

УДК 539.214, 539.374

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНЫХ СОПРЯЖЕНИЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЕКТОВ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛИТ

НЕМИРОВСКИЙ Ю. В., НЕБОГАТОВ В. М.

Критерий минимума веса пластических плит был получен почти тридцать лет назад [1], но конкретные решения при использовании условия пластичности Треска удалось получить в самых простейших случаях [2, 3]. Для гладкого условия пластичности (в частности, условия Мизеса) задача оказывается из-за сложности уравнений вообще неразрешимой [4]. Так что проблема оптимального проектирования пластических плит требует серьезного внимания и исследования.

Любой кусочно-гладкий критерий пластичности можно с достаточной степенью точности аппроксимировать в плоскости главных напряжений описанной и вписанной ломаными, которые дают нижнюю и верхнюю оценки оптимального проекта для исходного критерия пластичности [5]. В связи с этим для расширения множества решений искомых оптимальных проектов целесообразно рассмотреть задачу оптимизации для произвольного кусочно-линейного условия пластичности. При этом возникают вопросы построения решений отдельно для гладких режимов, отдельно для сингулярных режимов и о возможных их сопряжениях.

В публикуемой работе для произвольного кусочно-линейного условия пластичности построены классы аналитических решений, отвечающих сторонам и вершинам многоугольника пластичности. Для проектов, соответствующих сторонам многоугольника, показана аналогия разрешающей системы уравнений с системой уравнений плоской деформации идеально пластического тела. Рассматривается вопрос сопряжения подобных решений по некоторым заранее неизвестным линиям. Получены общие соотношения связи между уравнениями контура, линий сопряжения и функциями контурных усилий, обеспечивающие существование решения задачи сопряжения режимов типа вершина-вершина, сторона-сторона и вершина-сторона.

1. Пусть u_k^* , σ_{kl}^* , ϵ_{kl}^* , σ_k^* , ϵ_k^* — соответственно, компоненты скорости, тензора напряжений, тензора скоростей деформации, главные напряжения и главные скорости деформации, h^* — толщина пластинки; индексы k, l принимают значения 1, 2. Перейдем к безразмерным величинам $u_k = u_k^* t_0 x_0^{-1}$, $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^* \sigma_0^{-1}$, $\sigma_k = \sigma_k^* \sigma_0^{-1}$, $\epsilon_{kl} = \epsilon_{kl}^* t_0$, $\epsilon_k = \epsilon_k^* t_0$, $h = h^* H_0^{-1}$, где σ_0 , t_0 , x_0 , H_0 — характерные напряжение, время, длина и толщина пластинки. Компоненты напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$(\sigma_{kl} h)_{,l} = 0 \quad (1.1)$$

и условию пластичности

$$a_i \sigma_1 + b_i \sigma_2 = 1 \quad (1.2)$$

$$a_i = -Q_i d_i^{-1}, \quad b_i = P_i d_i^{-1}, \quad P_i = p_{i+1} - p_i$$

$$Q_i = q_{i+1} - q_i, \quad d_i = p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1}$$

p_i, q_i — координаты вершины A_i ; запятая означает дифференцирование по соответствующей безразмерной координате. Многоугольник A_1, \dots, A_n считаем симметричным относительно прямой $\sigma_1 = \sigma_2$ (фиг. 1, внешний многоугольник).

Ассоциированный закон течения [6] для стороны $A_i A_{i+1}$ имеет вид

$$\epsilon_1 = \lambda a_i, \quad \epsilon_2 = \lambda b_i \quad (1.3)$$

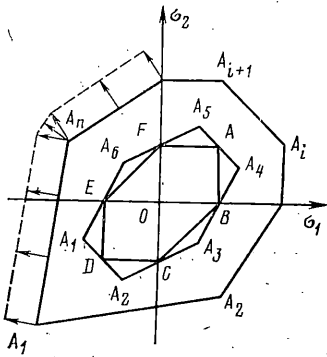
Из условия оптимальности [1] следует:

$$\Delta = \sigma_k \epsilon_k = \lambda = \text{const} \quad (1.4)$$

Обозначим $2\Delta\omega = u_{1,2} - u_{2,1}$, $2s_i = b_i - a_i$, $2t_i = b_i + a_i$. Дифференцируя известные соотношения [7], выражающие компоненты ε_{kl} через ε_k и θ (θ — угол между первым главным направлением и осью x_1), и учитывая формулы Коши и (1.3), (1.4), условие совместности деформаций запишем в виде

$$2s_i(\theta_2 \sin 2\theta + \theta_1 \cos 2\theta) - \omega_{,1} = 0 \quad (1.5)$$

$$2s_i(\theta_2 \cos 2\theta - \theta_1 \sin 2\theta) + \omega_{,2} = 0$$



Фиг. 1

Отметим, что в случае $s_i \neq 0$ система (1.5) с точностью до переобозначений совпадает с системой уравнений плоской деформации идеально пластического тела [7]. Поэтому возникает возможность использования при построении оптимальных проектов ряда уже известных решений задачи плоской деформации [7-9].

