

УДК 539.374

К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНЫХ ПЛАСТИН
ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

МОСКВИТИН В. В., СТАРОВОЙТОВ Э. И.

Пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно выполняются из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. В публикуемой работе исследуется возможность определения напряженно-деформированного состояния подобных элементов конструкций с учетом эффектов нелинейного деформирования материалов при однократных и циклических нагружениях.

1. Рассмотрим двухслойную пластинку, материал несущего металлического слоя которой в процессе деформирования проявляет вязкопластические свойства, оставаясь идеально упругим при $\epsilon_u^{(1)} \leq \epsilon_s^{(1)}$. В мягком полимерном слое возможно наличие областей линейного и физически нелинейного поведения вязкоупругого материала. Возникновение последних регулируется интенсивностью деформаций $\epsilon_u^{(2)}$ и средним напряжением $\sigma^{(2)}$ (верхний индекс — номер слоя). Используем следующие уравнения состояния материалов слоев пластины:

$$\begin{aligned} (1 + \omega_s^k) s_{\alpha\beta}^k &= 2G^k (1 - \omega^k) e_{\alpha\beta}^k & (\epsilon_u^k > \epsilon_s^k) \\ (1 + \omega_s^k) s_{\alpha\beta}^k &= 2G^k e_{\alpha\beta}^k, & G^{(1)} \equiv G_0^{(1)} \quad (\epsilon_u^k \leq \epsilon_s^k) \\ (1 + \omega_v^k) \sigma^k &= 3K^k (\epsilon^k - \alpha^k T^k), & \omega_s^k = \omega_v^k = 0 \quad \text{при } \sigma^k \leq \sigma_0^k \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь k — номер слоя, $s_{\alpha\beta}^k$, σ^k , $e_{\alpha\beta}^k$, ϵ^k — девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций, $T^k(x, z, t)$ — неоднородное и нестационарное температурное поле, $x = (x_1, x_2)$, z — декартова система координат, связанная со срединной плоскостью несущего слоя, t — время, α^k — коэффициент температурного расширения, $\omega^{(1)}(\epsilon_u^{(1)}, \epsilon_s^{(1)}, T^{(1)})$ — функция, совпадающая для упругопластических сред с известной функцией пластичности А. А. Ильюшина [1], $\omega^{(2)}(\epsilon_u^{(2)}, \epsilon_s^{(2)}, T^{(2)})$, $\omega_s^{(2)}(\sigma^{(2)}, \sigma_0^{(2)}, T^{(2)})$, $\sigma_v^{(2)}(\sigma^{(2)}, \sigma_0^{(2)}, T^{(2)})$ — универсальные функции нелинейности, ϵ_s^k , σ_0^k — максимальные значения интенсивности деформаций и гидростатического напряжения, по достижению которых материалы слоев переходят в новое вязкопластическое или физически нелинейное состояние, G^k , K^k — операторы, отражающие реономные свойства материалов:

$$\begin{aligned} G^k f(t) &\equiv G_0^k \left(f(t) - \int_0^t R_0^k(t - \tau) f(\tau) d\tau \right) \\ K^k f(t) &\equiv K_0^k \left(f(t) - \int_0^t V_0^k(t - \tau) f(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

где $R_0^k(t)$, $V_0^k(t)$ — ядра сдвиговой и объемной релаксации, G_0^k , K_0^k — константы упругости. Греческие индексы принимают значения 1, 2. Деформации считаются малыми.

Как известно, объемное деформирование металлов при невысоких давлениях близко к идеально упругому и влияние гидростатического давления на их деформативные свойства весьма незначительно. Поэтому в дальнейшем будем считать $V_0^{(1)} \equiv \omega_s^{(1)} \equiv \omega_v^{(1)} \equiv 0$.

