МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1985

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ О СОУДАРЕНИИ ТЕЛ МЕЖДУ УПРУГИМИ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ

МАРТИРОСЯН А. Н., САФАРЯН Ю. С.

Решение задачи о соударении стержней со свободными поверхностями методом Смирнова – Соболева дано в [1, 2]. Задачи о соударении плоских и осесимметричных тел при наличии смешанных условий методом интегральных преобразований решены в [3, 4]. Применением метода обращения интегральных преобразований [5] решение приводится к форме Смирнова – Соболева. Асимптотика решения в [3] получается более легким способом, чем в [1]. Колебание упругого слоя, граничащего с жидким полупространством, рассмотрено в [6]. Решение динамических задач теории упругости методом интегральных преобразований даны в [6–9].

В публикуемой работе рассматривается задача о соударении двух полуполос с упругими постоянными λ', μ', ρ' и высотой $2h$, ограниченных с обеих сторон упругими полуплоскостями $|y|\geqslant h$, имеющими упругие постоянные λ, μ, ρ. В результате соударения образуется слой высоты $2h$ между упругими полуплоскостями. Начало координат выбрано в середине слоя, ось x направлена по его средней линии, ось y – вверх (фиг. 1).

Левая полуполоса движется вдоль жесткой заделки ($x<0$), а правая – между полуплоскостями. Данная задача является обобщением задач [1–4] для учета влияния упругих ограничителей на волновое движение внутри слоя и слоя на волне в упругих полуплоскостях. Такие задачи возникают при изучении процессов стыковки или соударения тел со свободными границами, или ограниченных упругими, жидкими средами, а также частично находящихся внутри канала, при рассмотрении ударных задач при сварке взрывом (вдали от места соударения), в сейсмических задачах.

1. Изучаются две задачи, в первой из которых соударение происходит в точке $x=-l$ на заделке ($l>0$), а второй – вне ее ($l<0$).

Граничные условия следующие ($y=\pm h$):

$$\begin{gathered} u=u', \quad v=v', \quad \sigma_{yy}=\sigma_{yy}', \quad \sigma_{xy}=\sigma_{xy}' \quad (x>0) \\ v=v'=0, \quad \sigma_{xy}=\sigma_{xy}'=0 \quad (x<0) \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь u, v – компоненты перемещений по осям x, y в полуплоскостях, σ_{xy}, σ_{yy} – компоненты тензора напряжений; штрих означает величины, относящиеся к слою. Условие на ребре имеет вид u', v', u, $v=O((x^2+(|y|-h)^2)^{1/2})$ при $x\to 0$, $|y|\to h$.

При решении задачи удобно ввести для искомых функций преобразования Лапласа и Фурье.

Начальные условия следующие: при $t=0$ (t – время) $u=v=0$, $u'=v'=0$, $\partial u/\partial t=-V_0$ ($x'>0$), $\partial u/\partial t=V_0$ ($x'<0$), $x'=x+l$, что соответствует задаче о распаде произвольного разрыва [2].

Для случая $h=\infty$ решение имеет вид [1]:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{V_0}{a'}\sigma\left(t-\frac{|x'|}{a'}\right), \quad V_0'=0, \quad a=\sqrt{\frac{\lambda'+2\mu'}{\rho'}} \tag{1.2}$$

где V_0 – скорость полуполос до соударения, $\sigma(x)$ – единичная функция. В силу симметрии исследуется движение слоя и полуплоскостей для $y\geqslant 0$, причем высота h считается значительно меньше характерной длины at: рассмотрена асимптотика решения для $|x|$, значительно больших h.

