МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1985

УДК 539.3

ЗАДАЧА ЛЭМБА ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ПАМЯТЬЮ

БРУК С. З.

Работа посвящена начально-краевой задаче Лэмба для упругой среды с памятью. Решение задачи получено для полуплоскости в случае однородной среды и для ограниченной плоской области в случае неоднородной среды с анизотропией общего вида. Для однородной среды найдена интегральная асимптотика решения и исследовано поведение волн, вызванных внезапно приложенной сосредоточенной силой на границе полуплоскости.

1. Задача Лэмба для полуплоскости[1]. Сначала рассмотрим задачу в полуплоскости в случае однородной среды

$$\sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(t)*\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}=\rho\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}\quad (y>0, x_1=x, x_2=y) \tag{1.1}$$

$$\sum_{jl} A_{sj}^{(2l)}(t)*\frac{\partial u_j}{\partial x_l}=-D_s\delta(x)\delta(t)(y=0) \tag{1.2}$$

$$u_s=0\,(t<0) \tag{1.3}$$

$$A_{sj}^{(kl)}(t)=\lambda_{sj}^{(kl)}\left[\delta(t)-\int_0^{+\infty} f_{sj}^{(kl)}(\tau)\tau^{-1}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)d\tau\right](t>0) \tag{1.4}$$

$$A_{sj}^{(kl)}(t)=0\quad (t<0),\quad \int_0^{+\infty} f_{sj}^{(kl)}(\tau)d\tau=1$$

где $\lambda_{sj}^{(kl)}$, d_s — действительные числа, $f_{sj}(\tau)$ — действительные функции.

Обозначим через $\beta_k(\alpha, 1/(i\gamma))$ характеристические корни системы (1.1), т. е. α_2 — корни уравнения ($\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$):

$$\det(D-\rho I)=0,\quad D=\left\|\sum_{kl} A_{sj}^{\vee(kl)}(\gamma)\alpha_k\alpha_l\right\|,\quad I=\left\|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right\| \tag{1.5}$$

где $A^{\vee}(\gamma)$ — преобразование Фурье по t функции $A(t)$.

Обозначим далее через $\Delta(\alpha, 1/(i\gamma))$ определитель Релея: ($\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=(\partial/\partial y)1/\gamma$)

$$\Delta\left(\alpha,\frac{1}{i\gamma}\right)=\det\left\|\sum_{jl} A_{sj}^{\vee(2l)}(\gamma)i\alpha_l z_{jm}\left(\alpha,\frac{1}{i\gamma},0\right)\right\|$$

где $Z_{jm}=Y_{jm}\exp(i\gamma\beta_m y)$ — фундаментальная система решений системы

---

[1] В [1] дано подробное изложение публикаций, относящихся к задаче Лэмба для вязкоупругих сред, в частности для наследственно-упругой среды. Первоначальные исследования в этой области принадлежат В. Г. Гоголадзе [2] и А. Ю. Ишлинскому [3]; см. также [4, 5].

обыкновенных уравнений, соответствующей (1.1). В дальнейшем будем считать $\operatorname{Im}\gamma\geqslant 0$, если не оговорено обратное.

Относительно $\beta_k(\alpha, 1/(i\gamma))$ полагаем, что в α-полуплоскости $\operatorname{Im}\gamma\alpha x\geqslant 0$:

$$\operatorname{Im}\gamma\beta_k\geqslant 0\ (|\alpha|\geqslant 0)\ (k=1, 2),\ \operatorname{Im}\gamma\beta_k\leqslant 0\ (|\alpha|\geqslant 0)\ (k=3, 4) \tag{1.6}$$

Относительно определителя $\Delta(\alpha, 1/(i\gamma))$ полагаем, что есть n_R α-корней $P_\nu^{(R)}(1/(i\gamma))$ $(\nu=1, 2, \ldots, n_R)$ уравнения Релея

$$\Delta(\alpha, 1/(i\gamma)=0\ \ (\operatorname{Im}\gamma\alpha x\geqslant 0) \tag{1.7}$$

отвечающих, согласно (1.7), неравенству $\operatorname{Im}\gamma p_\nu^{(R)}(1/(i\gamma))x\geqslant 0$ и

$$\Delta(\alpha, 1/i\gamma)\neq 0,\ \operatorname{Im}\gamma\alpha=0,\ \operatorname{Im}\gamma>C_0\gg 1 \tag{1.8}$$

Тогда решение u_{jn} задачи (1.1)—(1.3) можно получить в виде

$$u_j=\sum_{k=1}^{2}\left(u_{jk}+\sum_{\nu=1}^{R}u_{jk\nu}^{(R)}\right) \tag{1.9}$$

$$u_{jk}=\lim_{T\to 0}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\exp(-\gamma T-i\gamma t)\,d\gamma\int_\Gamma\Phi_{jk}\left(\alpha,\frac{1}{i\gamma}\right)\exp\left[i\gamma(\alpha x+\beta_k y)\right]d\alpha \tag{1.10}$$

$$\Phi_{jk}=\sum_l\Delta_{kl}Y_{jk}d_l\,(4\pi^2\Delta)^{-1}$$

Здесь Γ — контур, охватывающий все полюса $\alpha=P_\nu^{(R)}$ $(\nu=1, 2, \ldots n_R)$; $u_{jk\nu}^{(R)}$ — волна Релея, соответствующая характеристическому корню β_k и корню Релея $P_\nu^{(R)}$:

$$u_{jk\nu}^{(R)}=\lim_{T\to 0}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}e^{-\gamma T}\Phi_{jk}^{(R)}\left(P_\nu^{(R)},\frac{1}{i\gamma}\right)\exp\left\{i\gamma\left[P_\nu^{(R)}x+\beta_k\left(P_\nu^{(R)},\frac{1}{i\gamma}\right)y-t\right]\right\}d\gamma \tag{1.11}$$

$$\Phi_{jk}^{(R)}(P_\nu^{(R)}, 1/(i\gamma)\exp\left[i\gamma\beta_k(P_\nu^{(R)}, 1/(i\gamma)\,y\right]=$$
$$=2\pi i\operatorname{Res}\left[\Phi_{jk}(\alpha, 1/(i\gamma)\exp(i\gamma\beta_k(\alpha, 1/(i\gamma)\,y)\right]\quad\text{при}\quad\alpha=P_\nu^{(R)}$$

Единственность решения u_j в классе функций, принадлежащих $K'\{R^{(2)}(x, t)\}$, доказывается методом Гольмгрена.

