

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА С РЕАКЦИЕЙ  
И ПРИЛОЖЕНИЕ  
К ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ БИОМЕХАНИКИ

АХУНДОВ М. Б., РАБОТНОВ Ю. Н., СУВОРОВА Ю. В.

Классические модели деформируемых твердых тел предполагают эти тела пассивными объектами, над которыми совершается работа по их деформированию. В публикуемой работе предлагается модель тела, обладающего реакцией на внешнее воздействие. Это означает, что приложенные внешние нагрузки вызывают появление дополнительных внутренних напряжений, изменяющих воздействие внешнего поля, в одномерном случае просто уменьшающих величину приложенных напряжений. Примером такого объекта, обладающего реакцией, служит, например, живой организм. Реакция живого организма носит биологический характер и, следуя [1], будем называть ее биофактором.

В [1] предложена модель биоупругого тела, учитывающего наличие биофактора, не связанного с силовым полем в объеме рассматриваемого тела, в силу чего, в частности, даже при отсутствии напряжений в теле деформации в нем могут быть отличными от нуля и определяются интенсивностью стимулирующего сигнала, вызывающего действие биофактора. Этот подход не противоречит предлагаемому в данной работе, более того, исходные гипотезы могут быть объединены. Однако в целях ясности изложения и для более четкого описания наблюдаемых эффектов здесь не рассматривается биофактор типа [1].

1. Учет реакции может быть проведен двумя способами. Рассмотрим случай, когда реакция тела  $R_1(t)$  зависит от напряженного состояния в предшествующий данному бесконечно близкий момент времени

$$R_1(t) = R_1[\sigma(t-\tau)] \quad (\tau \ll 1) \quad (1.1)$$

Во втором случае реакция тела  $R_2(t)$  зависит от предыстории напряженного состояния в теле в течение всего периода его нагружения

$$R_2(t) = \int_0^t R_2(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Согласно принятой гипотезе, истинное напряжение в теле в данный момент времени будет равно  $\sigma(t) + R_i(t)$  ( $i=1, 2$ ). Тогда уравнение движения может быть записано в виде (для одномерного случая при отсутствии массовых сил)

$$\partial(\sigma + R) / \partial x = \rho \partial^2 u / \partial t^2 \quad (1.3)$$

где  $x$  — координата,  $u$  — перемещение. Задаваясь конкретной зависимостью напряжения от деформации, т. е. определяющим уравнением среды, можно выписать уравнения движения для упругих, пластических, наследственных и других тел.

Рассмотрим два типа сред: упругие и упругонаследственные. Для первой среды определяющее уравнение имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon = E \partial u / \partial x \quad (1.4)$$

где  $E$  — модуль упругости, а для второй среды вместо модуля упругости  $E$

в соотношении (1.4) необходимо ввести некоторый оператор наследственного типа:  $E^* = E(1 - \Gamma^*)$ . Для того чтобы выписать уравнение движения для обоих случаев, необходимо, прежде всего, конкретизировать вид зависимостей (1.1) и (1.2), которые примем линейными

$$R_1(t) = -A_1 \sigma(t - \tau), \quad (0 < A_1 < 1) \quad (1.5)$$

При этом, поскольку  $\tau$  — величина малая, по сравнению с  $t$  для случая (1.5) можно вычислить

$$\sigma + R_1 = \sigma(t) - A_1 \sigma(t - \tau) \approx (1 - A_1) \sigma(t) + A_1 \tau \partial \sigma(t) / \partial t. \quad (1.6)$$

Уравнение движения (1.3) с учетом (1.4) примет вид

$$A_1 \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + (1 - A_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.7)$$

Если же учесть, что биофактор может быть представлен выражением (1.6), то для упругого тела (1.4) уравнение движения будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \int_0^t A_2(t - \tau) \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} d\tau = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение для упругонаследственной среды при отсутствии реакции.