Для перемещений имеют место зависимости

$$u=\partial\varphi/\partial x+\partial\psi/\partial y,\quad v=\partial\varphi/\partial y-\partial\psi/\partial x \tag{1.3}$$

где φ, ψ удовлетворяют волновым уравнениям со скоростями a, b, $b=(\mu/\rho)^{1/2}$. В силу четности u и нечетности v по y можно рассмотреть решение для $y\geqslant 0$. После применения преобразования Лапласа по переменной t будем иметь

$$\varphi^*=\int\limits_{-\infty}^{\infty} A\exp[i\alpha^*x+i\beta_1^*(y-h)]\,d\alpha^* \tag{1.4}$$

$$\psi^*=\int\limits_{-\infty}^{\infty} B\exp[i\alpha^*x+i\beta_2^*(y-h)]\,d\alpha^*$$

$$\varphi^{*\prime}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} A'\cos\beta_1^{*\prime}y\exp(i\alpha^*x)\,d\alpha^*+\varphi_0^{*\prime}$$

$$\psi^{*\prime}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} B'\exp(i\alpha^*x)\sin\beta_2^{*\prime}y\,d\alpha^*+\psi_0^{*\prime}$$

$$\beta_n^*=\sqrt{\omega^2/c_n^2-\alpha^{*2}},\quad \beta_n^{*\prime}=\sqrt{\omega^2/c_n'^2-\alpha^{*2}},\quad c_1=a,\quad c_2=b,\quad \omega=is$$

где $\varphi_0^{*\prime}$, $\psi_0^{*\prime}$ — решение одномерной задачи в предположении, что слой вырождается в плоскость ($h=\infty$), s — параметр преобразования Лапласа.

При малых y можно получить

$$u^*,v^*\approx\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^\vee,v^\vee\exp(i\alpha^*x)\,d\alpha^*,\quad u^\vee=i(\alpha^*A+\beta_2^*B),\quad v^\vee=i(\beta_1^*A-\alpha^*B)$$

$$\sigma_{yy}^\vee=\rho(-\omega^2A+2b^2\alpha^{*2}A+2b^2\alpha^*\beta_2^*B) \tag{1.5}$$

$$\sigma_{yy}^{\vee\prime}=\rho'(2b'^2\alpha^{*2}A'-2ib'^2\alpha^*\beta_2^{*\prime}B'-\omega^2A'+\sigma_{0yy}^{\vee\prime})$$

$$\sigma_{xy}^\vee=\mu[(2\alpha^{*2}-\omega^2/b^2)B-2\alpha^*\beta_1^*A]$$

$$\sigma_{xy}^{\vee\prime}=\mu y(2\alpha^{*2}\beta_2^{*\prime}B'-2i\alpha^*\beta_1^{*\prime2}A'-\omega^2B'\beta_2^{*\prime}/b^2)$$

$$u^{\vee\prime}=A'i\alpha^*+\beta_2^{*\prime}B+u_0^{\vee\prime},\quad v^{\vee\prime}=(-A'\beta_1^{*\prime2}-B'i\alpha^*\beta_2^{*\prime})y$$

$$u_0^{\vee\prime}=V_0\exp[i\omega l/a']/[2\pi a'\omega i\alpha^*(\omega/a'-\alpha^*)]\quad (x>0)$$

В плоскости α^* проведены разрезы вдоль действительной оси от $\pm\omega/c_1$, $\pm\omega/c_2$ до $\pm\infty$. Ветви функций $\beta_n^*(\alpha^*)$, $\beta_m^{*\prime}(\alpha^*)$ выбраны такими, чтобы они были положительными на мнимой оси. Введем аналитические функции в верхней и нижней полуплоскостях α^*: $\Omega^+=\sigma_{yy}^\vee-\sigma_{yy}^{\vee\prime}$, $U^+=u^\vee-u^{\vee\prime}$, $\sigma_{xy}^-=\sigma_{xy}^\vee=\sigma_{xy}^{\vee\prime}$, $V=v^\vee=v^{\vee\prime}$.

