МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1985

УДК 539.3.01

ОТСЛОИВШЕЕСЯ ВКЛЮЧЕНИЕ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

СМЕТАНИН Б. И., СОБОЛЬ Б. В.

Рассматривается осесимметричная задача о равновесии упругого полупространства, содержащего тонкое круговое жесткое включение (анкер). Плоскость, в которой расположено это включение, параллельна границе полупространства. К включению приложена нагрузка, вызвавшая его смещение к границе, причем одна из граней включения отслоилась от упругой среды. Задача сводится к решению системы интегральных уравнений. Решение этой системы строится с использованием метода, развитого в [1].

1. Случай центрально приложенной к включению силы. Пусть (r,φ,z) — цилиндрическая система координат. В упругом полупространстве $z\leqslant h$. В плоскости $z=0$ при $0\leqslant r\leqslant a$ расположена тонкая жесткая гладкая круговая пластинка радиуса a. К центру пластинки приложена направленная вдоль оси z сила P, вызвавшая поступательное перемещение ее на величину δ. Нижняя грань пластинки отслоилась от среды. Граница полупространства свободна от нагрузки. Снабдим все функции, относящиеся к $0\leqslant z\leqslant h$ и $-\infty<z\leqslant 0$, индексами 1 и 2 соответственно. Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{z1}=\tau_{rz1}=0\ (z=h,\ 0\leqslant r<\infty),\ u_1=u_2,\ w_1=w_2$$

$$\sigma_{z1}=\sigma_{z2},\ \tau_{rz1}=\tau_{rz2}\ (z=0,\ a\leqslant r<\infty),\ w_1=\delta$$

$$\tau_{rz1}=0\ (z=+0,\ 0\leqslant r\leqslant a),\ \sigma_{z2}=\tau_{rz2}=0\ (z=-0,\ 0\leqslant r\leqslant a) \tag{1.1}$$

Перемещения и напряжения при $z\to-\infty$ исчезают. В (1.1) и далее u, v, w — проекции вектора перемещения на оси r, φ, z соответственно, σ_z, τ_{rz}, $\tau_{\varphi z}$ — компоненты тензора напряжений. Для неизвестных скачков нормальных напряжений и производных от компонент вектора перемещений при $z=0$, $0\leqslant r\leqslant a$ введем обозначения:

$$\sigma_{z1}-\sigma_{z2}=\theta s(r),\ \partial[r(u_1-u_2)]/\partial r=r\psi(r)$$

$$\partial(w_1-w_2)/\partial r=\omega(r),\ \theta=\mu(1-\nu)^{-1} \tag{1.2}$$

μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Осесимметричное общее решение уравнений Ламе возьмем в виде

$$u_i(r,z)=\int_0^\infty \xi^3\,[(A_i+B_i+B_i\xi z)e^{\xi z}+(-C_i+D_i-D_i\xi z)e^{-\xi z}]\,J_1(\xi r)\,d\xi$$

$$w_i(r,z)=\int_0^\infty \xi^3\,\{[-A_i+2(1-2\nu)B_i-B_i\xi z]e^{\xi z}-$$

$$-[c_i+2(1-2\nu)D_i+D_i\xi z]e^{-\xi z}\}\,J_0(\xi r)\,d\xi\quad (i=1,2),\quad c_2=D_2=0 \tag{1.3}$$

В (1.3) $J_n(z)$ — функция Бесселя. Произвольные функции A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, D_1 с помощью граничных условий (1.1) и формул закона Гука могут быть выражены через преобразования Ханкеля функций $s(r)$, $\omega(r)$ и $\psi(r)$

$$S(\xi)=\int_0^a rs(r)\,J_0(\xi r)\,dr,\quad \Omega(\xi)=\int_0^a r\omega(r)\,J_1(\xi r)\,dr \tag{1.4}$$

$$\Psi(\xi)=\int_0^a r\psi(r)\,J_0(\xi r)\,dr$$

Граничные условия примут вид

$$\int_0^\infty \Big\{\frac{\varkappa}{1-\nu}S(\xi)+2(1-2\nu)\Psi(\xi)+4(1-\nu)\Omega(\xi)+ \tag{1.5}$$

$$+\Big[\frac{(5-12\nu+8\nu^2+2\varkappa\xi h+2\xi^2h^2)S(\xi)}{1-\nu}+4((1-\nu)(1+2\xi h)+\xi^2h^2)\Omega(\xi)-$$