Геометрические гипотезы примем в соответствии с моделью слоистых пластин Э. И. Григолюка [2], т. е. в несущем слое выполняются условия Кирхгофа, в мягком — деформированная нормаль остается прямолинейной и не изменяет своей длины. Учтена работа полимера в тангенциальном направлении. Возникающие при этом касательные напряжения $\tau_{\alpha z}$ связаны с относительными сдвигами $\psi_\alpha = 2\varepsilon^{(2)}$ соотношениями типа (1.1).

Не выписывая известные уравнения равновесия, граничные условия и линейные соотношения связи деформаций с перемещениями [2], укажем лишь, что в конечном итоге задача об определении напряженно-деформированного состояния двухслойной металлополимерной пластинки при нагружении из естественного состояния сводится к системе пяти нелинейных интегродифференциальных уравнений и граничным условиям для неизвестных функций: $w(x, t)$, $\psi_\alpha(x, t)$, $u_\alpha(x, t)$ — прогиба пластинки, относительного сдвига в полимерном слое и тангенциальных перемещений поверхности приведения.

Пусть теперь, начиная с момента времени $t=t_1$, осуществляется разгрузка и последующее нагружение усилиями обратного знака. Следуя [3], введем для всех слоев разности (штрих вверху — прямое нагружение, два штриха — обратное):

$$s_{\alpha\beta}{}^{h*}(t_*) = s_{\alpha\beta}{}^{h'}(t) - s_{\alpha\beta}{}^{h''}(t), \quad w^*(t_*) = w'(t) - w''(t), \quad t_* = t - t_1, \dots \quad (1.2)$$

Для величин, отмеченных звездочкой, запишем уравнения состояния типа (1.1):

$$\begin{aligned} (1 + \omega_s{}^{h*}) s_{\alpha\beta}{}^{h*} &= 2G^{h*} (1 - \omega^{h*}) e_{\alpha\beta}{}^{h*} & (\varepsilon_u{}^{h*} > \varepsilon_s{}^{h*}) \\ (1 + \omega_s{}^{h*}) s_{\alpha\beta}{}^{h*} &= 2G^{h*} e_{\alpha\beta}{}^{h*}, & G^{(1)*} \equiv G_0^{(1)} \quad (\varepsilon_u{}^{h*} \leq \varepsilon_s{}^{h*}) \\ (1 + \omega_v{}^{h*}) \sigma^{h*} &= 3K^{h*} (\varepsilon^{h*} - \alpha^h T^{h*}), & \omega_s{}^{h*} \equiv \omega_v{}^{h*} \equiv 0 \text{ при } \sigma^{h*} \leq \sigma_0{}^{h*} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\varepsilon_s^{(1)*} = \beta_2^{(1)} \varepsilon_s^{(1)'}$ — деформация, соответствующая пределу текучести на диаграмме $\sigma_u^{(1)*} \sim \varepsilon_u^{(1)*}$.

Случай $\beta_2^{(1)} > 2$ соответствует циклически упрочняющемуся материалу, $\beta_2^{(1)} < 2$ — разупрочняющемуся, $\beta_2^{(1)} = 2$ для циклически идеального материала. Так как вязкоупругие характеристики полимеров не изменяются при циклическом деформировании, то $\varepsilon_s^{(2)*} = 2\varepsilon_s^{(2)'}$, $\sigma_0^{(2)*} = 2\sigma_0^{(2)'}$. Операторы G^{h*} , K^{h*} имеют вид

$$\begin{aligned} G^{h*} f(t_*) &\equiv G_0^k \left(f(t_*) - \int_0^{t_*} R_0^{h*}(t_* - \tau, T^{h*}) f(\tau) d\tau \right) \\ K^{h*} f(t_*) &\equiv K_0^k \left(f(t_*) - \int_0^{t_*} V_0^{h*}(t_* - \tau, T^{h*}) f(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

Функции ω^{h*} , $\omega_s{}^{h*}$, $\omega_v{}^{h*}$ описывают участки нелинейности на диаграммах $s_{\alpha\beta}{}^{h*} \sim e_{\alpha\beta}{}^{h*}$, $\sigma^{h*} \sim \varepsilon^{h*}$, причем $\omega^{(2)*} \equiv \omega^{(2)'}$ ($\varepsilon_u^{(2)*}$, $\varepsilon_s^{(2)*}$, $T^{(2)*}$), $\omega_\alpha^{(2)*} \equiv \omega_\alpha^{(2)'}$ ($\sigma^{(2)*}$, $\sigma_0^{(2)*}$, $T^{(2)*}$) ($\alpha = s, v$).