Если найдено ω , θ — решение (1.5), то для поля скоростей имеем систему

$$u_{h,l} = \Delta U_{hl}, \quad U_{hh} = t_i + (-1)^k s_i \cos 2\theta \quad (1.6)$$

$$U_{hl} = -s_i \sin 2\theta + (-1)^{k+l} \omega \quad (k \neq l)$$

Отсюда находим u_h по их полным дифференциалам. В случае $s_i \neq 0$ обозначим

$$X = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad C_i = \frac{t_i}{s_i}, \quad D_i = \frac{1}{a_i - b_i}$$

Учитывая выражения σ_{kl} через σ_h , θ [7], из (1.1), (1.2), (1.5) получим

$$\begin{aligned} & h_{,1} [X + (C_i X + D_i) \cos 2\theta] + h_{,2} (C_i X + D_i) \sin 2\theta + \\ & + X_{,1} h (1 + C_i \cos 2\theta) + X_{,2} h C_i \sin 2\theta - \omega_{,2} h (C_i X + D_i) s_i^{-1} = 0 \quad (1.7) \\ & h_{,1} (C_i X + D_i) \sin 2\theta + h_{,2} [X - (C_i X + D_i) \cos 2\theta] + \\ & + X_{,2} h (1 - C_i \cos 2\theta) + X_{,1} h C_i \sin 2\theta + \omega_{,1} h (C_i X + D_i) s_i^{-1} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $s_i \neq 0$ задача свелась к решению двух нелинейных систем уравнений (1.5), (1.7). Можно показать, что при любой кусочно-линейной аппроксимации системы (1.5), (1.7) гиперболического типа, их характеристиками являются траектории главных напряжений — изостаты. Получим граничные условия для этих систем. Пусть γ — угол между нормалью к границе пластинки и осью x_1 . На части границы Γ_u имеем $u_1 = u_2 = 0$. Используя (1.2) — (1.4), найдем $\theta = \gamma + 0,5 \arccos(-C_i) + m\pi$, $\omega = s_i \sin 2(\theta - \gamma)$, где m — произвольное целое число. Отсюда следует, что Γ_u является характеристикой в том, и только том случае, если отрезок $A_i A_{i+1}$ удовлетворяет условию $a_i b_i = 0$. При этом $\omega = 0$ на Γ_u и кривая Γ_u должна состоять из отрезков прямых, пересекающихся под прямым углом. В случае $a_i b_i \neq 0$ имеем на Γ_u задачу Коши для ω , θ .

На части границы Γ_f выполняется равенство $(\sigma_{h1} \cos \gamma + \sigma_{h2} \sin \gamma) h = -F_h$ ($k=1, 2$).

Тогда на Γ_f :

$$D_i h \sin 2(\theta - \gamma) = F_2 \cos \gamma - F_1 \sin \gamma + C_i [F_2 \cos(2\theta - \gamma) - F_1 \sin(2\theta - \gamma)]$$

$$X h \sin 2(\theta - \gamma) = F_1 \sin(2\theta - \gamma) - F_2 \cos(2\theta - \gamma)$$

В случае, когда Γ_f — характеристика, компоненты усилия должны быть связаны с границей зависимостью $F_2 \cos \gamma - F_1 \sin \gamma = 0$. При этом на Γ_f получаем между X и h одно соотношение: $[X + (-1)^m (C_i X + D_i)] h = -F_1 \cos \gamma + F_2 \sin \gamma$.

Если Γ_f — не характеристика и $F_1^2 + F_2^2 \neq 0$, то из последней системы определяем h , X на Γ_f и тем самым ставим задачу Коши для этих функ-

ций (считаем, что θ уже определена из решения кинематической задачи). Если Γ_f — не характеристика и $F_1=F_2=0$, то на Γ_f задана только функция $h=0$ и для постановки задачи Коши необходимо задать на Γ_f функцию X .

Как и в случае плоской деформации [7], при построении решений систем (1.5), (1.7) необходимо рассмотреть различные краевые задачи. В общем случае поле характеристик строится численными (или графическими) методами [7, 10], причем вначале решается система (1.5) и строится сетка характеристик, а затем решается система (1.7). В области G_1 , в которой получено решение краевой задачи для системы (1.5), проведем некоторую кривую и зададим на ней компоненты усилия F_1, F_2 , а в случае $F_1=F_2=0$ — также и функцию X . Решение краевой задачи для системы (1.7) в области G_2 теперь определяет функции ω, θ, h, X в любой подобласти $G \subset G_1 \cap G_2$. Задавая на границе последние соответствующие граничные условия, получаем решение рассматриваемой задачи в области G .

В некоторых случаях можно получить аналитическое решение. Для этого, положив $\xi = \omega - s_i \theta, \eta = \omega + s_i \theta$, приведем систему (1.5) к виду $\xi_{,1} + \xi_{,2} \operatorname{tg} \theta = 0, \eta_{,1} \operatorname{tg} \theta - \eta_{,2} = 0$. Рассмотрим оптимальные проекты, отвечающие интегралам этой системы. Для простоты ограничимся только рассмотрением случая $\xi, \eta = \text{const}$. При этом, очевидно, $\theta = \theta_0, \omega = \omega_0$.

Введем систему координат $y_k = n_{ki} x_i$, где $n_{11} = n_{22} = \cos \theta_0, n_{12} = -n_{21} = \sin \theta_0$. В этой системе координат уравнения (1.7) запишутся в виде

$$\partial_1 \{[(1+C_i)X+D_i]h\} = 0, \quad \partial_2 \{[(1-C_i)X+D_i]h\} = 0$$

где $\partial_k = \partial/\partial y_k$, откуда получим

$$T_k = \sigma_k h = \{[1 + (-1)^{k+1} C_i]X + D_i\} h = f_k \quad (1.8)$$

где $f_1 = f_1(y_2), f_2 = f_2(y_1)$ — некоторые функции, определяемые из граничных условий. В этом случае

$$h = a_i f_1(y_2) + b_i f_2(y_1) \quad (1.9)$$

Поле скоростей также находится легко. Из (1.5) следует

$$u_1 = \Delta [(t_i - s_i \cos 2\theta_0)x_1 + (\omega_0 - s_i \sin 2\theta_0)x_2] + c_1 \quad (1.10)$$

$$u_2 = \Delta [-(s_i \sin 2\theta_0 + \omega_0)x_1 + (t_i + s_i \cos 2\theta_0)x_2] + c_2$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. Можно получить также общие решения системы (1.5), (1.7), отвечающие интегралам $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$. Для этого необходимо осуществить переход в систему координат, связанную с характеристиками, и последующее интегрирование получаемых уравнений.