$$-2((1-2\nu)(1-2\xi h)-2\xi^2h^2)\Psi(\xi)\Big]e^{-2\xi h}\Big\}J_0(\xi r)\,d\xi=-8(1-\nu)\delta$$

$$(\varkappa=3-4\nu)$$

$$\int_0^\infty\Big\{S(\xi)-\Omega(\xi)+\Big[\Big(1+2\xi h+\frac{\xi^2h^2}{1-\nu}\Big)S(\xi)+(1+2\xi h+2\xi^2h^2)\Omega(\xi)+$$

$$+2\xi^2h^2\Psi(\xi)\Big]e^{-2\xi h}\Big\}\xi J_0(\xi r)\,d\xi=0 \tag{1.6}$$

$$\int_0^\infty\Big\{\frac{1-2\nu}{1-\nu}S(\xi)-2\Psi(\xi)-\Big[\frac{(1-2\nu)(1-2\xi h)-2\xi^2h^2}{1-\nu}S(\xi)-$$

$$-4\xi^2h^2\Omega(\xi)-2\Psi(\xi)(1-2\xi h+2\xi^2h^2)\Big]e^{-2\xi h}\Big\}\xi J_1(\xi r)\,d\xi=0$$

Второе и третье уравнения (1.5) проинтегрируем по r. Складывая затем третье уравнение, умноженное на $(1-2\nu)$, с первым и возвращаясь к оригиналам, получим систему интегральных уравнений

$$\int_0^a ts(t)\,k_{00}^1(t,r)\,dt+\int_0^a t\omega(t)\,k_{01}^2(t,r)\,dt+\int_0^a t\psi(t)\,k_{00}^3(t,r)\,dt=$$

$$=-2\delta-(1-2\nu)/2C\quad(0\leqslant r<a)$$

$$\int_0^a ts(t)\,k_{10}^1(t,r)\,dt-\int_0^a t\omega(t)\,k_{11}^4(t,r)\,dt+\int_0^a t\psi(t)\,k_{10}^3(t,r)\,dt=0\quad(0\leqslant r<a)$$

$$\int_0^a ts(t)\,k_{00}^5(t,r)\,dt+\int_0^a t\omega(t)\,k_{01}^3(t,r)\,dt-\int_0^a t\psi(t)\,k_{00}^6(t,r)\,dt=-C(1-\nu)$$

$$(0\leqslant r<a)$$

$$k_{ij}^m(t,r)=\int_0^\infty L_m(\xi)\,J_i(\xi r)\,J_j(\xi t)\,d\xi,\quad m=1-6\quad(i,j=0,1) \tag{1.7}$$

$$L_1(\xi)=L_+(\xi,\nu),\ L_2(\xi)=L_+(\xi,{}^1/_2),\ L_3(\xi)=2(\xi h)^2e^{-2\xi h}$$

$$L_4(\xi)=L_-(\xi,{}^1/_2),\ L_5=L_-(-\xi,{}^3/_2-\nu),\ L_6=L_-(-\xi,{}^1/_2)$$

$$L_\pm(\xi,\eta)=1\pm(1+2\xi h+\xi^2h^2/(1-\eta))\,e^{-2|\xi|h}$$

C — неизвестная постоянная. Введем функции $p(x)$, $q(x)$ и $g(x)$

$$s(r)=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^a\frac{xp(x)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}},\quad \omega(r)=-\frac{d}{dr}\int\limits_r^a\frac{q(x)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\psi(r)=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^a\frac{xg(x)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}} \tag{1.8}$$

Доопределим эти функции в область отрицательных значений аргумента

$$p(x)=p(-x),\ q(x)=-q(-x),\ g(x)=g(-x)\ (-a\leqslant x\leqslant a) \tag{1.9}$$

С помощью методики [1] (1.6) преобразуется к системе интегральных уравнений относительно функций $p(x)$, $q(x)$ и $g(x)$:

$$\int\limits_{-a}^{a}p(s)\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x-s)+\frac{4h^3(x-s)}{(1-\nu)R^2}+\frac{2h(x-s)}{R}+\operatorname{arctg}\frac{x-s}{2h}\right]ds+$$
$$+\int\limits_{-a}^{a}q(s)\left[\ln\frac{1}{|x-s|\sqrt{R}}+\frac{2h^2(8h^2+3R)}{R^2}\right]ds+8h^3\int\limits_{-a}^{a}g(s)\frac{x-s}{R^2}\,ds=$$
$$=-2x[2\delta+C(1-2\nu)/2],\quad |x|\leqslant a \tag{1.10}$$