Для исследования функции u_{jk} будем рассматривать нули и полюсы β_k, полюсы $(\beta_k)_\alpha'$ и точки перевала показателя степени $i\gamma(\alpha x+\beta_k y)$ в (1.10) в α-полуплоскости $\operatorname{Im}\gamma\alpha x\geqslant 0$.

Отметим, что $\beta_k(\alpha, 1/(i\gamma))$ не имеет полюсов в плоскости α. В этом можно убедиться подстановкой в характеристическое уравнение, разделенное на β^4, значения $\beta=0$. Нули $\beta_k(\alpha, 1/(i\gamma))$ в плоскости α найдем подстановкой в характеристическое уравнение $\beta=0$. Ими будут корни $\pm Q$, $\pm Q_2$ уравнения $A\alpha^4+B\rho\alpha^2+\rho=0$,

$$A=\det\|\check{A}_{sj}^{(11)}(\gamma)\|,\quad B=\check{A}_{11}^{(11)}(\gamma)+\check{A}_{22}^{11}(\gamma),$$

Обозначим через $q_\nu^{(k)}$ $(\nu, k=1, 2)$ нули $\pm Q_\nu$, принадлежащие полуплоскости $\operatorname{Im}\gamma\alpha x\geqslant 0$. В указанной полуплоскости

$$\beta_k=(\alpha-q_1^{(k)})^{\varepsilon_1^{(k)}}(\alpha-q_2^{(k)})^{\varepsilon_2^{(k)}}\Phi_k(\alpha) \tag{1.12}$$
$$\operatorname{Im}\gamma\alpha q_\nu^{(k)}\geqslant 0\quad(k=1, 2),\quad\Phi_k(\alpha)=0(\alpha^B),\quad B=1-\sum_\nu\varepsilon_\nu^{(k)}\quad(|\alpha|\gg 1)$$

Последнее очевидно, так как $\beta_k(\alpha, 1/(i\gamma)=0(\alpha)$ при $|\alpha|\gg 1$.

Рассмотрим случай, когда $q_\nu^{(k)}$ являются нулями β_k порядка $0<\varepsilon_\nu^{(k)}<1$. Тогда при $\operatorname{Im}\gamma\alpha x\geqslant 0$ будем иметь

$$(\beta_k)_\alpha' = (\alpha - g_1^{(k)})^{-\delta_1^{(k)}} (\alpha - g_2^{(k)})^{-\delta_2^{(k)}} \Phi_k(\alpha), \quad \operatorname{Im}\gamma g_\nu^{(k)} x \geqslant 0 \qquad (1.13)$$
$$(0<\delta_\nu^{(k)}<1),\ \Phi_k(\alpha)=0(\alpha^\varkappa), \quad \varkappa = \sum_\nu \delta_\nu^{(k)} \quad (|\alpha|\gg 1)$$

Следовательно, точки $q_\nu^{(k)}$ будут полюсами $(\beta_k)_\alpha'$ порядка $\delta_\nu^{(k)}$. Отметим, что $\delta_\nu^{(k)}=0$ при $\varepsilon_\nu^{(k)}=0$.

Из решения уравнения четвертой степени (в форме Эйлера) следует, что β_k — это линейная комбинация трех ветвей функции

$$\left(\sqrt[3]{{}^1\!/_2 P_3(\alpha)+\sqrt{P_0(\alpha)}}+\sqrt[3]{{}^1\!/_2 P_3(\alpha)-\sqrt{P_0(\alpha)}}\right)^{1/2} \qquad (1.14)$$

$$P_0(\alpha) = ({}^1\!/_2 P_3^{(\alpha)})^2 + ({}^1\!/_3 P_2^{(\alpha)})^3$$

где $P_i(\alpha)$ — полином i-й степени при $i=2$, 3. Следовательно, остальные полюса $(\beta_k)_\alpha'$ $(k=1, 2)$ при $\operatorname{Im}(\gamma\alpha x)\geqslant 0$ — это нули полинома $P_0(\alpha)$ шестой степени. Обозначим их через $q_\nu^{(k)}$ $(\nu=3, 4, \ldots, n_k)$. Тогда с учетом (1.13) получим

$$(\beta_k)_\alpha' = \prod_{\nu=1}^{n_k} (\alpha - g_\nu^{(k)})^{-\delta_\nu^{(k)}} \Phi_k(\alpha), \quad \Phi_k(\alpha)=0(\alpha^\varkappa) \qquad (1.15)$$
$$|\alpha|\gg 1, \quad \delta_\nu^{(k)}>0, \quad \operatorname{Im}\gamma g_\nu^{(k)} x\geqslant 0 \quad (k=1,2;\ \nu=1,2,3,\ldots,n_k)$$

Таким образом, суммарная кратность полюсов $(\beta_k)_\alpha'$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\gamma\alpha\geqslant 0$ равна $\sum\limits_\nu \delta_\nu^{(k)}$.