В случае $s_i = 0$ положим $2X = \sigma_1 - \sigma_2, 2m_i = b_i^{-1} = t_i^{-1}$. Аналогично системе (1.7) получаем

$$h_{,1}(m_i + X \cos 2\theta) + h_{,2}X \sin 2\theta + X_{,1}h \cos 2\theta + X_{,2}h \sin 2\theta + 2Xh(\theta_{,2} \cos 2\theta - \theta_{,1} \sin 2\theta) = 0 \quad (1.11)$$

$$h_{,1}X \sin 2\theta + h_{,2}(m_i - X \cos 2\theta) - X_{,2}h \cos 2\theta + X_{,1}h \sin 2\theta + 2Xh(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) = 0$$

Из системы (1.5) $\omega = \omega_0$, откуда в силу (1.6) имеем

$$u_1 = \Delta (t_i x_1 + \omega_0 x_2) + c_1$$

$$u_2 = \Delta (-\omega_0 x_1 + t_i x_2) + c_2 \quad (c_k = \text{const}) \quad (1.12)$$

Однако для поля скоростей вида (1.12) условие $u_1 = u_2 = 0$ на Γ_u может быть выполнено лишь в том случае, если кривая Γ_u вырождается в точку. Таким образом, в этом случае всюду на границе должны быть заданы усилия. Система (1.11) имеет два уравнения и три неизвестные функции. В связи с этим можно задать произвольно одну из этих функций, напри-

мер θ , и решать, в общем случае численно, систему дифференциальных уравнений относительно h , X. Различные функции θ определяют, вообще говоря, различные оптимальные проекты. Так как они отвечают постоянной скорости диссипации в единице объема, то в силу теоремы Друккера - Шилда [1] все они представляют собой проекты абсолютно минимального веса и, следовательно, имеют одинаковые объемы.

Аналогично случаю $s_i \neq 0$ получим аналитические решения в предположении $\theta = \theta_0$. Запишем уравнения (1.11) в системе координат $y_k = n_{ki} x_i$, введенной ранее: $\partial_1[(m_i + X)h] = 0$, $\partial_2[(m_i - X)h] = 0$ откуда

$$T_k = \sigma_k h = [m_i + (-1)^{k+1} X] h = f_k \quad (1.13)$$

где функции $f_1 = f_1(y_2)$, $f_2 = f_2(y_1)$ определяются из граничных условий. Отсюда будем иметь

$$h = 0,5 m_i^{-1} [f_1(y_2) + f_2(y_1)] \quad (1.14)$$

Отметим, что формулы (1.12), (1.13), (1.14) получаются, соответственно, из (1.10), (1.8), (1.9) формальной подстановкой в последние $s_i = 0$. Далее, к системам уравнений следует добавить также систему неравенств

$$h \geq 0, \quad P_i p_i + Q_i q_i \leq P_i \sigma_1 + Q_i \sigma_2 \leq P_i p_{i+1} + Q_i q_{i+1} \quad (1.15)$$

Учитывая (1.8), (1.9), (1.13), (1.14) и очевидное равенство $d_i = P_i q_i - Q_i p_i = P_i q_{i+1} - Q_i p_{i+1}$, систему (1.15) в случае $\theta = \theta_0$ приведем к виду $a_i f_1 + b_i f_2 \geq 0$, $d_i^{-1}(q_i f_1 - p_i f_2) \geq 0$, $d_i^{-1}(p_{i+1} f_2 - q_{i+1} f_1) \geq 0$.

Так как первое неравенство есть сумма двух последних, остается

$$d_i^{-1}(q_i f_1 - p_i f_2) \geq 0, \quad d_i^{-1}(p_{i+1} f_2 - q_{i+1} f_1) \geq 0$$

В случае, когда напряженное состояние оптимального проекта отвечает вершине A_i , из уравнений равновесия получаем замкнутую систему уравнений для нахождения h , θ :

$$h_{,1} [p_i + q_i + (p_i - q_i) \cos 2\theta] + h_{,2} (p_i - q_i) \sin 2\theta + 2(p_i - q_i) h (\theta_{,2} \cos 2\theta - \theta_{,1} \sin 2\theta) = 0 \quad (1.16)$$

$$h_{,1} (p_i - q_i) \sin 2\theta + h_{,2} [p_i + q_i - (p_i - q_i) \cos 2\theta] + 2(p_i - q_i) h (\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) = 0$$

Для вершины $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$ условия пластичности Треска аналогичная система получена в [2]. Однако в [2] были неверно выписаны коэффициенты (при $h_{,1}$ в первом уравнении и при $h_{,2}$ во втором уравнении были потеряны постоянные слагаемые $p_i + q_i$), что повлияло на тип и последующее решение системы. В случае $p_i = q_i$ имеем $h = h_0 = \text{const}$ - решение (1.16). Если же $p_i \neq q_i$, стандартным способом [8] определяем тип этой системы: гиперболический - при $p_i q_i > 0$, параболический - при $p_i q_i = 0$, эллиптический - при $p_i q_i < 0$.

Закон течения для вершины A_i имеет вид $\varepsilon_1 = \lambda [\mu a_{i-1} + (1-\mu) a_i]$, $\varepsilon_2 = \lambda [\mu b_{i-1} + (1-\mu) b_i]$ ($0 \leq \mu \leq 1$, $\lambda > 0$).