Условия (1) можно записать в виде

$$\begin{gathered}(2b'^2\alpha^{*2}-\omega^2)A'\rho'-2b'^2\alpha^*\beta_2^{*\prime}B'\rho'+\\+\rho'(a'^2-2b'^2)u_0^{\vee\prime}i\alpha^*+\Omega^+=\\=\rho[(-\omega^2+2b^2\alpha^{*2})A+2b^2\alpha^*\beta_2^*B]\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\sigma_{xy}'^-=-\rho'hik'f^-(\alpha^*)/a'^2-\rho'a'^2h(\omega/a'-\alpha^*)f_1(\alpha^*)$$

$$h(\beta_1^{*\prime2}A'+iB'\alpha^*\beta_2^{*\prime})=V^-=-i(\beta_1^*A-\alpha^*B)$$

$$\begin{gathered}b^2\rho[(2\alpha^{*2}-\omega^2/b^2)B-2\alpha^*\beta_1^*A]=\\=b'^2\rho'h[(2\alpha^{*2}-\omega^2/b'^2)\beta_2^{*\prime}B-2i\alpha^*\beta_1^{*\prime2}A']=\sigma_{xy}^-\end{gathered}$$

Положим $A'=A_1'+A_2'$, $B'=B_1'+B_2'$, $\sigma_{xy}^{-}=\sigma_{0xy}+\sigma_{xy}'$, где A_1', $B_1'=O(1)$, A_2', $B_2'=O(h)$, $\sigma_{0xy}=O(h)$, $\sigma_{xy}'=O(h^2)$. Из (1.6) можно получить, что A, B имеют порядок h. Решая уравнения (1.6) методом Винера — Хопфа, можно найти $\sigma_{0xy}^{-}=h\rho' a'^2\beta_1^{*'2}\breve{u}_0'$, $U^+=\Omega^+=V^-=0$, $A_1'=a'^2 i\alpha^*\breve{u}_0'/\omega^2$, $B_1'=-a'^2\beta_1^{*'2}\breve{u}_0'/(\omega^2\beta_2^{*'})$ (соотношения порядка 1). Подставляя полученные значения в (1.5), сократим слагаемые с A_1', B_1' и слагаемые, содержащие нулевые индексы. Тогда из (1.6) можно получить соотношения порядка 1:

$$A=-\rho' h a'^2\alpha^*\beta_1^{*'2}\breve{u}_0'/(\rho\omega^2\beta_1^*),\quad B=-\rho' h a'^2\beta_1^{*'2}\breve{u}_0'/(\rho\omega^2)$$

$$A_2'=\frac{b'^2}{\omega^2 h\beta_1^{*'2}}\left[\frac{i\alpha^*\sigma_{xy}'^{-}}{\rho' b'^2}+\left(2\alpha^{*2}-\frac{\omega^2}{b'^2}\right)V^-\right] \tag{1.7}$$

$$B_2'=\frac{b'^2(2i\alpha V^- -\sigma_{xy}'^{-})/(\rho' b'^2)}{h\omega^2\beta_2^{*'}}$$

Подставляя (1.7) в первое и второе уравнения (1.6), получим систему уравнений Винера — Хопфа и после исключения $\sigma_{xy}'^{-}$ будем иметь

$$a'^2V^-/h+\Omega^+/\rho'-(a'^2-2b'^2)i\alpha^*U^+=f(\alpha^*) \tag{1.8}$$

$$f(\alpha^*)=\frac{ha'^2\beta_1^{*'2}\alpha^*}{\omega^2\beta_1^*}\left[b^2\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\alpha^{*2}-2\beta_1^*\beta_2^*\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\rho'}{\rho}(a'^2-2b'^2)(\alpha^{*2}+\beta_1^*\beta_2^*)\right]\breve{u}_0'$$