Точки перевала $\alpha_{k\nu}^{(0)}$ показателя степени в (1.10) $i\gamma(\alpha x+\beta_k(\alpha, 1/i\gamma)y)$ при $\operatorname{Im}\gamma\alpha\geqslant 0$ являются корнями уравнения $(\alpha\xi+\beta_k\eta)_\alpha'=0$. Согласно (1.15), $(\beta_k)_\alpha'$ можно представить в виде

$$\prod_{\nu=1}^{n_k} (\alpha - g_\nu^{(k)})^{-\delta_\nu^{(k)}} \Phi_k(\alpha) = -\xi/\eta \qquad (1.16)$$

В результате будем иметь

$$(\alpha_{k\nu}^{(0)} - g_\nu^{(k)})^{\delta_\nu^{(k)}} \to 0, \quad \alpha_{k\nu}^{(0)} \to g_\nu^{(k)} \quad (\delta_\nu^{(k)}\geqslant 0) \text{ при } \eta\to 0 \qquad (1.17)$$

Пусть $\eta>0$. Приведем уравнение (1.16) к виду

$$f_\eta^{(k)}(\alpha) = \sum_{m=0}^{N-1} P_m^{(k)}(\alpha)\,\xi^m\eta^{N-m} + P_N^{(k)}(\alpha)\prod_{\nu=1}^{n_k}(\alpha-g_\nu^{(k)})^{T_\nu}\xi^N. \qquad (1.18)$$

где $P_m^{(k)}(\alpha)$ — аналитические функции, причем $P_N^{(k)}(g_\nu^{(k)})\neq 0$; T_ν — натуральные числа. Функция $f_\eta^{(k)}(\alpha)$ имеет общий порядок роста (при $|\alpha|\gg 1$) для $\eta\in[0, 1]$, так как в исходном уравнении (1.16) левая часть обладает указанным свойством.

Искомые точки перевала — это корни $\alpha_{k\nu}^{(0)}$ уравнения (1.18), удовлетворяющие условию (1.17).

Проведем в плоскости α крайнюю правую (или верхнюю) линию уровня $\operatorname{Re} f_\eta^{(k)}(\alpha)=0$ (обозначим ее через E) и окружность $C_R: |\alpha|=R$, где $R\gg\gg 1$. Через E^+ обозначим линию, лежащую внутри C_R, полученную малым сдвигом E вправо (вверх), и через C^+ — дугу окружности C_R, замыкающую E^+ слева (снизу).

Так как множество $f_\eta^{(k)}(\alpha)$ имеет общий порядок (при $|\alpha|\gg 1$) для $\eta\in\in[0, 1]$, то $f_\eta^{(k)}(\alpha)$ гомотопно на C^+ согласно теореме Руше; $\operatorname{Re} f_\eta^{(k)}(\alpha)$ знакопостоянно на E^+, поэтому $f_\eta^{(k)}(\alpha)$ гомотопно также на E^+ согласно теореме Пуанкаре — Боля.

Таким образом, $f_\eta^{(k)}(\alpha)$ гомотопно на замкнутом контуре $E^+ + C^+$ и, следовательно, разность между числами полюсов и нулей постоянна внутри $C^+ + E^+$ для $\eta\in[0, 1]$. Так как внутри $E^+ + C^+$ функция $f_\eta^{(k)}(\alpha)$ не имеет полюсов, то числа корней уравнения (1.18) внутри $E^+ + C^+$ постоянно для $\eta\in[0, 1]$.

При $\eta=0$ уравнение (1.18) принимает вид ($\xi\neq 0$):

$$\prod_{\nu=1}^{n_k} (\alpha - q_\nu^{(k)})^{T_\nu} = 0$$

Таким образом при $\eta=0$ суммарная кратность корней уравнения (1.18) равна ΣT_ν, но суммарная кратность указанных корней, удовлетворяющих условию (1.17), равна $\Sigma\delta_\nu^{(k)}$. Следовательно, имеет место следующая

Теорема. С учетом кратности число полюсов $(\beta_k)_\alpha'(q_\nu^{(k)})$, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Im} \gamma q_\nu^{(k)} x \geqslant 0$ $(\nu=1, 2, \ldots, n_k)$, равно числу точек перевала в (1.15) $(\alpha_{k\nu}^{(0)})$, удовлетворяющих аналогичному неравенству $\operatorname{Im} \gamma \alpha_{k\nu}^{(0)} x \geqslant 0$.

Доказанная теорема сохраняется и для случая, когда нули β_k имеют порядок $\varepsilon_\nu^{(k)} \geqslant 1$, точнее $1 \leqslant \varepsilon_\nu^{(k)} < 2$; соответствующие точки перевала $\alpha_{k\nu}^{(0)}$ имеют порядок $2-\varepsilon_\nu^{(k)}$. Этот случай доказывается предельным переходом (от рассмотренного случая $\varepsilon_\nu^{(k)} < 1$) при условии $Q_\nu + \Delta Q_\nu \to Q_{\nu_1}$. В случае $\varepsilon_\nu^{(k)} = 2$ точек перевала нет. При нецелом значении показателя $\delta_\nu^{(k)}$ в (1.13) β_k является точкой ветвления β_k. Причем, у β_k иных точек ветвления нет.

Таким образом, с учетом кратности число точек ветвления β_k не превосходит число точек перевала $\alpha x + \beta_k y$.

В дальнейшем будем считать, что точками ветвления β_k являются точки $q_\nu^{(k)}$ при $\nu=1, 2, \ldots, n^{(k)}$. Этого можно достигнуть соответствующей нумерацией индекса ν.

Найдем асимптотику внутреннего интеграла (1.10) при $k=1, 2$:

$$J_k = \int_F \Phi_{jk} \left(\alpha, \frac{1}{i\gamma}\right) \exp\left[i\gamma\left(\alpha x + \beta_k(y)\right)\right] d\alpha \tag{1.19}$$

Проведем в полуплоскости $\operatorname{Im} \gamma\alpha x \geqslant 0$ следующие линии: линии стока показателей степени (1.19), проходящие через точки перевала $\alpha_{k\nu}^{(0)}$ (обозначим их $E_{k\nu}^{(0)}$); разрезы полуплоскости вдоль линий уровня $i\gamma\beta_k$, проходящие через точки ветвления $q_\nu^{(k)}$ (обозначим их $h_{\nu(k)}^{(k)}$); линии стока $i\gamma\beta_k$, проходящие через те же точки q_ν (обозначим их через $l_\nu^{(k)}$). Построим ломаную, проходящую через все точки перевала $\alpha_{k\nu}^{(0)}$ и все точки ветвления $q_\nu^{(k)}$, звеньями которой служат отрезки указанных выше линий. Отметим, что $\alpha_{k\nu}^{(0)}$ не достигает точки стыка $E_{k\nu}^{(0)} l_\nu^{(k)}$, так как невозможна принадлежность $\alpha_{k\nu}^{(0)}$ двум различным линиям стока $E_{k\nu}^{(0)}$ и $l_\nu^{(k)}$.