Из условия оптимальности, как и для регулярного режима, следует $\lambda = \Delta = \text{const}$. Геометрически это означает, что конец вектора $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ должен находиться на отрезке, соединяющем концы векторов $(\Delta a_i, \Delta b_i)$ и $(\Delta a_{i-1}, \Delta b_{i-1})$ (фиг. 1). Последнее условие можно записать также в виде

$$\Delta (a_{i-1} - a_i) a_i + \Delta (b_{i-1} - b_i) b_i \leq (a_{i-1} - a_i) \varepsilon_1 + (b_{i-1} - b_i) \varepsilon_2 \leq \Delta (a_{i-1} - a_i) a_{i-1} + \Delta (b_{i-1} - b_i) b_{i-1} \quad (1.17)$$

Подставляя выражения компонент ε_{ki} через ε_h , θ в уравнение совместности деформаций [7] и учитывая при этом закон течения для вершины A_i и условие оптимальности, приходим к уравнению второго порядка для функции μ :

$$\mu_{,11} [t_{i-1} - t_i + (s_{i-1} - s_i) \cos 2\theta] + 2\mu_{,12} (s_{i-1} - s_i) \sin 2\theta + \mu_{,22} [t_{i-1} - t_i - (s_{i-1} - s_i) \cos 2\theta] + 2\mu_{,1} (s_{i-1} - s_i) [(\sin 2\theta)_{,2} + (\cos 2\theta)_{,1}] + 2\mu_{,2} (s_{i-1} -$$

$$-s_i) [(\sin 2\theta)_{,1} - (\cos 2\theta)_{,2}] - [\mu s_{i-1} + (1-\mu) s_i] [(\cos 2\theta)_{,22} - 2(\sin 2\theta)_{,12} - (\cos 2\theta)_{,11}] = 0$$

Тип этого уравнения совпадает с типом системы (1.16), и в гиперболическом случае их характеристики совпадают.

Получим в явном виде класс оптимальных проектов, работающих в режиме A_i и удовлетворяющих условию $\theta = \theta_0 = \text{const}$. Для этого запишем уравнения равновесия в приведенной выше системе координат

$$p_i \partial_1 h = 0, \quad q_i \partial_2 h = 0 \quad (1.18)$$

Учитывая формулы Коши, закон течения и условие оптимальности, получим систему уравнений для скоростей $p_i \partial_1 v_1 + q_i \partial_2 v_2 = \Delta$, $\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 = 0$, где $v_k = n_{ki} u_i$. Подстановкой $v_1 = \partial_1 F$, $v_2 = -\partial_2 F$ эту систему сведем к одному уравнению для F :

$$p_i \partial_1^2 F - q_i \partial_2^2 F = \Delta \quad (\partial_k^2 = \partial_k \partial_k) \quad (1.19)$$

Из граничных условий на Γ_u имеем $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ на Γ_u . Таким образом, получаем задачу Коши для уравнения (1.19). Возможны два случая: $p_i q_i \neq 0$ и $p_i q_i = 0$.

Рассмотрим случай $p_i q_i \neq 0$. Из (1.18):

$$h = h_0 = \text{const}, \quad 2\{\sigma_{11}, \sigma_{22}\} = p_i + q_i \pm (p_i - q_i) \cos 2\theta_0, \quad 2\sigma_{12} = (p_i - q_i) \sin 2\theta_0 \quad (1.20)$$

В случае $p_i q_i > 0$ уравнение (1.19) имеет гиперболический тип и легко решается. Дифференцируя затем общее решение по y_1, y_2 , получим ($\alpha_i^2 = q_i/p_i$):

$$v_1 = \alpha_i [\psi_1(\alpha_i y_1 - y_2) + \psi_2(\alpha_i y_1 + y_2)] + 0,5 \Delta y_1 p_i^{-1} \quad (1.21)$$

$$v_2 = \psi_1(\alpha_i y_1 - y_2) - \psi_2(\alpha_i y_1 + y_2) + 0,5 \Delta y_2 q_i^{-1}$$

Из условия $v_1 = v_2 = 0$ на Γ_u найдем связь между функциями ψ_k и формой контура Γ_u . В случае $p_i q_i < 0$ уравнение (1.19) имеет эллиптический тип. При некоторых ограничениях на гладкость кривой Γ_u теорема Коши — Ковалевской [11] обеспечивает существование аналитического решения уравнения (1.19) при указанных граничных условиях в некоторой окрестности Γ_u . Поэтому, замыкая кривую Γ_u в этой окрестности контуром Γ_f и задавая на последнем соответствующие полученному решению системы (1.16) граничные условия в усилиях, можно получить решение задачи оптимизации для области, ограниченной кривыми Γ_u и Γ_f .

Рассмотрим далее случай $p_i q_i = 0$. Уравнения (1.18), (1.19) интегрируются в замкнутом виде. Например, в случае $q_i = 0$ имеем

$$h = h(y_2), \quad 2\{\sigma_{11}, \sigma_{22}\} = p_i (1 \pm \cos 2\theta_0), \quad 2\sigma_{12} = p_i \sin 2\theta_0, \\ v_1 = \Delta y_1 p_i^{-1} + \varphi_1(y_2), \quad v_2 = -\varphi_1'(y_2) y_1 - \varphi_2(y_2) \quad (1.22)$$

где $h(y_2)$, $\varphi_1(y_2)$, $\varphi_2(y_2)$ — некоторые функции, определяемые из граничных условий.

Таким образом получены некоторые классы новых аналитических решений задачи оптимального проектирования. Однако рассмотрение случая, когда в пластинке реализуется один режим (сторона или вершина), дает все же относительно узкий класс решений и накладывает связь между формой контура и возможными граничными условиями на нем. В тех случаях, когда указанная связь не имеет места, необходимо строить решение в классе сопряженных режимов. В связи с этим в статье выполнен анализ возможных сопряжений для двух режимов. Случай большего числа режимов может быть исследован аналогично.