$$\int\limits_{-a}^{a}p(s)\left[\ln\frac{1}{|x-s|\sqrt{R}}+\frac{h^2(8h^2-R)}{(1-\nu)R^2}+\frac{4h^2}{R}\right]ds+$$
$$+\int\limits_{-a}^{a}q(s)\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x-s)-\frac{2h(x-s)}{R}\left(1+\frac{4h^2}{R}\right)-\operatorname{arctg}\frac{x-s}{2h}\right]ds+$$
$$+2h^2\int\limits_{-a}^{a}g(s)\frac{8h^2-R}{R^2}\,ds=\mathrm{const},\quad |x|\leqslant a$$

$$\int\limits_{-a}^{a}\left[\frac{1-2\nu}{1-\nu}p(s)-2g(s)\right]\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x-s)+\frac{2h(x-s)}{R}-\operatorname{arctg}\frac{x-s}{2h}\right]ds+$$
$$+8h^3\int\limits_{-a}^{a}\left[\frac{p(s)}{1-\nu}+2g(s)\right]\frac{(x-s)}{R^2}\,ds+4h^2\int\limits_{-a}^{a}q(s)\frac{8h^2-R}{R^2}\,ds=$$
$$=-4xC(1-\nu),\quad |x|\leqslant a$$

$$R=R(x-s,h)\equiv(x-s)^2+4h^2$$

В (1.10) перейдем к безразмерным переменным по формулам: $s=a\xi$, $x=a\xi$. Складывая и вычитая первые два уравнения, преобразуем их:

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_{-1}^{1}[p(a\zeta)+q(a\zeta)]\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\xi-\zeta)+\ln\frac{1}{|\xi-\zeta|}\right]d\zeta=$$
$$=F_+(\xi)+F_-(\xi),\quad |\xi|\leqslant 1 \tag{1.11}$$

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_{-1}^{1}[p(a\zeta)-q(a\zeta)]\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\xi-\zeta)-\ln\frac{1}{|\xi-\zeta|}\right]d\zeta=F_+(\xi)-F_-(\xi),$$
$$|\xi|\leqslant 1 \tag{1.12}$$

где функции $F_+(\xi)$ и $F_-(\xi)$ являются, соответственно, четной и нечетной. Используя свойство четности либо нечетности функций, входящих в (1.11), (1.12), можно показать, что эти уравнения преобразуются одно в другое.

Решение полученных систем интегральных уравнений будем строить с помощью метода ортогональных полиномов. Сумму функций p и q представим в виде

$$p(a\xi)+q(a\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}X_mW_m(\xi),\qquad W_m(\xi)=\frac{(1+\xi)^{1/4}}{(1-\xi)^{1/4}}P_m^{(-1/4,1/4)}(\xi)\tag{1.13}$$

Здесь $P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ – полиномы Якоби. Из (1.13) с учетом (1.9) имеем

$$p(a\xi)-q(a\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}X_mW_m(-\xi),\qquad p(a\xi)={}^1/_2\sum_{m=0}^{\infty}X_m[W_m(\xi)+W_m(-\xi)]\tag{1.14}$$

$$q(a\xi)={}^1/_2\sum_{m=0}^{\infty}X_m[W_m(\xi)-W_m(-\xi)]\tag{1.15}$$

Третью функцию g будем искать в виде

$$g(a\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}Y_n[W_m(\xi)+W_m(-\xi)]\tag{1.16}$$

Внося (1.13)–(1.16) в (1.11) и третье уравнение (1.10), используя спектральное соотношение [1]

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-1}^{1}W_m(\zeta)\left[\frac{\pi\,\mathrm{sign}(\xi-\zeta)}{2}+\ln\frac{1}{|\xi-\zeta|}\right]d\zeta=\pi\sqrt{2}\,P_m^{(1/4,-1/4)}(\xi),$$

$$|\xi|\leqslant 1\qquad (m=0,1,2,\ldots)\tag{1.17}$$

и процедуру метода ортогональных полиномов, получим систему для определения неизвестных коэффициентов X_n и Y_n

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}h_nX_n+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}X_m+\sum_{m=0}^{\infty}b_{nm}Y_m+\left[2\delta+C\frac{1-2\nu}{2}\right]\gamma_n=0\tag{1.18}$$

$$h_n\left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}X_n-2Y_n\right]+\sum_{m=0}^{\infty}c_{nm}X_m+\sum_{m=0}^{\infty}d_{nm}Y_m+\frac{4}{\pi}C(1-\nu)r_n=0\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