Заменяя контур Г указанной ломаной, представим $J_{k\nu}$ в виде суммы вкладов соответствующих звеньев ломаной, в виде суммы вкладов точек

$\alpha_{k\nu}^{(0)}$ и точек $q_\nu^{(k)}$:

$$u_{jk} = \sum_{\nu=1}^{n_k} u_{jk\nu}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{n^{(\lambda)}} u_{jk\nu}^{(\lambda)} \tag{1.20}$$

где $u_{jk\nu}^{(0)}$ — основные волны (подобные продольной и сдвиговой волнам в изотропной среде), $u_{jkl}^{(\lambda)}$ ($\lambda=1, 2$) — головные волны. По известным асимптотическим формулам получим

$$u_{jk\nu}^{(\sigma)} \sim \lim_{T\to 0} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} N_{jk\nu}^{(\sigma)}\left(\frac{1}{i\gamma}\right)\left[\frac{1}{(i\gamma r)} m\right] \exp\left[i\gamma\left(F_{k\nu}^{(\sigma)}\left(\frac{1}{i\gamma}\right) r - t\right) - \gamma T\right] d\gamma \tag{1.21}$$

$$F_{k\nu}^{(0)} = \alpha_{k\nu}^{(0)}\xi + \beta_k(\alpha_{k\nu}^{(0)}, \quad 1/(i\gamma))\,\eta, m = {}^1/_2 \quad (\sigma = 0)$$

$$F_{k\nu}^{(\lambda)} = q_\nu^{(\lambda)}\xi + \beta_k(q_\nu^{(\lambda)}, \quad 1/(i\gamma))\,\eta, m = {}^3/_2 \quad (\sigma = \lambda = 1, 2)$$

$$F_{k\nu}^{(R)} = P_\nu^{(R)}\xi + \beta_k(P_\nu^{(R)}, \quad 1/(i\gamma)\,\eta, m = 0 \quad (\sigma = R).$$

где $N_{j\nu}^{(\sigma)}(1/(i\gamma))$ — ограниченные функции γ. Уравнение фронта волны $u_{ik\nu}^{(\sigma)}$ запишется так:

$$F_{k\nu}^{(\sigma)}(0)\, r - t = 0 \quad (\gamma = \infty) \tag{1.22}$$

Фронт основной волны (при $\sigma=0$):

$$\alpha_{k\nu}^{(0)}x + \beta_k(\alpha_{k\nu}^{(0)}, \quad 1/(i\gamma))\, y - t = 0 \quad (\gamma = \infty)$$

Фронт головной волны (при $\sigma=1, 2$):

$$q_\nu^{(\sigma)}x + \beta_k(q_\nu^{(\sigma)}, \quad 1/(i\gamma))\, y - t = 0 \quad (\gamma = \infty)$$

Фронт волны Релея (при $\sigma=R$):

$$P_\nu^{(R)}x + \beta_k(P_\nu^{(R)}, \quad 1/(i\gamma))\, y - t = 0 \quad (\gamma = \infty)$$

$$N_{jk\nu}^{(0)}(1/(i\gamma)) = (2/(2\pi)^{3/2})\,(y^{H-1/2}/r^{H-1/2})\,\Phi_{jk}(\alpha_{k\nu}^{(0)}, 1/(i\gamma)) \times$$
$$\times [(-\partial^2\beta_k(\alpha_{k\nu}^{(0)}, 1/(i\gamma))/\partial\alpha^2)\,\eta^{2H}]^{-1/2}$$
$$H \geqslant {}^1/_2, \ \eta = y/r \ \text{(при } \sigma=0) \tag{1.23}$$
$$(\partial^2\beta_k/\partial\alpha^2)_{\alpha=\alpha_{k\nu}^{(0)}} = 0\,(1/(\eta 2H)) \quad (\eta \to 0)$$

$$N_{jk\nu}^{(\lambda)}(1/(i\gamma)) = (\sqrt{2}/(2\pi)^{3/2})\,\Phi_{jk}^{(\lambda)}(q_\nu^{(\lambda)}, 1/(i\gamma)\,(i\gamma)^{3/2} \times$$
$$\times \left\{\times \operatorname{Im}(-i\gamma)\left[\frac{(\partial^2\beta_\lambda/\partial\alpha^2)\,\xi - [(\partial^2\beta_k/\partial\alpha^2)(\partial\beta_\lambda/\partial\alpha) - (\partial^2\beta_\lambda/\partial\alpha^2\partial\beta_k/\partial\alpha)]\,\eta}{(\partial\beta_\lambda/\partial\alpha)^3}\right]\right\}^{-3/2} \tag{1.24}$$

$$\alpha = q_\nu^{(\lambda)}, \quad (x, y) \in G_{k\nu}^{(\lambda)}, \quad N_{jk\nu}^{(\lambda)} = 0, \ (x, y) \overline{\in} G_{k\nu}^{(\lambda)} \quad (\sigma = \lambda = 1, 2) \tag{1.25}$$

$$\Phi_{jk}^{(\lambda)}\left(q_\nu^{(\lambda)}, \frac{1}{i\gamma}\right) = \lim\,(\partial^2/\partial\beta_\lambda^2)\left[\frac{\Phi_{jk}(\alpha, 1/(i\gamma))}{\partial\beta_\lambda/\partial\alpha}\right] \quad \text{при} \quad \alpha \to q_\nu^{(\lambda)}$$

Здесь $Z^{1/2}$ означает аналитическое продолжение арифметического корня; $C_{k\nu}^{\lambda}$ — область x, y, ограниченная осью $y=0$ и линией

$$\operatorname{Im} i\gamma\,(q_\nu^{(\lambda)}x + \beta_k(q_\nu^{(\lambda)}, 1/(i\gamma))\, y) = \operatorname{Im} i\gamma F_{k\nu}^{(0)}(1/(i\gamma))\, r$$