Предположим, что универсальные функции пластичности $\omega^{(1)'}$ и $\omega^{(1)*}$ имеют одинаковый аналитический вид, но различаются только константами a_i' и a_i^* , входящими в аппроксимационные формулы

$$\omega^{(1)'} = \omega^{(1)'}(\varepsilon_u^{(1)'}, \varepsilon_s^{(1)'}, T^{(1)'}, a_i'), \quad \omega^{(1)*} = \omega^{(1)*}(\varepsilon_u^{(1)*}, \varepsilon_s^{(1)*}, T^{(1)*}, a_i^*) \quad (1.4)$$

Тогда, при $R_0^{(1)*}(t) \equiv R_0^{(1)'}(t)$, краевая задача для величин со звездочками (1.2) — (1.4) с точностью до обозначений совпадает с соответствующей задачей основного нагружения, что позволяет найти величины u_α^* , ψ_α^* , w^* , если определены u_α' , ψ_α' , w' . При этом достаточно в формулах для

последних (или в программе для ЭВМ, если решение получено численно) заменить нагрузку p_α' , q' , температуру $T^{h'}$, константы $\varepsilon_s^{h'}$, $\sigma_0^{h'}$, a_i' и время t на p_α^* , q^* , T^{h^*} , $\varepsilon_s^{h^*}$, $\sigma_0^{h^*}$, a_i^* , t^* .

После определения величин со звездочками искомые решения следуют из соотношений типа (1.2)

$$u_\alpha'' = u_\alpha' - u_\alpha^*, \quad \psi_\alpha'' = \psi_\alpha' - \psi_\alpha^*, \quad w'' = w' - w^* \quad (1.5)$$

Для произвольного n -го переменного нагружения решение получаем

$$\text{в подобных предположениях } u_\alpha^n = u_\alpha' + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} u_\alpha^{*i}, \dots$$

2. В качестве примера исследуем переменный изгиб круглой двухслойной пластинки под действием осесимметричной нагрузки. Не выписывая соответствующих уравнений, приведем в цилиндрической системе координат аналитическое решение задачи для случая нагружения пластинки из естественного состояния, полученное с помощью итерационного метода типа метода упругих решений А. А. Ильюшина, распространенного на подобные слоистые системы в [3]:

$$\begin{aligned} \psi^m &= C_1^m I_1(\beta r) + \psi_r^{m-1} \\ w^m &= \frac{a_1}{a_1 a_5 - a_3^2} \left[\int \left(L_3 (q - g_\omega^{m-1}) - \frac{a_3}{a_1} L_2 (p - p_\omega^{m-1}) \right) dr + \right. \\ &+ \left. \left(C_3^m \frac{a_3}{a_1} - C_2^m \right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{a_2 a_3}{a_1} - a_4 \right) \left(\frac{C_1^m}{\beta} I_0(\beta r) + \int \psi_r^{m-1} dr + C_4^m \right) \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u^m &= \frac{a_3}{a_1 a_5 - a_3^2} \left[L_3 (q - g_\omega^{m-1}) + \left(\frac{a_5}{a_3} C_3^m - C_2^m \right) r - \right. \\ &- \left. \frac{a_5}{a_3} L_2 (p - p_\omega^{m-1}) + \left(a_4 - \frac{a_2 a_5}{a_3} \right) \psi^m \right] \\ L_2(\varphi) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int \varphi dr dr, \quad L_3(\varphi) \equiv L_2 \left(\frac{1}{r} \int r \varphi dr \right) \end{aligned}$$