Коэффициенты системы (1.18) вычисляются по формулам

$$h_n=\frac{\pi(4n+1)!!}{\sqrt{2}\,4^{2n}(n!)^2(2n+1)},\qquad \gamma_n=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\delta_{n0}\tag{1.19}$$

$$r_n=\frac{2(4n-1)!!}{4^nn!}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k(n+k)!}{(4k-1)!!(n-k)!(k+1)!}\right]\qquad (n\neq0;\ r_0=2)$$

$$a_{nm}=(-1)^n\int_{-1}^{1}W_n(-\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1}W_m(\zeta)[f_1(\xi-\zeta)+f_1(\xi+\zeta)+f_2(\xi-\zeta)-f_2(\xi+\zeta)]\,d\zeta$$

$$b_{nm}=(-1)^n\int_{-1}^{1}W_n(-\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1}W_m(\zeta)[f_3(\xi-\zeta)+f_3(\xi+\zeta)]\,d\zeta$$

$$c_{nm}={}^1/_2\int_{-1}^{1}P_n^{(-1/4,1/4)}(\xi)\left\{\frac{1-2\nu}{1-\nu}W_m(-\xi)+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} W_m(\zeta)\left[f_4(\xi-\zeta)+f_4(\xi+\zeta)+f_5(\xi-\zeta)-f_5(\xi+\zeta)\right]d\zeta\Bigg\}d\xi$$

$$d_{nm}=2\int_{-1}^{1} P_n^{(-1/4,1/4)}(\xi)\left\{-W_m(-\xi)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} W_m(\zeta)\left[f_6(\xi-\zeta)+f_6(\xi+\zeta)\right]d\zeta\right\}d\xi$$

$$\varepsilon f_1(t\varepsilon)=2(1-\nu)^{-1}(t^3-6t^2-12t+8)H^3-(t^3+12t-16)H^2$$

$$\varepsilon f_2(t\varepsilon)=-(t^5+20t^3-8t^2+128t+96)H^3$$

$$\varepsilon f_3(t\varepsilon)=2(t^3-6t^2-12t+8)H^3,\quad H=(t^2+4)^{-1}$$

$$\varepsilon f_4(t\varepsilon)=-4(1-\nu)^{-1}[2(3t^2-4)H+(1-2\nu)t^2]H^2$$

$$\varepsilon f_5(t\varepsilon)=8(t^3-12t)H^3,\quad \varepsilon f_6(t\varepsilon)=4(t^4-2t^2+8)H^3$$

где δ_{mn} – символ Кронекера, $\varepsilon=h/a$. Постоянная C и связь P с δ определяются из условий

$$\int_0^a r\psi(r)\,dr=0,\qquad -2\pi\int_0^a r\sigma_z(r,+0)\,dr=P \tag{1.20}$$

С помощью (1.2), (1.8) условия (1.20) преобразуются:

$$\int_0^a g(x)=0,\qquad -2\pi\theta\int_0^a p(x)\,dx=P \tag{1.21}$$

Внося (1.14), (1.16) в (1.21) и учитывая условия ортогональности полиномов Якоби [2], получим

$$Y_0=0,\quad X_0=-\sqrt{2}(\pi^2 a\theta)^{-1}P \tag{1.22}$$

Контактные напряжения на пластинке σ_z с учетом (1.2), (1.8), (1.14) определяются по формуле

$$\sigma_z(r,+0)=-\frac{\theta}{2r}\sum_{m=0}^{\infty} X_m\frac{d}{dr}\int_r^a\left[W_m\left(\frac{x}{a}\right)+W_m\left(-\frac{x}{a}\right)\right]\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}} \tag{1.23}$$

Из (1.23) с использованием значения интеграла 3.166 (18) [2] получим

$$N=-\frac{A\theta}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{1/4}\sum_{m=0}^{\infty} X_m P_m^{(-1/4,1/4)}(1) \tag{1.24}$$

$$N=-\lim_{r\to a-0}(a-r)^{3/4}\sigma_z(r,+0),\quad A=E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

2. Задача о кручении включения. Пусть верхняя грань пластинки жестко скреплена с упругой средой, а нижняя гладкая грань пластинки отслоилась. К пластинке приложен крутящий момент M, под действием которого она повернулась вокруг оси z на угол α. Граница $z=h$ свободна от нагрузки. Граничные условия имеют вид

$$v=-\alpha r\ (z=+0,\ 0\leqslant r\leqslant a),\ \tau_{\varphi z}=0\ (z=-0,$$
$$0\leqslant r\leqslant a),\ \tau_{\varphi z}=0\ (z=h,\ 0\leqslant r<\infty) \tag{2.1}$$