Согласно изложенному выше

$$\operatorname{Im} \gamma F_{k\nu}^{(\sigma)}(1/(i\gamma)) \geqslant 0 \quad (\sigma=0, 1, 2, R) \quad (y \geqslant 0) \tag{1.26}$$

В частности, при $\gamma_2 = \operatorname{Im}\gamma = 0$ и $\gamma_1 = \operatorname{Re}\gamma \gg 1$:

$$\operatorname{Im} \gamma_1 F_{k\nu}^{(\sigma)}(0) \geqslant 0 \quad (\sigma=0, 1, 2, R) \quad (y \geqslant 0) \tag{1.27}$$

Далее предположим, что

$$\operatorname{Re}\{F_{k\nu}^{(\sigma)}(0)\} > 0 \quad (\sigma=0, 1, 2, 3) \quad (y > 0) \tag{1.28}$$

Если $g_\nu^{(k)}(0)$ и $\beta_\lambda(g_\nu^{(k)}(0), 0)$ вещественны, то фронт головной волны $g_\nu^{(k)} x + \beta_\lambda(g_\nu^{(k)}, 1/i\gamma) y - t = 0$ $(\gamma=\infty)$ является прямой линией, касательной к сдвиговой волне: $\alpha_{\lambda\nu}^{(0)} x + \beta_\lambda(\alpha_{\lambda\nu}^{(0)}, 0) y_{(k)} = t$ при $\gamma = \infty$.

Из формулы (1.21) и аналогичной формулы для $D^N u_j(t, M)$ $(D^N = \partial^N / \partial x^{N_1} \partial y^{N_2})$ можно получить оценку преобразования Фурье по аргументу t производной $D^N u$ (обозначим его через $D^N u_j^\vee(\gamma, M)$ или $D^N u_j^\vee$).

Рассмотрим два варианта оценки: при условии, что $\operatorname{Im}\gamma_1 F_{k\nu}^{(\lambda)}$ удовлетворяет условию (1.27), и при более сильном условии

$$\operatorname{Im} \gamma_1 F_{k\nu}^{(\lambda)}(0) > 0 \tag{1.29}$$

Указанные оценки выглядят так:

$$|D^N u_j^\vee| < C_0 \left[\frac{\theta(1-|\gamma|r)}{r^N} + \frac{|\gamma|^N}{(|\gamma|r)^{3/2}} \exp(-A_0|\gamma|(\sin\delta) r)\,\theta(|\gamma| r - 1)\right] \tag{1.30}$$

$$0 < A_0 \leqslant \min \operatorname{Re} F_{k\nu}^{(\lambda)}(0), \quad \gamma_2 > |\gamma|\sin\delta, \quad 0 < \delta < \pi/2, \quad |\gamma| \gg 1$$

$$|D^N u_j^\vee| < C \left[\frac{\theta(1-|\gamma|r)}{r^N} + \frac{|\gamma|^N}{(|\gamma|r)^{3/2}} \exp(-A|\gamma|r)\,\theta(|\gamma| r - 1)\right]$$

$$0 < A \leqslant \min\{\operatorname{Re} F_{k\nu}^{(\lambda)}(0), |\operatorname{Im} F_{k\nu}^{(\lambda)}(0)|\} \quad (\gamma_2 \gg 1) \tag{1.31}$$

Вывод этих оценок основан на формулах (1.27)—(1.29) и на очевидном неравенстве: $(|\gamma|r)^k \exp(-B|\gamma|r) < \exp(-(B-\varepsilon)|\gamma|r)$. В случае $|\gamma|r<1$ используются формулы (1.10), (1.11).

2. Начально-краевая задача в ограниченной области. Пусть дана конечная область H в плоскости x, y, ограниченная гладким выпуклым контуром h конечной кривизны. Требуется найти решение начально-краевой задачи $(M=x, y; M_0=x_0, y_0)$:

$$\sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(t) * \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = 0, \quad M \in H \quad (t > 0) \tag{2.1}$$

$$\sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(t) * \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \cos x_l n(M_0) \to -F_s(t, M_0), \quad M_0 \in h \quad (t > 0) \tag{2.2}$$

$$u_s = 0,\ M \in H\ (t<0),\ F_s(t, M)\exp(\sigma_0 t) \in L_2\ (s, j, k, l = 1, 2) \tag{2.3}$$

Здесь $F_s(t, M)$ равна нулю при $t<0$, $M \to M_0$ изнутри H $n(M_0)$ — орт внутренней нормали kh в точке M_0.

Будем полагать, что в области $H+h$ при любом выборе системы декартовых координат выполняются все условия п. 1, за исключением (1.27), которое заменено условием (1.29).

Сначала рассмотрим начально-краевую задачу для системы (2.1) в полуплоскости $(MM_0, n(M_0)) > 0$, ограниченной касательной, проведенной к

h в точке M_0 с граничным условием

$$\sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(t) * \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \cos x_l n(M_0) = -\delta_{sq}\delta((MM_0, S(M_0))\,\delta(t) \qquad (2.4)$$

где $S(M_0)$ — орт касательной к h в точке M_0 и с нулевым начальным условием.

Решение задачи $G_{sq}(t, M-M_0, M_0, n(M_0))$ носит название функции Грина в полуплоскости $(MM_0, n(M_0))>0$. Функцию $G_{sq}(t, M-M_0, M_0, n(M_0))$ можно выразить через решение u_j задачи (1.1)—(1.3) соответствующим преобразованием поворота и параллельного переноса с последующей заменой M на $M-M_0$, D_s — на δ_{sq}.