Здесь C_1^m , C_2^m , C_3^m , C_4^m — константы интегрирования, которые определяются на каждом шаге приближения из граничных условий, $I_n(\beta r)$ — модифицированная функция Бесселя ($n=0, 1$), ψ_r^{m-1} — частное решение неоднородного модифицированного бесселевого уравнения, выделяемого из конечной системы уравнений для функции ψ^m :

$$\begin{aligned} \psi_r^{m-1} &= I_1(\beta r) \int r K_1(\beta r) f^{m-1}(r) dr - K_1(\beta r) \int r I_1(\beta r) f^{m-1}(r) dr \\ f^{m-1}(r) &= \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3} \right) (p - p_\omega^{m-1}) + \frac{b_2}{b_3 r} \int (q - g_\omega^{m-1}) r dr + h_\omega^{m-1} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{c b_3 G_0^{(2)}}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{2}{3} c a_2 - \frac{a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = a_4 - \frac{a_2 a_3}{a_1} \\ b_3 &= a_5 - \frac{a_3^2}{a_1}, \quad a_1 = \sum_k h_k \left(K_0^k + \frac{3}{4} G_0^k \right), \quad a_2 = \frac{1}{2} c^2 \left(K_0^{(2)} + \frac{4}{3} G_0^{(2)} \right) \\ a_3 &= c (h + 1/2 c) (K_0^{(2)} + 4/3 G_0^{(2)}), \quad a_4 = c^2 (1/2 h + 1/3 c) (K_0^{(2)} + 4/3 G_0^{(2)}) \\ a_5 &= 2/3 h^3 (K_0^{(1)} + 4/3 G_0^{(1)}) + c (h + h c + 1/3 c^2) (K_0^{(2)} + 4/3 G_0^{(2)}) \end{aligned}$$

где $K_1(\beta r)$ — функция Макдональда, $2h$, c — толщины несущего и мягкого слоев, $p(r, t)$, $q(r, t)$ — составляющие внешней распределенной нагрузки по осям r и z .

В решении (2.1) учтено условие гладкости в центре пластинки; ли-

нейные размеры и перемещения отнесены к радиусу пластинки, а силовые характеристики и константы упругости — к единице давления Па. Члены с индексом (ω) являются поправками на реономность, физическую нелинейность и пластичность материалов, носят название дополнительных «внешних» нагрузок и вычисляются по результатам предыдущего приближения

$$p_{\omega}^{m-1} = T_{r,r}^{\omega(m-1)} + \frac{1}{r} (T_r^{\omega(m-1)} - T_{\varphi}^{\omega(m-1)}),$$

$$h_{\omega}^{m-1} = H_{r,r}^{\omega(m-1)} + \frac{1}{r} (H_r^{\omega(m-1)} - H_{\varphi}^{\omega(m-1)}) - Q^{\omega(m-1)}$$

$$q_{\omega}^{m-1} = M_{r,rr}^{\omega(m-1)} + \frac{1}{r} (2M_{r,r}^{\omega(m-1)} - M_{\varphi,r}^{\omega(m-1)}), \quad H_{\alpha}^{\omega(m-1)} = \{M_{\alpha}^{(2)\omega} - hT_{\alpha}^{(2)\omega}\}^{m-1}$$

$$M_{\alpha}^{\omega(m-1)} \equiv \sum_k M_{\alpha}^{k\omega(m-1)} \equiv \sum_k \int_{h_k}^1 \sigma_{\alpha}^{k\omega(m-1)} z dz,$$

$$T_{\alpha}^{\omega(m-1)} \equiv \sum_k T_{\alpha}^{k\omega(m-1)} \equiv \sum_k \int_{h_k}^1 \sigma_{\alpha}^{k\omega(m-1)} dz$$