Уравнение (1.8) в приложениях к задаче о распространении гармонических колебаний по руке человека проанализировано в [2]. В этой работе не был введен биофактор, считалось, что костные ткани и окружающие ее мышцы могут быть смоделированы сплошной вязкоупругой средой, поскольку при частотах, представляющих интерес для анализа, длины возникающих волн во много раз превышают геометрические размеры неоднородностей и всего рассматриваемого объекта; в этом случае справедлива также одномерная постановка. В работе были рассмотрены вопросы распространения продольных и изгибных колебаний от кисти руки до плечевого сустава, причем анализ проводился с учетом угла сгиба локтевого сустава. Было установлено, что, по крайней мере качественно, картина распространения колебаний соответствует наблюдаемой в экспериментах [3].

Анализ уравнения (1.8) показывает, что подобные же результаты получаются, если считать материал рассматриваемого объекта чисто упругим, но ввести его реакцию в соответствии с представлениями (1.2) и (1.6).

2. Совместный учет вязкости и биофактора значительно усложняет уравнение движения и его решение. Для первого случая получаем следующие уравнения:

$$(1 - A_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1 \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - (1 - A_1) \int_0^t \Gamma(t - t_1) \frac{\partial^2 u(t_1)}{\partial x^2} dt_1 - \\ - A_1 \tau \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Gamma(t - t_1) \frac{\partial^2 u(t_1)}{\partial x^2} dt_1 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \int_0^t [\Gamma(t - t_1) + A_2(t - t_1)] \frac{\partial^2 u(t_1)}{\partial x^2} dt_1 - \\ - \int_0^t A_2(t - t_1) \int_0^{t_1} \Gamma(t_1 - t_2) \frac{\partial^2 u(t_2)}{\partial x^2} dt_2 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Как и в [2], для получения возможности сопоставления результатов рассмотрим задачу об установившихся колебаниях стержня, уравнение движения которого выбирается в виде (1.7), (2.1) или (2.2), при следующих граничных условиях:  $u=u_0 \cos \omega t$  при  $x=0$ ,  $du/dx=0$  при  $x=l$ . Эти условия соответствуют случаю, когда на одном конце стержня задана вибрационная нагрузка, а другой конец свободен. (В соответствии с [2] такая задача близка к анализу распространения колебаний, например, по руке человека от кисти, подвергнутой вибрационному нагружению, до локтя при условии сгиба локтевого сустава в  $90^\circ$ .)

Для построения решений необходимо, прежде всего, конкретизировать вид ядра наследственности, которое примем в виде дробно-экспоненциальной функции [4, 5]  $\Delta_\alpha(-\kappa, t)$ , а также (для уравнения (2.2)) вид биофактора  $A_2$ :  $A_2=q \exp(-\beta t)$ .

Решения уравнений (1.7), (2.1) и (2.2) имеют один и тот же вид (соответствующий, конечно, и виду решения уравнения (1.8), полученному в [2]):

$$\frac{u(x, t)}{u_0} = \left[ \frac{\operatorname{ch} 2a(l-x) + \cos 2b(l-x)}{\operatorname{ch} 2al + \cos 2bl} \right]^{1/2} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ -\frac{\operatorname{sh} ax \sin b(2l-x) + \operatorname{sh} a(2l-x) \sin bx}{\operatorname{ch} ax \cos b(2l-x) + \operatorname{ch} a(2l-x) \cos bx} \right] +$$

$$+ \begin{cases} 0 & (\operatorname{ch} ax \cos b(2l-x) + \operatorname{ch} a(2l-x) \cos bx > 0) \\ \pi & (\operatorname{ch} ax \cos b(2l-x) + \operatorname{ch} a(2l-x) \cos bx < 0) \end{cases}$$

$$a = \frac{\omega}{\sqrt{2} c_0} \left[ \frac{(f^2 + g^2)^{1/2} - f}{f^2 + g^2} \right], \quad b = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2} c_0} \left[ \frac{(f^2 + g^2)^{1/2} + f}{f^2 + g^2} \right]^{1/2}$$

Здесь выбирается знак плюс, если  $g < 0$ , и знак минус, если  $g > 0$ .