2. Предположим, что в областях $G^{(m)}$ для некоторых граничных условий построены оптимальные проекты $H^{(m)}(h^{(m)}, \sigma_{kl}^{(m)}, u_k^{(m)})$ ($m=1, 2$). Пусть Γ — линия раздела областей $G^{(m)}$. Для того чтобы рассматривать проект, образованный сопряжением данных проектов, потребуем, чтобы на линии Γ выполнялись следующие соотношения:

совпадение нормальной и касательной составляющих усилия

$$T_{kl}^{(1)} n_k n_l = T_{kl}^{(2)} n_k n_l, \quad (2.1)$$

$$(T_{22}^{(1)} - T_{11}^{(1)}) n_1 n_2 + T_{12}^{(1)} (n_1^2 - n_2^2) = (T_{22}^{(2)} - T_{11}^{(2)}) n_1 n_2 + T_{12}^{(2)} (n_1^2 - n_2^2)$$

условие непрерывности скоростей на Γ :

$$u_k^{(1)} = u_k^{(2)} \quad (2.2)$$

где $(n_1, n_2) = (\cos \gamma, \sin \gamma)$ — нормаль к Γ , $T_{kl}^{(m)} = \sigma_{kl}^{(m)} h^{(m)}$. Для того чтобы полученный сопряжением проект был оптимальным, потребуем также, чтобы скорости диссипации в проектах $H^{(m)}$ совпадали ($\Delta^{(1)} = \Delta^{(2)} = \Delta$). В зависимости от того, какие режимы реализуются в областях $G^{(m)}$, определяющие оптимальные проекты функции должны подчиняться некоторым системам уравнений и неравенств.

В случае, когда проект $H^{(m)}$ целиком отвечает стороне $A_i A_{i+1}$, соответствующие функции $\theta^{(m)}$, $\omega^{(m)}$, $h^{(m)}$, $X^{(m)}$ должны подчиняться системам дифференциальных уравнений (1.5), (1.7) (в случае $s_i \neq 0$) и (1.11) (в случае $s_i = 0$). Кроме того, должны выполняться закон течения $\varepsilon_1^{(m)} = \Delta a_{i1}$, $\varepsilon_2^{(m)} = \Delta b_i$ и неравенства

$$h^{(m)} \geq 0, \quad P_i p_i + Q_i q_i \leq P_i \sigma_1^{(m)} + Q_i \sigma_2^{(m)} \leq P_i p_{i+1} + Q_i q_{i+1}.$$

В случае, когда проект $H^{(m)}$ целиком отвечает вершине A_i , соответствующие функции $h^{(m)}$, $\theta^{(m)}$, $\varepsilon_k^{(m)}$ должны удовлетворять системе (1.16), условию оптимальности $p_i \varepsilon_1^{(m)} + q_i \varepsilon_2^{(m)} = \Delta$ и системе неравенств

$$h^{(m)} \geq 0, \quad \Delta (a_{i-1} - a_i) a_i + \Delta (b_{i-1} - b_i) b_i \leq (a_{i-1} - a_i) \varepsilon_1^{(m)} + (b_{i-1} - b_i) \varepsilon_2^{(m)} \leq \Delta (a_{i-1} - a_i) a_{i-1} + \Delta (b_{i-1} - b_i) b_{i-1}.$$

Полученные требования и условия позволяют полуобратным способом строить новые решения, пользуясь общими решениями, найденными в п. 1. Для этого выделяется некоторый класс проектов, получаемых в явном виде, и решается задача сопряжения в этом классе. При этом граничные условия уже не могут быть произвольными и необходимо выяснить связь между формой контура и граничными условиями на нем. Рассмотрим, например, ситуацию, когда оптимальный проект $H^{(1)}$ отвечает стороне $A_i A_{i+1}$, а оптимальный проект $H^{(2)}$ — стороне $A_j A_{j+1}$ и оба проекта удовлетворяют условию $\xi, \eta = \text{const}$ при $s_i \neq 0$ (соответственно, $s_j \neq 0$) и $\theta = \text{const}$ при $s_i = 0$ (соответственно, $s_j = 0$). Эти проекты задаются формулами (1.8)–(1.10) и определяются наборами постоянных Δ , $\theta_0^{(m)}$, $\omega_0^{(m)}$, $c_k^{(m)}$ и функций $f_k^{(m)}$.

Пусть $G = G_1 \cup G_2$; на части границы Γ_j заданы нормальная F_n и касательная F_{τ} составляющие усилия, на другой части границы Γ_u скорости равны нулю, $\Gamma_j^{(m)}$, $\Gamma_u^{(m)}$ — соответствующие части границ областей $G^{(m)}$. Зададим кривые Γ , Γ_j , Γ_u в параметрическом виде $\Gamma: x_k = x_k(t)$, $\Gamma_j: x_k = \alpha_k(t)$, $\Gamma_u: x_k = \beta_k(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), причем $x_k(0) = \beta_k(t_u)$, $x_k(1) = \alpha_k(t_j)$. Компоненты нормалей к кривым Γ , Γ_j , Γ_u задаются формулами (точка означает дифференцирование по t): $(\cos \gamma, \sin \gamma) = (x_1'^2 + x_2'^2)^{-1/2} (-x_2', x_1')$, $(\cos \gamma_j, \sin \gamma_j) = (\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2)^{-1/2} (-\alpha_2', \alpha_1')$, $(\cos \gamma_u, \sin \gamma_u) = (\beta_1'^2 + \beta_2'^2)^{-1/2} \times (-\beta_2', \beta_1')$.

Граничные условия на Γ_u запишем в виде

$$A_{in} = 0 \quad (0 \leq t \leq t_u), \quad A_{jn} = 0 \quad (t_u \leq t \leq 1) \quad (2.3)$$

$$A_{v1} = \Delta [(t_v - s_v \cos 2\theta_0^{(m)}) \beta_1(t) + (\omega_0^{(m)} - s_v \sin 2\theta_0^{(m)}) \beta_2(t)] + c_1^{(m)}$$

$$A_{v2} = \Delta [- (s_v \sin 2\theta_0^{(m)} + \omega_0^{(m)}) \beta_1(t) + (t_v + s_v \cos 2\theta_0^{(m)}) \beta_2(t)] + c_2^{(m)}$$

где $v = i, j$ причем $m = 1$ при $v = i$ и $m = 2$ при $v = j$.