Пусть $l>0$. При $t<l/a'$ в слое имеет место одномерное движение u_0'. Для $t>l/a'$ волна $x+l=at$ доходит до края заделки и задача двумерна. Согласно [7], можно записать представление $f(\alpha^*)$ в виде

$$f(\alpha^*)=f^-(\alpha^*)+f^+(\alpha^*),\quad f^-(\alpha^*)=X(\alpha)/\omega,\quad \alpha^*=\alpha\omega$$

$$X(\alpha)=\left\{-\frac{a'\rho' k' h V_0}{2\pi^2 i\rho}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{(\xi+1/a')\xi^2\,d\xi}{\beta_1(\xi-\alpha)}+\right.$$
$$+\frac{b^2 a' V_0 h}{2\pi^2 i}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{(1/b^2-2\xi^2)(1/a'+\xi)}{\beta_1(\xi-\alpha)}d\xi+$$
$$+\frac{a' V_0 h b^2}{2\pi^2 i}\int_{b^{-1}}^{\infty}\frac{(1/b^2-2\xi^2+2\beta_1\beta_2)(\xi+1/a')}{(\xi-\alpha)\beta_1}d\xi- \tag{1.9}$$
$$\left.-\frac{\rho'}{\rho}\frac{V_0 k' h a'}{2\pi^2 i}\int_{b^{-1}}^{\infty}\frac{(\xi^2-\beta_1\beta_2)(1/a'+\xi)}{\beta_1(\xi-\alpha)}d\xi\right\}\exp\left(\frac{i\omega l}{a'}\right),\quad k'=a'^2-2b'^2$$

Решение уравнения Винера — Хопфа (1.8) имеет вид

$$V^-=hf^-(\alpha^*)a'^2 \tag{1.10}$$

Подставляя V^- в приведенную систему Винера — Хопфа, получим уравнение

$$\frac{\sigma_{xy}'^{-}}{a'^2h\rho'(\alpha^*-\omega/a')}+\left(\frac{\omega}{a'}+\alpha^*\right)U^+=f_1(\alpha^*)+\frac{i\alpha^* k' f(\alpha^*)}{a'^4(\omega/a'-\alpha^*)}-\frac{\rho' h v_0}{\rho\pi a'^2 b\alpha^*} \tag{1.11}$$

$$f_1(\alpha^*)=-\frac{i\rho'}{\rho}ha'^2\beta_1^{*'2}\left(\frac{\omega}{a'}+\alpha^*\right)(\alpha^{*2}+\beta_1^*\beta_2^*)\frac{\breve{u}_0'}{\omega^2\beta_1^*}+\frac{\rho'}{\rho}\frac{hv_0}{\pi a'^2 b\alpha^*}$$

Полагая $f_1(\alpha^*)=f_1^-(\alpha^*)+f_1^+(\alpha^*)$ и решая уравнение Винера — Хопфа, будем иметь

$$\sigma_{xy}'^{-}=-\rho' hik' f^-(\alpha^*)/a'^2-\rho' a'^2 h(\omega/a'-\alpha^*) f_1(\alpha^*)$$

$$f_1^-(\alpha^*)=\frac{X_1(\alpha)}{\omega},\quad X_1(\alpha)=-\frac{\rho_1 h V_0 a'}{\rho\pi^2}\left\{\frac{(1/a'+\xi)^2\xi\,d\xi}{\beta_1(\xi-\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\int_{1/b}^{\infty}\frac{(1/a_1+\xi)(\xi^2-\beta_1\beta_2)}{\xi\beta_1(\xi-\alpha)}d\xi\right\}\exp\left(\frac{i\omega l}{a'}\right) \qquad (1.12)$$

Подставляя (1.10), (1.12) в (1.7) и используя (5), можно получить $U'=X_1(\alpha)/[(1/a'+\alpha)\omega^2]$, $V'=X(\alpha)y/(a'^2\omega)$. Поскольку

$$\frac{\partial U'}{\partial x}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_1(\alpha)\,i\alpha\exp(i\omega\alpha x)}{1/a'+\alpha}d\alpha$$