Перемещения и напряжения при $z\to-\infty$ исчезают. Аналогично п. 1 получим систему интегральных уравнений

$$\int_0^a t\tau(t)\,k_{11}{}^7(t,r)\,dt - \int_0^a t\sigma(t)\,k_{10}{}^7(t,r)\,dt = 2\alpha r \quad (0 \leqslant r \leqslant a) \tag{2.2}$$

$$\int_0^a t\tau(t)\,k_{01}{}^7(t,r)\,dt + \int_0^a t\sigma(t)\,k_{00}{}^8(t,r)\,dt = D \quad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

Здесь D — постоянная, подлежащая определению, $k_{ij}{}^m(t, r)$ определяются формулой (1.7)

$$L_7(\xi) = 1 + e^{-2\xi h}, \quad L_8(\xi) = 1 - e^{-2\xi h}, \quad \tau_{\varphi z}(r, +0) = \mu\tau(r) \tag{2.3}$$

$$d[r(v_1 - v_2)]/dr = r\sigma(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant a,\ z = 0)$$

Способом [1] (2.2) преобразуется

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-1}^{1}\chi(\zeta)\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\xi - \zeta) + \ln\frac{1}{|\xi - \zeta|}\right]d\zeta =$$

$$= 8\alpha\xi a + 2D + \int_{-1}^{1}\chi(\zeta)\,k(\xi, \zeta, \varepsilon)\,d\zeta, \quad |\xi| \leqslant 1 \tag{2.4}$$

$$k(\xi, \zeta, \varepsilon) = \frac{\xi - \zeta}{4\varepsilon^2 + (\xi - \zeta)^2} + \frac{2\varepsilon}{4\varepsilon^2 + (\xi + \zeta)^2}$$

$$\chi(\xi) = p_1(a\xi) + q_1(a\xi); \quad p_1(-x) = p_1(x), \quad q_1(-x) = -q_1(x) \tag{2.5}$$

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{x p_1(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad \tau(r) = -\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{q_1(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$\chi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m W_m(\xi) \tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.7) получим

$$p_1(a\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} Z_m[W_m(\zeta) + W_m(-\zeta)], \qquad q_1(a\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} Z_m[W_m(\zeta) - W_m(-\zeta)] \tag{2.8}$$

Применение к (2.4) процедуры метода ортогональных полиномов с использованием формул (1.17) и (2.7) приводит к бесконечной линейной алгебраической системе для определения коэффициентов Z_n, где h_n и γ_n даются формулами (1.19)

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} h_n Z_n - \sum_{m=0}^{\infty} e_{nm} Z_m - 4\alpha a t_n - D\gamma_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

$$t_n = h_1\delta_{n1} - \frac{1}{4}h_0\delta_{n0}, \qquad e_{nm} = \frac{(-1)^n}{2}\int_{-1}^{1} W_n(\xi)\,d\xi \int_{-1}^{1} W_m(\zeta)\,k(-\xi, \zeta, \varepsilon)\,d\zeta$$

Постоянная D и связь $M(\alpha)$ определяются из условий

$$M=2\pi\mu\int_0^a r^2\tau(r)\,dr, \qquad \int_0^a r\sigma(r)\,dr=0 \tag{2.10}$$

Подстановка (2.6) в (2.10) дает

$$M=4\pi\mu\int_0^a xq_1(x)\,dx, \qquad \int_0^a p_1(x)\,dx=0 \tag{2.11}$$

Из (2.8), (2.9), (2.11) с учетом (1.13) и условий ортогональности полиномов Якоби следует

$$Z_0=0, \quad Z_1=8\sqrt{2}(5\pi^2a^2\mu)^{-1}M \tag{2.12}$$

Контактные напряжения на пластинке $\tau_{\varphi z}$ и коэффициент их интенсивности с учетом (2.3), (2.6) и (2.9) определяются по формулам

$$\tau_{\varphi z}(r,+0)=-\frac{\mu}{2}\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\frac{d}{dr}\int_r^a\left[W_m\left(\frac{x}{a}\right)-W_m\left(-\frac{x}{a}\right)\right]\frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$(0\leqslant r\leqslant a) \tag{2.13}$$

$$N_1=\frac{\mu A}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{1/4}\sum_{m=1}^{\infty}Z_mP_m^{(-1/4,\,1/4)}(1), \qquad N_1=\lim_{r\to a-0}(a-r)^{3/4}\tau_{\varphi z}(r,+0) \tag{2.14}$$

