ольшанский В. П.* Изгиб оболочки двоякой кривизны в зоне эллиптической площадки нагружения.– Изв. вузов. Машиностроение, 1979, № 3, с. 8–11.
10. *Ольшанский В. П.* Напряженное состояние панели двоякой кривизны, нагруженной на прямоугольном участке поверхности.– Проблемы прочности, 1980, № 6, с. 116–119.
11. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
12. *Чернышев Г. Н.* О контактных задачах в теории оболочек.– В кн.: Тр. 7-й Всес. конф. по теории пластин и оболочек. М.: Наука, 1970, с. 898–903.
13. *Новожилов В. В., Черных К. Ф.* К расчету оболочек на сосредоточенные воздействия.– В сб.: Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963, № 2, с. 48–58.
14. *Ольшанский В. П.* Фундаментальные решения уравнений пологих оболочек.– Изв. вузов. Математика, 1980, № 6, с. 52–56.
15. *Даревский В. М.* К вопросу о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки.– Докл. АН СССР, 1950, т. 75, № 1, с. 7–10.
16. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
17. *Максименко В. Н., Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие анизотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости.– ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 900–908.
18. *Ольшанский В. П.* Комбинированный метод вычисления локальных напряжений в оболочках.– Изв. вузов. Машиностроение, 1983, № 5, с. 21–23.
19. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
20. *Нерубайло Б. В.* Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983. 248 с.

Харьков

Поступила в редакцию
16.IV.1984