Условие сопряжения в скоростях (2.2) будет

$$\begin{aligned} & (t_i - t_j - s_i \cos 2\theta_0^{(1)} + s_j \cos 2\theta_0^{(2)}) x_1(t) + (\omega_0^{(1)} - \omega_0^{(2)} - \\ & - s_i \sin 2\theta_0^{(1)} + s_j \sin 2\theta_0^{(2)}) x_2(t) + (c_1^{(1)} - c_1^{(2)}) \Delta^{-1} = 0 \\ & (\omega_0^{(2)} - \omega_0^{(1)} + s_j \sin 2\theta_0^{(2)} - s_i \sin 2\theta_0^{(1)}) x_1(t) + (t_i - t_j + s_i \cos 2\theta_0^{(1)} - \\ & - s_j \cos 2\theta_0^{(2)}) x_2(t) + (c_2^{(1)} - c_2^{(2)}) \Delta^{-1} = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим (2.4) как линейную алгебраическую систему для x_1, x_2 . Поскольку ее общее решение есть аффинное многообразие, содержащее точки кривой Γ , то в случае, если Γ не вырождается в одну точку, определитель матрицы системы (2.4) должен обращаться в нуль; отсюда будем иметь $(t_i - t_j)^2 + (\omega_0^{(1)} - \omega_0^{(2)})^2 = s_i^2 + s_j^2 - 2s_i s_j \cos 2(\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)})$.

Применяя аналогичные рассуждения к системам (2.3), получаем, что в случае, когда кривые $\Gamma_u^{(m)}$ не вырождаются в одну точку, должны быть выполнены соотношения $t_v^2 + \omega_0^{(m)2} = s_v^2$ ($v=i, j$). Наличие полученных ограничений на параметры обусловлено в первую очередь тем, что решение задачи строится в указанном выше классе сопряжений и отражает его специфику.

Используя известные формулы перехода

$$\begin{aligned} T_n^{(m)} &= T_1^{(m)} \cos^2(\theta_0^{(m)} - \gamma_f) + T_2^{(m)} \sin^2(\theta_0^{(m)} - \gamma_f) \\ T_{n\pi}^{(m)} &= 0,5 (T_1^{(m)} - T_2^{(m)}) \sin 2(\theta_0^{(m)} - \gamma_f) \end{aligned}$$

на $\Gamma_f^{(m)}$, аналогичные формулы на Γ и обозначения $n_{kk}^{(m)} = \cos \theta_0^{(m)}$, $n_{12}^{(m)} = -n_{21}^{(m)} = \sin \theta_0^{(m)}$, получим граничные условия на Γ_f :

$$\begin{aligned} B_f^{(m)}(t) G_{1f}^{(m)}(t) + [1 - B_f^{(m)}(t)] G_{2f}^{(m)}(t) &= F_n(t) \\ [G_{1f}^{(m)}(t) - G_{2f}^{(m)}(t)] D_f^{(m)}(t) &= F_{n\pi}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $m=1$ для $0 \leq t \leq t_f$ и $m=2$ для $t_f \leq t \leq 1$, и условия сопряжения (2.1)

$$B^{(1)}(t) G_1^{(1)}(t) + [1 - B^{(1)}(t)] G_2^{(1)}(t) = B^{(2)}(t) G_1^{(2)}(t) + [1 - B^{(2)}(t)] G_2^{(2)}(t) \quad (2.6)$$

$$[G_1^{(1)}(t) - G_2^{(1)}(t)] D^{(1)}(t) = [G_1^{(2)}(t) - G_2^{(2)}(t)] D^{(2)}(t)$$

$$G_{1f}^{(m)} = f_1^{(m)}(n_{2l}^{(m)} \alpha_l(t)), \quad G_{2f}^{(m)} = f_2^{(m)}(n_{1l}^{(m)} \alpha_l(t))$$

$$G_1^{(m)}(t) = f_1^{(m)}(n_{2l}^{(m)} x_l(t)), \quad G_2^{(m)}(t) = f_2^{(m)}(n_{1l}^{(m)} x_l(t))$$

$$B_f^{(m)}(t) = \cos^2(\theta_0^{(m)} - \gamma_f(t)), \quad B^{(m)}(t) = \cos^2(\theta_0^{(m)} - \gamma(t))$$

$$D_f^{(m)}(t) = 0,5 \sin 2(\theta_0^{(m)} - \gamma_f(t)), \quad D^{(m)}(t) = 0,5 \sin 2(\theta_0^{(m)} - \gamma(t))$$

Соотношения (2.3) – (2.6) выражают связь между формой контуров и граничными условиями на них. Кроме того, в областях $G^{(m)}$ должны выполняться системы неравенств

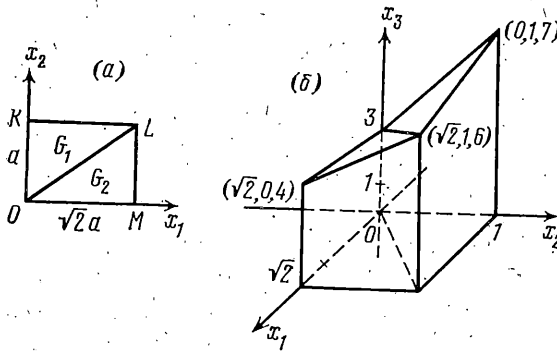
$$\begin{aligned} d_v^{-1} [q_v f_{1l}^{(m)}(n_{2l}^{(m)} x_l) - p_v f_{2l}^{(m)}(n_{2l}^{(m)} x_l)] &\geq 0 \\ d_v^{-1} [p_{v+1} f_{1l}^{(m)}(n_{1l}^{(m)} x_l) - q_{v+1} f_{2l}^{(m)}(n_{2l}^{(m)} x_l)] &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что граничные условия для области G можно ставить различными способами. Возможна и смешанная постановка граничных условий, когда, например, на Γ_u нормальная компонента скорости u_n равна нулю, и задана касательная компонента усилия $F_{n\pi}$. В этом случае граничные условия на Γ_u запишутся в виде