$$Q^{\omega(m-1)} = \int_h^{h+c} \{G_0^{(2)} (\omega^{(2)} + R^{(2)} (1 - \omega^{(2)})) \psi + \omega_s^{(2)} s_{rz}^{(2)}\}^{m-1} dz \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\alpha}^{k\omega(m-1)} = \{2G_0^k (\omega^k + R^k (1 - \omega^k)) e^k + \omega_s^k s_{\alpha}^k + 3K_0^k V^k \epsilon^k + \omega_v^k \sigma^k\}^{m-1}$$

$$\omega^{k(m-1)} \equiv \omega^k (\epsilon_{\omega}^{k(m-1)}), \quad R^k \equiv 1 - \frac{G^k}{G_0^k}, \quad V^k = 1 - \frac{K^k}{K_0^k} \quad (\alpha = r, \varphi)$$

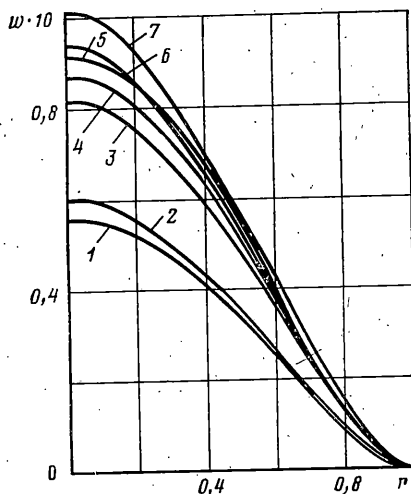
где h_k — толщина k -го слоя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Численная реализация решения (2.1) проводилась на ЭВМ ЕС-1022. При этом полагалось $p=0$, $q=q_0=\text{const}$, край пластинки жестко заделан. Необходимые данные по механическому поведению конструкционных материалов заимствованы из известных экспериментальных исследований дуралюмина [3, 4] и политетрафторэтилена [5], обработка которых приведена в [6].

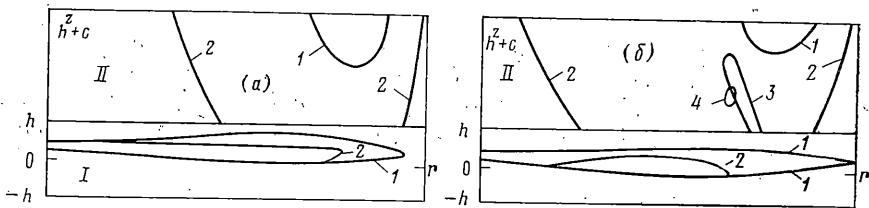
Величина нагрузки ($q_0=1,5 \cdot 10^7$), время ее действия ($t_1=30$ мин, $t_{1*} = 29$ мин), относительные толщины слоев ($2h=0,1$, $c=0,15$) подбирались таким образом, чтобы нелинейные и реономные свойства материалов проявились в достаточной степени. Счет прямого и повторного знакопеременного нагружения производился в соответствии с (1.4), (1.5), (2.2) и (2.3).

Численные результаты показали достаточно быструю практическую сходимость рассмотренного метода последовательных приближений. За решение принято 5-е приближение, отличие которого от 4-го не превышает 4%.

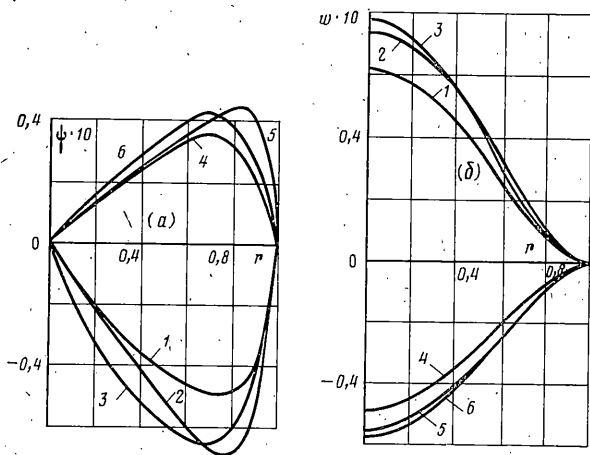
Для определения точности численного решения проверялось удовлетворение его уравнениям равновесия: максимальная погрешность составляет не более 4%. Граничные условия выполняются точно. Шаг сеток по координате (16 узлов) и по времени (60 узлов) подобран из условия незави-