Значения величин  $f$  и  $g$  будут различными для разных уравнений. Введем безразмерные величины:  $\varepsilon = \kappa \omega^2$ ,  $\mu = \tau \kappa q$  ( $p = -(1-\alpha)$ ,  $q = 1/(1-\alpha)$ ). Тогда для уравнения (1.7):  $f = 1-A$ ;  $g = A\mu\varepsilon^{-q}$ , а для уравнения (2.1):

$$f = (1-A) \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{n+1} \left[ A\mu\varepsilon^{-q} \cos \frac{\pi [(n+1)(1-\alpha) + 1]}{2} - \cos \frac{\pi (n+1)(1-\alpha)}{2} \right] \right\}$$

$$g = A\mu\varepsilon^{-q} + \sum_{n=0}^1 (-1)^{n+1} \varepsilon^{n+1} \left[ A\mu\varepsilon^{-q} \sin \frac{\pi [(n+1)(1-\alpha) + 1]}{2} - (1-A) \sin \frac{\pi (n+1)(1-\alpha)}{2} \right]$$

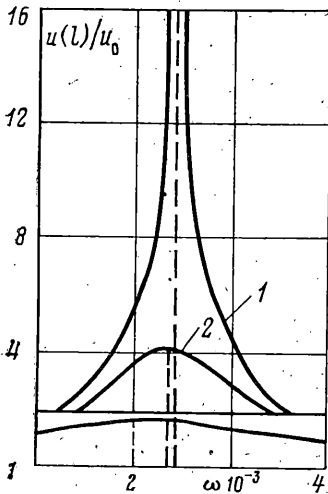
для уравнения (2.2):

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \varepsilon^{n+1}}{1 + \zeta^2 \varepsilon^{-2q}} \left\{ (1 - \eta + \zeta^2 \varepsilon^{-2q}) \cos \frac{\pi (n+1)(1-\alpha)}{2} + \eta \zeta \varepsilon^{-q} \sin \frac{\pi (n+1)(1-\alpha)}{2} \right\}$$

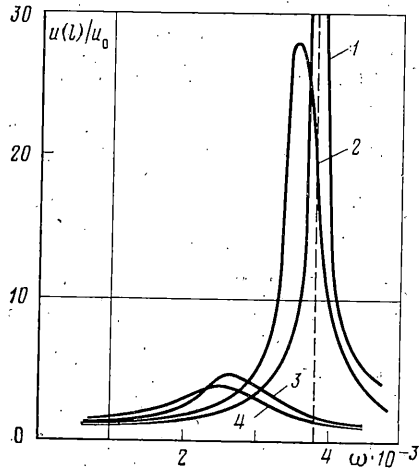
$$g = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \xi^{n+1}}{1 + \xi^2 \varepsilon^{-2q}} \left\{ \eta \xi \varepsilon^{-q} \cos \frac{\pi(n+1)(1-\alpha)}{2} - (1 - \eta + \xi^2 \varepsilon^{-2q}) \sin \frac{\pi(n+1)(1-\alpha)}{2} \right\}$$

$$\eta = g/\beta, \quad \xi = \kappa^q/\beta$$

Анализ полученных решений был выполнен численно, ограничившись в выписанных выше рядах двумя первыми членами. Оказалось, что наличие реакции очень сильно влияет на поведение материала. Все зависит,



Фиг. 1



Фиг. 2

естественно, от величины  $A_1$  (или  $A_2$ ) и от времени запаздывания  $\tau$ . Поскольку наличие множителя, отличного от нуля, не влияет на качественную картину рассматриваемых явлений, то в дальнейшем при выполнении расчетов везде было принято  $A_1 = A_2 = 0,5$ . Однако анализ влияния времени запаздывания, т. е. быстроты реакции, представляет особый интерес.