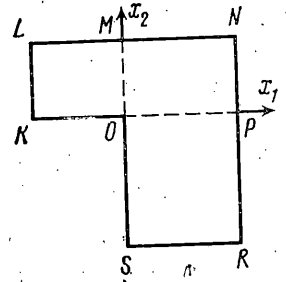
$$A_{v1} \cos \gamma_u + A_{v2} \sin \gamma_u = 0 \quad (2.8)$$

$$[G_{1u}^{(m)}(t) - G_{2u}^{(m)}(t)] D_u^{(m)}(t) = F_{n\pi}(t)$$

где $m=1$, $v=i$ для $0 \leq t \leq t_u$, и $m=2$, $v=j$ для $t_u \leq t \leq 1$, а $G_{ku}^{(m)}(t), D_u^{(m)}(t)$ получаются, соответственно, из $G_{kf}^{(m)}(t), D_f^{(m)}(t)$ заменой γ_f на γ_u .



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Рассмотрим прямоугольную пластинку $OKLM$ (фиг. 2, а) со следующими граничными условиями: $u_n = F_{n\tau} = 0$ на OK ; $F_n = p_0(x_1/\sqrt{2}+1)$, $F_{n\tau} = 0$ на KL ; $F_n = 2p_0(x_2+1)$, $F_{n\tau} = 0$ на LM ; $F_n = p_0(x_1/\sqrt{2}+1)$, $F_{n\tau} = 0$ на OM ($p_0 > 0$ — постоянная).

Материал пластинки удовлетворяет условию пластичности максимального приведенного напряжения [6] (фиг. 1, средний шестиугольник), в качестве режимов $A_i A_{i+1}$, $A_j A_{j+1}$ выберем, соответственно, $A_3 A_4$, $A_4 A_5$. Построим оптимальный проект пластинки для таких граничных условий путем сопряжения указанных режимов по диагонали OL . Пусть $|OK| = a$, $|OM| = \sqrt{2}a$. Зададим все рассматриваемые кривые в параметрическом виде

$$\Gamma_u^{(1)}(OK): \quad x_1 = 0, \quad x_2 = a(1-t) \quad (0 \leq t \leq t_u = 1)$$

$$\Gamma_f^{(1)}(KL): \quad x_1 = 2\sqrt{2}t, \quad x_2 = a \quad (0 \leq t \leq t_f = 1/2),$$

$$\Gamma_f^{(2)}(LM \cup OM): \quad x_1 = \sqrt{2}a, \quad x_2 = a(3-4t) \quad (1/2 \leq t \leq 3/4)$$

$$x_1 = 4\sqrt{2}a(1-t), \quad x_2 = 0 \quad (3/4 \leq t \leq 1)$$

$$\Gamma(OL): \quad x_1 = \sqrt{2}at, \quad x_2 = at \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Для режимов $A_i A_{i+1}$, $A_j A_{j+1}$ рассматриваемого условия пластичности имеем $p_i = -q_i = q_{i+1} = q_j = p_{j+1} = P_i = Q_j = -P_j = 2/3$, $p_{i+1} = p_j = q_{j+1} = Q_i = 4/3$, $d_i = d_j = -4/3$, $a_i = 1$, $a_j = -b_j = -b_i = 1/2$, $s_i = -3/4$, $s_j = 0$, $t_i = 1/4$, $t_j = 1/2$.

Положив $\theta_0^{(m)} = \omega_0^{(1)} = c_k^{(m)} = 0$, $\Delta = 2$, $\omega_0^{(2)} = \sqrt{3}/2$ и выбрав функции $f_1^{(1)}(t) = f_1^{(2)}(t) = 2p_0(t+1)$, $f_2^{(1)}(t) = f_2^{(2)}(t) = p_0 \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1 \right)$, непосредственной проверкой

убеждаемся в выполнении систем (2.4)–(2.6), (2.8). Система неравенств (2.7) в этом случае дает ограничение $a \leq 3\sqrt{2}$. Теперь из (1.9):

$$h^{(1)} = 0,5p_0(-x_1/\sqrt{2} + 4x_2 + 3)$$

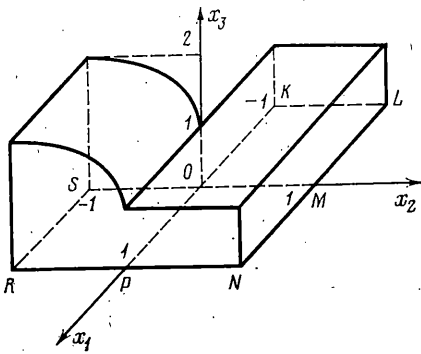
$$h^{(2)} = 0,5p_0(x_1/\sqrt{2} + 2x_2 + 3)$$

На фиг. 2, б изображена верхняя половина пластинки для $p_0 = 4$, $a = 1$.

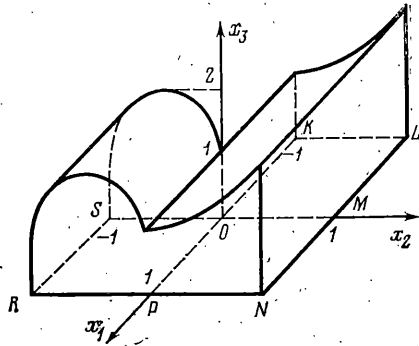
Рассмотрим Γ -образную пластинку (фиг. 3), нагруженную следующим образом: $F_n = F_0 = \text{const}$, $F_{n\tau} = 0$ на OK , KL , LM , NP ; $F_n = F_{n\tau} = 0$ на MN , SR ; $F_n = F(x_2)$, $F_{n\tau} = 0$ на OS , PR , где $F(x_2)$ — некоторая функция. Считая, что материал пластинки удовлетворяет условию пластичности Треска (фиг. 1, внутренний шестиугольник) и в области $OKLM$ реализуется режим A , а в области $OMNPRS$ — режим B , получим оптимальный проект сопряжением режимов по линии OM . Для этого в соответствующих областях воспользуемся аналитическими решениями (1.20), (1.21) и (1.22) при $\theta_0 = 0$, $\varphi_k(t) = 1/4\Delta(t^2+t)$, $\varphi_1(t) = 1/2\Delta t^2$, $\varphi_2(t) = 0$.