то, применяя метод обращения интегральных преобразований [5], получим решение в форме Смирнова — Соболева

$$\frac{\partial U'}{\partial x}=-\frac{2}{x}\operatorname{Re} i\frac{X_1(\alpha)}{1/a'+\alpha},\quad \frac{\partial V'}{\partial x}=-\frac{2}{x}\operatorname{Re}\frac{X(\alpha)}{a'^2},\quad \alpha=\frac{t-l/a'}{x} \qquad (1.13)$$

Из (1.9) и (1.12) следует, что $\alpha<1/a$ интегралы не содержат полюсов, причем $X(\alpha)$ мнимая, а $X_1(\alpha)$ действительная функции и решение (13) равно нулю.

Аналогично можно показать равенство нулю членов в (13), соответствующих при $\alpha<1/b$ неособым интегралом. Итак, в слое имеются продольные и поперечные волны со скоростями a, b, которые соответствуют полуплоскостям. Асимптотика решения задачи соударения полуполос, ограниченных упругими полуплоскостями, имеет порядок h и волны в слое имеют те же скорости, что и в полуплоскостях.

В отличие от этого случая, при $\mu=0$, т. е. для жидких полуплоскостей $(\beta_2\to\infty, B\to 0)$, система вырождается:

$$\frac{\omega-C_0\alpha^*}{h(\omega/a'-\alpha^*)}V^-=\frac{(\omega/a'+\alpha^*)\Omega^+}{(\omega+C_0\alpha^*)\rho}-\frac{(\omega/a'+\alpha^*)k'\exp(i\omega l/a')}{\pi a'(\omega+C_0\alpha^*)(\omega/a'-\alpha^*)} \qquad (1.14)$$

Решение имеет вид

$$V^-=\frac{hk'V_0\exp(i\omega l/a')}{\pi a'\omega^3(a'+C_0)(C_0\alpha^*-\omega)},\quad A'=\frac{k'V_0 b'^2(\omega^2/b'^2-2\alpha^{*2})\exp(i\omega l/a')}{\pi a'\omega^3(a'-C_0)\beta_1^{*2}(\omega-C_0\alpha^*)}$$

$$B'=-\frac{2i\alpha^*\beta_1^{*'2}}{\beta_2^{*'}(\omega^2/b'^2-2\alpha^{*2})}A_1,\quad C_0^2=4b^2(a^2-b^2)/a^2$$

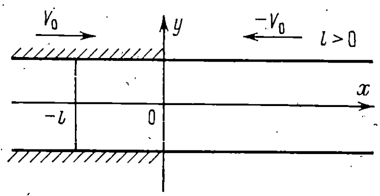
Подставляя полученные решения в (5), вычисляя вычеты при $\alpha^*=\omega/C_0$; $\alpha^*=\pm\omega/a'$, можно получить асимптотику решения соударения плоских тел, которые ограничены жидкостью и имеется заделки при $x<0$:

$$\frac{\partial U'}{\partial x}=-\frac{2a'V_0}{C_0(a'+C_0)}\sigma\left(t-\frac{x}{C_0}-\frac{l}{a'}\right)$$

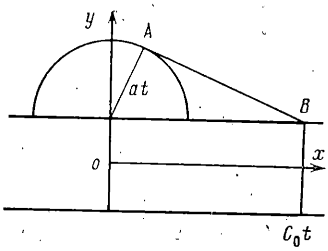
$$\frac{\partial V'}{\partial y}=\frac{2k'V_0}{a'C_0(a'+C_0)}\sigma\left(t-\frac{x}{C_0}-\frac{l}{a'}\right)\quad (x>0)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x}=\frac{(a'-C_0)}{a'(a'-C_0)}V_0\sigma\left(t-\frac{x-l}{a'}\right)-\frac{V_0}{a'}\sigma\left(t+\frac{x'}{a'}\right)$$

$$\partial V'/\partial y=0\quad (x<0)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Полученные формулы совпадают с решением [3] задачи соударения полуполос при наличии свободных границ для $x>0$, а при $x<0$ — жесткой заделки, что соответствует продольным волнам в пластине. В случае отсутствия жесткой заделки условия при $|y|=\pm h$ не являются смешанными и выполняются условия (1) для $x>0$, взятые уже для $-\infty<x<\infty$.