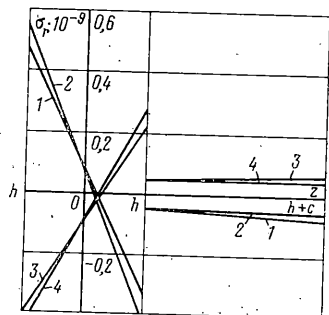
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

симости от него решения и минимальности времени работы ЭВМ. Из фиг. 1, 2 следует необходимость учета нелинейных, пластических и реономных свойств материалов слоев. Первая из них показывает относительный прогиб пластинки, рассчитанный в соответствии с различными уравнениями состояния: кривые 1, 3 — металл упругий, полимер линейно вязкоупругий при $t=0$ и $t=t_1+t_{1*}$; кривые 2, 4—7 — металл вязкоупруго-пластический, причем 2, 7 — общий случай уравнений состояния при $t=0$ и $t=t_1+t_{1*}$, 4 — полимер линейно вязкоупругий, 5 — без учета нелинейности полимера по $\epsilon_u^{(2)}$, 6 — без учета зависимости от гидростатического напряжения. Распределение областей пластических деформаций в металлическом слое (снаружи кривых 1, 2) и нелинейных свойств в полимерном слое (внутри кривых 1, 2 $\omega^{(2)}(\epsilon_u^{(2)}) > 0$, снаружи кривых 3, 4 $\omega_s^{(2)}(\sigma^{(2)}) \neq 0$, $\omega_v^{(2)}(\sigma^{(2)}) \neq 0$) приведено на фиг. 2 (а — без учета влияния гидростатического напряжения; б — общий случай физических уравнений состояния при $t=0$, кривые 1, 3, при $t=t_1+t_{1*}$, кривые 2, 4). Интенсивности деформаций в слоях достигли значений $\epsilon_u^{(1)} = 3,01\%$, $\epsilon_u^{(2)} = 5,88\%$. Соответствующие им функции: $\omega^{(1)} = 0,424$, $\omega^{(2)} = 0,263$. Максимальному гидростатическому напряжению $\sigma^{(2)} = 0,13 \cdot 10^9$ соответствуют значения функций нелинейности $\omega_s^{(2)} = 0,598$, $\omega_v^{(2)} = 0,344$.

Относительный сдвиг в полимерном слое и прогиб пластинки при переменном нагружении показаны на фиг. 3. Кривые 1, 3, 4, 6 — общий случай уравнений состояния, 2, 5 — без учета влияния гидростатического напряжения, причем: 1 — при $t=0$; 2, 3 — при $t=t_1$; 4 — $t_* = 0$; 5, 6 — $t_* = t_{1*}$.

Как показал численный счет, большими из напряжений являются радиальные, которые достигают своего максимума на внешних плоскостях пластинки в заделке. На фиг. 4 показано их изменение по толщине пластинки на ее краю в общем случае физических уравнений состояния: кривые 1, 2 — при $t=0$ и $t=t_1$; кривые 3, 4 — $t_* = 0$ и $t_* = t_{1*}$. На склейке слоев напряжения претерпевают разрыв.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
3. *Москвитин В. В.* Циклические нагрузки элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
4. *Наместников В. С.* Прямое и обратное кручение в условиях ползучести.— ПМТФ, 1960, № 1, с. 121—122.
5. *Гольдман А. Я.* Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, 1979. 320 с.
6. *Старовойтов Э. И., Старовойтова Т. А.* К изгибу двухслойных металлополимерных пластин.— Пробл. прочности, 1984, № 3, с. 100—104.

Москва, Гомель

Поступила в редакцию
13.IV.1984