Решение задачи (2.1)—(2.3) можно искать в виде свертки по t:

$$u_j(t, M) = \int_{h(M_0)} \sum_q G_{jq}(t, M-M_0, M_0, n(M_0))\,\varphi_q(t, M_0)\,dh(M_0) \qquad (2.5)$$

Используя преобразование Фурье по t, получим $(\gamma_2 \gg 1)$:

$$u_j^{\vee}(\gamma, M) = \int_{h(M_0)} \sum_q G_{jq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0, n(M_0))\,\varphi_q^{\vee}(\gamma, M_0)\,dh(M_0) \qquad (2.6)$$

Далее, в силу (2.2) найдем систему интегральных уравнений

$$F_s^{\vee}(\gamma, m) = \int_{h(M_0)} \sum_q K_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)\,\varphi_q^{\vee}(\gamma, M_0)\,dh(M_0) + \varphi_s^{\vee}(\gamma, M) \qquad (2.7)$$

$$K_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) = \sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(\gamma)\,\frac{\partial G_{jq}^{\vee}}{\partial x_k}(\gamma, M-M_0, M_0, n(M_0))\cos x_l n(M) \qquad (2.8)$$

Учитывая известное свойство функции Грина (см. [6, 7]) и формулу (1.31), получим следующую оценку $(r_0=|M-M_0|)$:

$$|K_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)| < \mathrm{const}\left[\theta(1-|\gamma|r_0) + \frac{\theta(|\gamma|r_0-1)}{\sqrt{|\gamma|r_0}}\exp(-A|\gamma|r_0)\right] \qquad (2.9)$$

Отсюда для ядер $K_{sq}^{(n)\vee}$ будем иметь оценку

$$|K_{sq}^{(n)\vee}(\gamma, M, M_0)| < \mathrm{const}\,\frac{C^n}{|\gamma|^n} \quad (n \geqslant 2). \qquad (2.10)$$

Следовательно ($R_{sq}^{\vee}$ — резольвента (2.7)):

$$\varphi_s^{\vee}(\gamma, M_0) = \int_{h(M_1)} + \sum_q R_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_1)\,F_q^{\vee}(\gamma, M_1)\,dh(M_1) + F_s^{\vee}(\gamma, M_0) \qquad (2.11)$$

Согласно (2.10):

$$R_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_1) = K_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_1) + 0(1/|\gamma|-C)\;(\gamma_2 \gg 1) \qquad (2.12)$$

Отсюда, на основании теоремы Планшереля, найдем

$$R_{sq}(t, M, M_1) = \varphi_q(t, M_0) = 0 \;(t<0)\;(M, M_1, M_0 \in h) \qquad (2.13)$$

Формула (2.6), так же как и оценка (2.12), имеют место при вамене условия (1.29) более слабым условием (1.27), однако не при $\gamma_2 \gg 1$, а в области: $\{\arg \in (\delta, \pi, -\delta),\ 0<\delta<\pi/2,\ |\gamma| \gg 1\}$.

Вектор-функции $u_j^{\vee}(\gamma, M)$ соответствует аналитический функционал

$$(u^{\vee}, \zeta^{\vee}) = \int\limits_E \sum_j u_j^{\vee}(\gamma, M)\,\zeta_j^{\vee}(\gamma)\,d\gamma, \quad \zeta_j^{\vee}(\gamma) \in Z\{R^{(1)}\} \tag{2.14}$$

где E — произвольный контур в плоскости γ, удаленный в бесконечность при $\gamma_1 = \operatorname{Re}\gamma \to \pm\infty$ и принадлежащий области $\{\arg \in (\delta, \pi, -\delta),\ 0<\delta<\pi/2, |\gamma| \gg 1\}$.

Фурье-обращение функционала (2.14) получим в виде функционала над пространством функций $\zeta(t) \in K\{R^{(1)}\}$ (и равных нулю при $t \to 0$) следующего вида:

$$(u, \zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum \overline{u_j}(t, M)\,\zeta_j(t)\,dt \tag{2.15}$$

$$u_j(t, M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_E \overline{u_j^{\vee}(\gamma, M) \exp(i\gamma t)\,d\gamma} \tag{2.16}$$

Действительно, будем иметь

$$(u^{\vee}, \zeta^{\vee}) = \sum_j \int\limits_E u_j^{\vee}(\gamma, M)\,\zeta_j^{\vee}(\gamma)\,d\gamma = \sum_j \int\limits_E u_j^{\vee}(\gamma, M)\,d\gamma \int\limits_0^{+\infty} \zeta(t) \exp(i\gamma t)\,dt =$$

$$= 2\pi \sum_j \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_E u_j^{\vee}(\gamma, M) \exp(i\gamma t)\,d\gamma \right) \zeta_j(t)\,dt = 2\pi \sum_j \int\limits_0^{+\infty} \overline{u_j(t, M)}\,\zeta_j(t)\,dt =$$

$$= 2\pi (u, \zeta).$$

Решение (2.16) непрерывно вместе со своими производными до второго порядка в области $M \in H(t>0)$, за исключением характеристик, где возможен разрыв непрерывности $u_j(t, M)$ и его производных по x, y, t.

Единственность решения в классе функций $u_j = 0(\exp \lambda t)$, $t \to \infty$, $\lambda = \mathrm{const}$ доказывается методом Гольмгрена.

Пусть контур h в области H обладает указанными выше свойствами. Рассмотрим следующую задачу (в свертках по t):

$$T_s(t, M)\,u_j = \sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(t, M) * \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} - \rho(M) \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = 0, \quad M \in H \quad (t>0) \tag{2.17}$$

$$\pi_s(t, M)\,u_j = \sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(t, M) \frac{\partial u_j(t, M)}{\partial x_k} \cos x_l n\,(M_0) \xrightarrow[i]{} -F_s(t, M_0) \tag{2.18}$$

$$M_0 \in h \ (t>0), \ u_s = 0, \ M \in H \ (t<0) \tag{2.19}$$

$$A_{sj}^{(kl)}(t, M) = \lambda_{sj}^{(kl)}(M) \left[\delta(t) - \int\limits_0^{+\infty} f_{sj}^{(kl)}(\tau)\,\tau^{-1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\,d\tau\right) \right] \theta(t)$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f_{sj}^{(kl)}(\tau)\,d\tau = 1, \quad F(t, M_0) = 0 \quad (t<0), \quad M_0 = (x_0, y_0)$$

где функции $A(t, M)$ и $\rho(M)$ имеют непрерывные производные по x, y в области $H+h$ при $t \geqslant 0$.