3. Анализ полученных результатов. После подстановки X_0 и Y_0 в виде (1.22) в систему уравнений (1.18) неизвестными в полученной системе будем считать X_m, Y_m $(m=1,2,\ldots)$, C и δ. В результате решения этой системы указанные коэффициенты будут выражены через X_0. После подстановки Z_0 и Z_1 в виде (2.12) в (2.9) и исключения D неизвестными в полученной системе уравнений будем считать Z_m $(m=2,3,\ldots)$ и α. При этом система примет вид

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}h_nZ_n-\sum_{m=1}^{\infty}e_{nm}Z_m-4\alpha ah_1\delta_{n1}=0 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.1}$$

В результате решения системы (3.1) коэффициенты Z_m и α будут выражены через известное Z_1.

При $\varepsilon\to\infty$ из полученных в пп. 1 и 2 формул следует известное решение [1] задачи об отслоившейся круглой пластинке в упругом пространстве, в частности

$$\delta_\infty=\frac{P}{2a\theta}\left[\frac{1}{\pi}-\frac{(1-2\nu)^2}{16(1-\nu)^2}\right], \qquad N_\infty=\frac{AP}{\sqrt{2}\,\pi^2a}\left(\frac{2}{a}\right)^{1/4} \tag{3.2}$$

$$\alpha_\infty=\frac{2M}{2\pi a^3\mu}, \qquad N_{1\infty}=\frac{3\sqrt{2}\,AM}{5\pi^2a^2}\left(\frac{2}{a}\right)^{1/4} \tag{3.3}$$

Решение преобразованной системы (1.18) и системы (3.1) при $\varepsilon<0$ осуществлялось методом редукции.

При этом справедливы следующие утверждения.

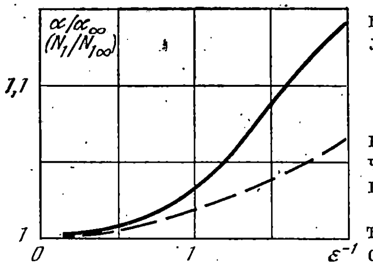
Лемма. Для коэффициентов e_{nm} бесконечной системы (2.9) при $\varepsilon>0$ имеет место оценка

$$|e_{nm}|\leqslant\frac{d}{(nm)^{3/2}}, \qquad d=\text{const} \qquad (n\geqslant1,\ m\geqslant1) \tag{3.4}$$

Для доказательства леммы к выражению для e_{nm} следует применить формулу интегрирования по частям по переменным ξ и ζ с учетом вытекающего из 8.960 [2] соотношения

$$W_n(x) = -\frac{1}{2n}\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{3/4}(1+x)^{3/4}P_{n-1}^{(3/4,3/4)}(x)\right]$$

и воспользоваться асимптотическим представлением полиномов Якоби 8.965 [2].



Из выражения (1.19), определяющего h_n, с использованием формулы Стирлинга, можно определить:

$$(n\sqrt{n}h_n)^{-1} \leqslant d_*/\sqrt{n}, \quad d_* = \text{const} \quad (n \geqslant 1) \qquad (3.5)$$

Теорема. Бесконечная система (2.9) квазивполнерегулярна при $\varepsilon > 0$. Если существует ее ограниченное решение, то последовательность Z_m принадлежит l_1.

Здесь l_1 – пространство числовых последовательностей $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots\}$, для которых сходится ряд $\Sigma|Z_m|$ $(m=1, 2, \ldots)$.

Доказательство теоремы учитывает полученные оценки аналогично доказательству теоремы 26.1 [3]. Квазивполнерегулярность бесконечной системы (1.18) аналогично предыдущему можно установить при $\varepsilon > 0$.

На фигуре сплошной линией представлена зависимость α/α_∞, а штриховой – зависимость $N_1/N_{1\infty}$ от ε^{-1} в задаче о кручении. По представленным графикам можно сделать вывод, что угловое перемещение α пластинки и концентрация касательных напряжений вблизи ее края при фиксированном значении момента M увеличиваются с уменьшением относительного расстояния ε пластинки от границы полупространства. В задаче о поступательном смещении включения качественный характер численных результатов аналогичен приведенным на фигуре.

Авторы благодарят В. М. Александрова за обсуждение результатов и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 10.IX.1984