В случае отсутствия смешанных граничных условий $U^+=\Omega^+=0$ асимптотика решения примет вид ($l=0$):

$$\frac{\partial U'}{\partial x}=-\frac{2V_0h}{\pi x}\operatorname{Re}\frac{\alpha^2-\beta_1\beta_2}{\beta_1}, \quad \alpha=\frac{t}{x} \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial V'}{\partial y}=\frac{2V_0h}{\pi x a'^2}\operatorname{Re}\left[\frac{\alpha^2-\beta_1\beta_2}{\beta_1}k-\frac{\rho'}{\rho}\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\alpha^2+2\beta_1\beta_2\right)\right]$$

Отсюда следует, что при $h\approx0$ решение в слое мало и скорости волн равны a и b. Для $\Delta'=\partial U'/\partial x+\partial V'/\partial y$ получается решение, содержащее слагаемые, соответствующие волнам со скоростями a, b. В то же время при $b=0$ получается асимптотика решения, в котором $\partial U'/\partial x$ не мало, совпадающая с решением, полученным другим методом [1]. Для малых x задача двумерна и требуется найти решение методом рекуррентных соотношений [3, 4].

2. Для жидких полуплоскостей решение в упругом слое не отличается от задачи при отсутствии в них вещества. В то же время решение при $y>h$ отлично от нуля и, согласно (1.6), можно получить $A=ihV_0k'[\omega^3\beta_1\pi a^2(1-C_0^2\alpha^2)]^{-1}$. Тогда из $\partial U/\partial x$ следует решение в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\operatorname{Re}\frac{2hV_0k'\alpha_1^2}{\pi a'^2(1-C_0^2\alpha_1^2)\sqrt{t^2-r^2/a^2}}, \quad \alpha_1=\frac{tx+i(y-h)\sqrt{t^2-r^2/a^2}}{r^2}$$

Вблизи волны $r\approx at$, $\beta_1\approx(y-h)/(a^2t)$, $r^2=x^2+(y-h)^2$:

$$\partial U/\partial x=-2\alpha_1^2hV_0k'/[\pi a'^2(1-C_0^2\alpha_1^2)\sqrt{t^2-r^2/a^2}]$$

При $C_0>a$ имеется плоская волна AB (фиг. 2): $t-\alpha_0x-\beta_0(y-h)=0$, $\beta_0=(C_0^2-a^2)^{1/2}/(aC_0)$, которая касается волны $r=at$. Решение на волне AB имеет вид $U=hV_0a^2k'\sigma[(t-\alpha_0x-\beta_0(y-h)]/(C_0a'^2)$.

При $l<0$ соударение происходит вне заделки; для $t<-l/a$ решение совпадает с решением (1.15), при $t>-l/a$ решение находится также:

$$\frac{\partial U'}{\partial x}=2\operatorname{Re}i\left\{\frac{\varphi_1(\alpha_0)\alpha_0a'}{2x(1+a'\alpha_0)}-\frac{\varphi_1(\alpha_1)\alpha_1}{a'x'\beta_1'^2(\alpha_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{a^{-1}}\left[\frac{a'\alpha_2\varphi_2(\xi)}{x(\xi-\alpha_2)(1-a'\xi)(1+a'\alpha_2)}-\frac{a'\alpha_0\varphi_2(\xi)}{2x(\xi-\alpha_0)(1+a'\alpha_0)}\right]d\xi\right\}$$