Снова предположим, что в области $H+h$ при любом выборе системы декартовых координат выполняются все условия п. 1, за исключением (1.27), которое заменено условием (1.29).

Заменим переменное M параметрической точкой $M_0 \in h$ в коэффициентах $A_{sj}^{(kl)}(t, M)$ и $\rho(M)$ и найдем соответствующую функцию Грина $G_{jq}(t, M-M_0, M_0, n(M_0))$ в полуплоскости $(MM_0, n(M_0))>0$ с начальным условием (2.19) и с граничным

$$\sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)}(t, M_0) \frac{\partial u_j(t, M)}{\partial x_k} \cos x_l n(M_0) = -\delta_{sq}\delta(MM_0, s(M_0))\,\delta(t) \tag{2.20}$$

Допустим, что функция Грина $G_{jq}(t, M-M_0, M_0, n(M_0))$, продолженная в смежную полуплоскость $(MM_0, n(M_0))<0$, непрерывна вместе со своими производными до второго порядка по x, y на прямой $(MM_0, n(M_0))=0$. Найдем вспомогательное решение системы (2.17). Обозначим его через $g_{jq}(t, M, M_0)$ $(M_1=x_1, y_1)$ (W — свертка по t):

$$g_{jq}(t, M, M_0) = G_{jq}(t, M-M_0, M_0, n(M_0)) + W_{jq}(t, M, M_0) \tag{2.21}$$

$$W_{jq} = \iint_H \sum_p G_{jp}(t, M-M_1, M_1, n(M_1))\, \varphi_{pq}(t, M_1, M_0)\, dx_1\, dy_1$$

где $n(M_1)$ $(M_1 \in H)$ — любое непрерывное продолжение $n(M')$ $(M' \in h)$.

Формальным преобразованием Фурье по t получим $(\gamma_2 \gg 1)$:

$$g_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) = G_{jq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0, n(M_0)) + W_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) \tag{2.22}$$

$$W_{jq}^{\vee} = \iint_H \sum_p G_{jp}^{\vee}(\gamma, M-M_1, M_1, n(M_1)) \ast \varphi_{pq}^{\vee}(\gamma, M_1, M_0)\, dx_1\, dy_1$$

Функцию $\varphi_{pq}^{\vee}$ найдем подстановкой $g_{jq}^{\vee}$ в систему уравнений

$$T_s^{\vee}(\gamma, M)\, u_j^{\vee} = 0 \tag{2.23}$$

Тогда получим систему интегральных уравнений $(\gamma_2 \gg 1)$:

$$0 = J_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) - 2\varphi_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) + \\ + \iint_{H(M_1)} \sum_p J_{sp}^{\vee}(\gamma, M, M_1)\, \varphi_{pq}^{\vee}(\gamma, M_1, M_0)\, dH(M_1) \tag{2.24}$$

$$J_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) = T_s^{\vee}(\gamma, M)\, G_{jq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0, n(M_0))$$

В силу ограниченности производных $A_{sj}^{(kl)\vee}(\gamma, M)$ и $\rho(M)$ будем иметь

$$|J_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)| < \frac{\text{const}}{r_0} [\theta(1-|\gamma| r_0) + \theta(|\gamma| r_0 - 1) \exp(-A|\gamma| r_0)] \tag{2.25}$$

Умножая (2.24) на $J_{\sigma s}^{\vee}(\gamma, N, M)$, суммируя по s и интегрируя по $H(M)$, получим систему интегральных уравнений, эквивалентную (2.24) с итерированным фредгольмовым ядром $J_{\sigma q}^{(2)\vee}(\gamma, N, M_0)$. Решение данной системы $\varphi_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)$ можно найти методом последовательных приближений. Из оценки $\varphi_{pq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)$ (и ее первых производных по x, y), основанной на формуле (2.25), будет следовать законность преобразования Фурье (2.22) (и формулы скачка (2.24), поскольку она верна для оператора $T^{\vee}(\gamma, M_0)$ над $G^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0, n(M_0))$).

Подставляя $\varphi_{pq}^{\vee}(\gamma, M_1, M_0)$ в (2.22), получим $g_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)$. Формула (2.22) оценки для $\varphi_{pq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)$ и ее первых производных по x, y сохраняют силу при условии (1.27) (более слабом в сравнении с (1.29) в области $\arg\gamma \in (\delta, \pi-\delta)$.

Далее получим фурье-обращение $g_{jq}^{\vee}$:

$$g_{jq}(t, M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_E \overline{g_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)} \exp(i\gamma t)\, d\gamma$$

Решение $u_j(t, M)$ задачи (2.17)—(2.19) будем теперь искать в виде

$$u_j(t, M) = \int\limits_{h(M_0)} \sum_q g_{jq}(t, M, M_0) * \Psi_q(t, M_0)\, dh(M_0) \tag{2.26}$$

или в двойственном пространстве (при $\gamma_2 \gg 1$):

$$u_j^{\vee}(\gamma, M) = \int\limits_{h(M_0)} \sum_q g_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)\, \Psi_q^{\vee}(\gamma, M_0)\, dh(M_0) \tag{2.27}$$

$\Psi_q^{\vee}$ находится из условия (2.18), которое приводит к системе интегральных уравнений

$$-F_s^{\vee}(\gamma, M) = \int\limits_{h(M_0)} \sum_q L_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)\, \Psi_q^{\vee}(\gamma, M_0)\, dh(M_0) - \Psi_s^{\vee}(\gamma, M) \tag{2.28}$$

$$L_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) = \sum_{jkl} A_{sj}^{(kl)\vee}(\gamma)\, \frac{\partial g_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)}{\partial x_k} \cos x_l n(M)$$

Согласно (2.22), функция $G_{jq}^{\vee}$ является «главной» частью $g_{jq}^{\vee}$, поэтому $L_{sq}^{\vee}$ и $K_{sq}^{\vee}$ имеют общий порядок и, следовательно, общую оценку (см. (2.9)).