В области $OKLM$ имеем $h = T_1 = T_2 = h_0 = \text{const}$, $u_1 = 0,5\Delta(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1)$, $u_2 = -\Delta x_1 x_2$, а в области $OMNPRS$: $h = T_1 = h(x_2)$, $T_2 = 0$, $u_1 = \Delta x_1 + \Delta/2 x_2^2$, $u_2 = -\Delta x_1 x_2$. Условие (2.2) на OM , очевидно, выполняется. Условие (2.1) на OM влечет $h(x_2) = h_0$ для $0 \leq x_2 \leq |OM|$. Граничные условия на контуре теперь удовлетворяются при $h_0 = F_0$, $h(x_2) = F(x_2)$ для $-|OS| \leq x_2 \leq 0$. Неравенства $h \geq 0$ и (1.17) дают ограничения на размеры области и нагрузку: $|OK| \leq 1$, $|OP| \leq 1$, $F(x_2) \geq 0$, $F_0 > 0$.

На фиг. 4 изображена верхняя половина пластинки в случае $|OK| = |OM| = |OP| = |OS| = \Delta = 1$, $F_0 = 2$, $F(x_2) = 2(-x_2^2 - 2x_2 + 1)$ ($-1 \leq x_2 \leq 0$). Таким образом, сопрягаться могут как смежные, так и несмежные режимы. Область, в которой реали-



Фиг. 4



Фиг. 5

зается сторона AB , в последнем примере вырождается в отрезок OM . Зададим на границе той же пластинки другие граничные условия: $F_n = F_1(x_1)$, $F_{n\tau} = 0$ на OK , LM ; $F_n = F_{n\tau} = 0$ на MN , RS ; $F_n = F_2(x_2)$, $F_{n\tau} = 0$ на KL , NP , OS , PR , где $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ — некоторые функции. Считая, что в области $OKLMNP$ реализуется режим AB (ξ , $\eta = \text{const}$), в области $OPRS$ — режим B ($\theta = \theta_0 = 0$) и полагая $f_1(t) = F_2(t)$, $f_2(t) = F_1(t)$ ($-|OK| \leq t \leq 0$), $f_2(t) = 0$ ($0 \leq t \leq |OP|$), $\varphi_1(t) = -\Delta t^2/2$, $\varphi_2(t) = 0$, в области $OKLMNP$ имеем $T_1 = h = F_2(x_2)$ ($0 \leq x_2 \leq |OM|$), $T_2 = F_1(x_1)$, $u_1 = \Delta x_1$ ($-|OK| \leq x_1 \leq 0$), $T_2 = 0$, $u_2 = 0$ ($0 \leq x_1 \leq |OP|$), в области $OPRS$: $T_1 = h = F_2(x_2)$ ($-|OS| \leq x_2 \leq 0$), $T_2 = 0$, $u_1 = \Delta(x_1 - x_2^2/2)$, $u_2 = \Delta x_1 x_2$.

Ясно, что при этом удовлетворяются граничные условия и условия сопряжения (2.1), (2.2) на OP . Неравенства $h \geq 0$ и (1.17) дают $0 \leq F_1(x_1) \leq F_2(x_2)$ для $-|OK| \leq x_1 \leq 0$, $0 \leq x_2 \leq |OM|$, и $|OS| \leq 1$.

На фиг. 5 изображена верхняя половина оптимальной пластинки в случае $|OK| = |OP| = |OM| = |OS| = \Delta = 1$, $F_1(x_1) = -2x_1$, $F_2(x_2) = 2(1 + |\sin \pi x_2|)$ ($-|OS| \leq x_2 \leq 0$), $F_2(x_2) = 2(1 + x_2^2)$ ($0 \leq x_2 \leq |OM|$).

Отметим, что в области $OMNP$ реализуется режим, в котором напряженное состояние пластинки отвечает вершине B , а деформированное состояние — стороне AB (согласно закону течения). Этот режим можно равным образом отнести как к стороне, так и к вершине, потому что системы уравнений для стороны и вершины дают в этом случае одни и те же решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D. C., Shield R. T. Design for minimum weight.— In: Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech. Brussels: Brussels Univ., 1957, v. 5, p. 212–222.
2. Эстрин М. И. О пластинках наименьшего веса, находящихся в условиях плоского напряженного состояния.— Тр. ЦНИИ строит. конструкций, 1961, вып. 4, с. 91–103.
3. Hu T. C., Shield R. T. Minimum-volume design of discs.— Z. Angew. Math. und Phys., 1961, V. 12, N. 5, S. 414–443.
4. Reithman M. I. Analysis of equations of the theory of perfectly plastic shells.— Arch. Mech. Stosow., 1967, v. 19, No. 4, p. 595–601.
5. Немировский Ю. В. Об оценках веса пластических оптимальных конструкций.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 4, с. 159–162.
6. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
7. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
8. Христианович С. А. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981. 483 с.
9. Надаи А. Пластичность. М.—Л.: ОНТИ Главн. ред. общетехн. лит., 1936. 280 с.
10. Панов Д. Ю. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Гостехиздат, 1957. 216 с.
11. Мизлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977. 431 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
28.XI.1983