$$\frac{\partial V'}{\partial y} = -\frac{2}{a'^2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\psi_1(\alpha_1)}{(1-a'\alpha_1)x'} - \frac{\psi_1(\alpha_0)}{2x} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{-a^{-1}}\left[\frac{\psi_2(\xi)}{(1-\xi a')(\xi-\alpha_2)} - \frac{\psi_2(\xi)}{2(\xi-\alpha_0)}\right]\frac{d\xi}{x}\right\}$$

$$\varphi_1(\alpha) = -\frac{\rho'}{\rho}\frac{ha'V_0}{i\beta_1\pi\alpha}\beta_1'^2(\alpha^2-\beta_1\beta_2)$$

$$\psi_1(\alpha) = -\frac{(b^2/\omega^2 - 2\alpha^2 b^2 + 2\beta_1\beta_2)V_0 h}{\pi\beta_1(1-a'\alpha)^{-1}} + \frac{\rho'}{\rho}\frac{k'h(\alpha^2-\beta_1\beta_2)}{\beta_1\pi(1-a'\alpha)^{-1}},$$

$$\varphi_2(\xi) = \varphi_1(\xi) \quad (-\infty<\xi<-1/b), \quad \varphi_2(\xi) = \operatorname{Re}\varphi_1(\xi) \quad (-1/b<\xi<1/a)$$

$$\psi_2(\xi) = \psi_1(\xi) \quad (-\infty<\xi<1/b), \quad \psi_2(\xi) = \operatorname{Re}\psi_1(\xi) \quad (-1/b<\xi\leqslant-1/a)$$

Решение мало для малых h и имеет скорости волн a и b для упругих полуплоскостей. При $\mu=0$ снова имеет место уравнение (1.14), из которого можно получить решение для $l<0$ в виде $(t>-l/C_0)$:

$$\frac{\partial U'}{\partial x} = -\frac{V_0}{C_0}\left\{\operatorname{sgn} x'\sigma\left(t-\frac{|x'|}{C_0}\right) + \frac{a'-C_0}{a'+C_0}\sigma\left(t-\frac{x-l}{C_0}\right)\right.$$

$$\frac{\partial V'}{\partial y} = -\frac{k'}{a'^2}\frac{\partial U'}{\partial x} \quad (x>0)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x} = -\frac{V_0}{a'}\frac{2C_0}{a'+C_0}\sigma\left(t+\frac{l}{C_0}+\frac{x}{a'}\right) \quad \frac{\partial V'}{\partial y} = 0 \quad (x<0)$$

которые совпадают с асимптотикой решения задачи соударения для свободных при $x>0$ границ полуполос. Полученные при $\mu=0$ решения для $l>0$ и $l<0$ соответствуют законам отражения и преломления волн в пластинках [3] на заделке.

Кроме получения расчетных формул для деформаций и напряжений в полосе и в упругих, и в жидких полуплоскостях в публикуемой статье показывается существенное влияние сцепления на характер волн в полосе для асимптотического решения, соответствующего значениям $h/at\to0$. В случае упругих полуплоскостей, ограничивающих полосу, волны в полосе движутся со скоростями a и b продольных и поперечных волн в полуплоскостях, в то время как для жидких полуплоскостей и для свободных границ полосы в асимптотическом решении имеют место лишь продольные волны в пластинках.

Авторы благодарят А. Г. Багдоева за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малков М. А.* Асимптотика двумерной задачи об упругом соударении стержней.– ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 467–471.
2. *Малков М. А.* Двумерная задача об упругом соударении стержней.– Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 4, с. 783–785.
3. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.– Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3, с. 537–540.
4. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 75–84.
5. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 13–23.
6. *Молотков Л. А.* Об инженерных уравнениях колебаний пластин, имеющих слоистую структуру.– В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961, вып. 5, с. 303–313.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. *Сагомонян А. Я., Паручиков В. Б.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1970. 120 с.
9. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.

Горис

Поступила в редакцию 16.V.1984