Таким образом $\Psi_q^{\vee}(\gamma, M_0)$ может быть найдено по формуле, аналогичной (2.11). Подставляя $\Psi_q^{\vee}(\gamma, M_0)$ в формулу (2.27), получим $u_j^{\vee}(\gamma, M)$.

Формула (2.27) сохраняется также при условии (1.27), если γ принадлежит области $\{\arg\gamma \in (\delta, \pi-\delta), 0<\delta<\pi/2, |\gamma| \gg 1\}$.

Далее находим фурье-обращение $u_j^{\vee}$ в виде

$$u_j(t, M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_E \overline{u_j^{\vee}(\gamma, M) \exp(i\gamma t)\, d\gamma} \tag{2.29}$$

где $u_j(t, M)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка в области $M \in H(t>0)$, за исключением характеристик, где возможен разрыв непрерывности $u_j(t, M)$ и ее производных по x, y, t; причем функция

$$\sum_{jkl} A_{sj}^{kl}(t, M) * \frac{\partial u_j(t, M)}{\partial x_k} \cos x_l n(M_0)$$

непрерывна в любом плоском конусе, принадлежащем H с вершиной в любой точке $M_0 \in h$ при любом $t>0$.

Единственность решения в классе функций $u_j = 0\{\exp(\lambda t)\}$, $t \to +\infty$, $\lambda = \mathrm{const}$ доказывается методом Гольмгрена.

Если G_{jq} или ее производные разрывны на прямой $(MM_0, n(M_0)) = 0$, то решение задачи, двойственной (2.17)—(2.19), также может быть получено в виде (2.27), но при ином значении вспомогательной функции g_{jq} (ср. [7]).

$$g_{jq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) = G_{jq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, n(M_0)) + W_{jq}^{(0)\vee}(\gamma, M, M_0)$$

$$W_{jq}^{(0)\vee} = \iint\limits_{H(N)} \sum_s \varepsilon_{js}^{\vee}(\gamma, M, N)\, T_s^{\vee}(\gamma, N)\, G_{j_1 q}^{\vee}(\gamma, N - M_0, M_0, n(M_0))\, dH_{(N)}$$

где $\varepsilon_{js}^{\vee}$ — фундаментальное решение системы, которое можно построить в следующем виде:

$$\varepsilon_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0) = e_{sq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0) + W_{sq}^{(1)\vee}(\gamma, M, M_0)$$

$$W_{sq}^{(1)\vee}(\gamma, M, M_0) = \iint\limits_{H(M_1)} \sum_p e_{sp}^{\vee}(\gamma, M-M_1, M_1)\, \varphi_{pq}^{\vee}(\gamma, M_1, M_0)\, dH(M_s)$$

Здесь $e_{sq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0)$ — фундаментальное решение системы, полученной из (2.23) заменой M на M_0 в коэффициентах $A_{sj}^{(kl)}(\gamma, M)$ и $\rho(M)$.

Оценка для $e_{sq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0)$ идентична оценке для $G_{sq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0, n(M_0))$ с точностью до постоянного сомножителя. Действительно

$$e_{sq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_{sq}(\alpha, \beta, 1/(i\gamma))}{d(\alpha, \beta, 1/(i\gamma))} \times$$

$$\times \exp(i\gamma[\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)]\, d\beta \quad (y \gtrless y_0)$$

$$d(\alpha, \beta, 1/(i\gamma)) = \det\left(\left\| \sum_{kl} A_{sj}^{(kl)}(\gamma, M_0)\, \alpha_k \alpha_l \right\| - \rho(M_0)\, I\right), \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \beta$$

Вычисляя внутренний интеграл по β методом вычетов, получим

$$e_{sq}^{\vee}(\gamma, M-M_0, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_k \Psi_{sq}^{(k)}\left(\alpha, \frac{1}{i\gamma}\right) \times$$

$$\times \exp\left(i\gamma\left[\alpha(x-x_0) + \beta_k\left(\alpha, \frac{1}{i\gamma}\right)(y-y_0)\right] d\alpha,\right.$$

$$\operatorname{Im}\gamma\alpha(x-x_0) \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\gamma\beta_k(\alpha, 1/(i\gamma))(y-y_0) \geqslant 0 \quad (|\alpha| \geqslant 0) \quad (k=1, 2)$$

$$\Psi_{sq}^{(k)}\left(\alpha, \frac{1}{i\gamma}\right) = \sum \operatorname{Res}\left\{\frac{d_{sq}(\alpha, \beta, 1/(i\gamma))}{d(\alpha, \beta, 1/(i\gamma))} \exp(i\gamma\beta(y-y_0))\right\}$$

$$(\beta = \beta_k(\alpha, 1/(i\gamma)))$$

Далее, методом перевала находится требуемая оценка. Подстановкой $\varepsilon_{sq}^{\vee}(\gamma, M, M_0)$ в систему (2.23) получим систему интегральных уравнений (относительно φ_{pq}), аналогичную системе (2.24).

Автор выражает благодарность В. А. Боровикову, Б. Р. Вайнбергу и В. Б. Лидскому за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F.* Elastic waves in layred media. N. Y.: Mc Graw-Hill, 1957. 380 p.
2. *Гоголадзе В. Г.* Некоторые теории задачи наследственной упругости.— Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1938, № 87, с. 1—28.
3. *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, с. 79—92.
4. *Брук С. З.* Задача Лэмба в вязкоупругой полуплоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 56—63.
5. *Chwalczyk F., Rafa T., Wlodarczyk E.* Propagation of two-dimensional non-stationary stress waves in semiinfinite vicoelastic body, produced by a normal load moving over the surface wit subseismic volocity.— Proc. Vibr. problem Polon. Acad. Sci., 1972, v. 13, No. 3, p. 241—257.
6. *Шапиро З. Я.* Об общих задачах для уравнений эллиптического типа.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1953, т. 17, вып. 6, с. 539—562.
7. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Укр. матем. ж., 1953, т. 5, № 2, с. 123—151.

Москва

Поступила в редакцию
16.VII.1984