Если обратиться, например, к уравнению (17), то можно заметить, что когда  $\tau = 0$ ; т. е. реакция мгновенна, но сама отлична от нуля ( $A_1 \neq 0$ ), то ее наличие приводит лишь к изменению скорости упругих волн:  $c^2 = E(1 - A_1)/\beta$ , само уравнение остается чисто упругим. То же можно сказать и относительно уравнения (2.1), которое остается наследственно-упругим. Наличие хотя бы малого времени запаздывания  $\tau$  меняет тип анализируемых уравнений — это будут уже уравнения третьего порядка, допускающие наличие бесконечных скоростей фазовых волн. В результате меняются резонансные частоты и резонансные амплитуды.

В качестве примера на фиг. 1 приведены значения амплитуд колебаний на свободном конце стержня  $x=l$  в зависимости от частоты для различных времен запаздывания<sup>1</sup>. Следует подчеркнуть, что при достаточно больших временах  $\tau$  ( $\tau = 10^{-2}$  и  $\tau = 5 \cdot 10^{-3}$ ) резонансных частот вообще не было обнаружено, а при  $\tau = 10^{-3}$  максимум соответствовал  $u(l)/u_0 = 4,115$  и частоте в  $1,85 \cdot 10^3$  Гц. Это свидетельствует о том, что резонансы сдвигаются в область более низких частот. Увеличение частоты приводит к все большему затуханию амплитуды на конце  $x=l$ . Так, при  $\tau = 10^{-2}$  и  $\omega = 10^4$  Гц  $u(l)/u_0$  принимает уже значение 0,05.

Совершенно иная картина получается при полном отсутствии реакции:  $A_1 = A_2 = 0$ . В этом случае, как и следует ожидать для упругого случая, амплитуды ко-

<sup>1</sup> При расчетах были взяты значения [2]:  $c = 3000$  м/с,  $\kappa = 1$  с,  $\alpha = 0,8$ .

лебаний при резонансных частотах стремятся к бесконечности, для наследственно-упругого тела резонансные частоты будут теми же, но соответствующие им амплитуды постепенно убывают с ростом частоты. Приведем некоторые из полученных значений амплитуд  $u(l)/u_0$ , подсчитанные по уравнению (2.1) при  $A_1=0$  и соответствующие резонансным частотам

$u/u_0 \cdot 10^{-3}$	9,8	8,4	7,3	6,7	6,1	5,7
$\omega \cdot 10^{-4}$	2,04	2,85	3,67	4,49	5,3	6,12

Для того чтобы проследить совместное влияние реакции и вязкости материала на положение резонансных частот и амплитуды колебаний, были произведены расчеты по уравнениям (1.7) и (2.1) при наличии ( $A_1=0,5$ ) и отсутствии ( $A_1=0$ ) реакции для случая  $\tau=10^{-4}$  с.

На фиг. 2 приведены полученные результаты. Оно соответствует случаю  $\tau=10^{-4}$ . Кривые 1 и 3 соответствуют упругому случаю, при этом для кривой 1  $A=0$ , а для кривой 3  $A=0,5$ ; кривые 2 и 4 соответствуют упругонаследственному материалу, для кривой 2  $A=0$ , для кривой 4  $A=0,5$ . Видно, что наличие реакции аналогично увеличению вязкости материала, она уменьшает амплитуду резонансной частоты и сдвигает ее в область более низких частот.

Таким образом, наличие биофактора, т. е. реакции живого организма на внешнее воздействие, может сильно изменить напряженно-деформированное состояние исследуемого объекта, которое зависит, естественно, от времени запаздывания реакции, от ее величины, а также от механических свойств материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин Л. В. Модель биоупругого тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3, с. 154–157.
2. Суворова Ю. В. Распространение гармонических колебаний по руке человека.— Механика полимеров, 1975, № 3, с. 572.
3. Потемкин Б. А., Фролов К. В. Экспериментальное исследование реакции человека — оператора на вибрационное возбуждение.— В кн.: Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. М.: Наука, 1972, с. 67–74.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
5. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Заонов Е. Н. Таблицы дробноэкспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М.: Наука, 1969. 132 с.

Москва

Поступила в редакцию  
18.II.1985