

УДК 533.6.013.42

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АЭРОУПРУГОСТИ

АСТАНОВ И. С., БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ А. С., МОРОЗОВ В. И.

К проблемам аэроупругости относятся задачи создания и исследования динамических моделей летательного аппарата, учитывающих взаимное влияние аэродинамических, упругих и инерционных сил [1] и зависимость этого влияния от предыстории движения аппарата [2]. Классические подходы к решению проблем аэроупругости основаны на рассмотрении уравнений возмущенного движения относительно установившегося прямолинейного полета. Для изучения пространственного движения упругого аппарата необходим переход к нелинейным уравнениям, описывающим произвольные по величине линейные и угловые перемещения летательного аппарата как твердого тела. При этом для аэродинамических и упругих характеристик могут быть сохранены линейные зависимости [3]. Основные методы составления уравнений пространственного движения упругих конструкций изложены в [4].

В публикуемой работе рассматривается общий случай пространственного движения упругого летательного аппарата с грузами в нестационарном потоке газа. Получены нелинейные интегродифференциальные уравнения нестационарной аэроупругости. Приводятся формулы Коши для интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра, не разрешенных относительно производной. Приведенные формулы используются для анализа вопроса устойчивости по Ляпунову решений интегродифференциальных уравнений нестационарной аэроупругости при замене интегральных ядер приближенными функциями, учете нелинейности и параметров движения, явно зависящих от времени.

1. Уравнения пространственного движения деформируемого аппарата. Движение упругого летательного аппарата в атмосфере будем рассматривать относительно связанной с поверхностью Земли системы координат $O_1x_1y_1z_1$, которую будем считать инерциальной. С конструкцией аппарата свяжем прямоугольную систему координат $Oxyz$. Полагая, что аппарат в недеформированном состоянии имеет вертикальную плоскость симметрии, ось x направим вдоль корпуса аппарата в плоскости симметрии в сторону движения, ось y — по перпендикуляру к оси x , лежащему в плоскости симметрии и направленному вверх, ось z — по размаху крыла так, что оси x , y , z образуют правую тройку. Начало связанной системы координат не обязательно совпадает с центром масс C аппарата.

Радиус-вектор R_i произвольной точки в инерциальной системе координат представим в виде суммы $R_i = R_0 + r_i + u_i$, где R_0 — радиус-вектор начала связанной системы координат, r_i — радиус-вектор точки относительно связанных осей в недеформированном состоянии, u_i — вектор относительного перемещения точки при деформации тела.

Положение связанной системы координат при движении зависит от деформаций аппарата. Далее будем пользоваться средней системой координат [5], положение которой в произвольном состоянии определяется с помощью условий

$$\sum_{i=1}^N m_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i (r_i \times u_i) = 0 \quad (1.1)$$

где m_i — масса соответствующей точки, N — количество материальных то-

чек, схематизирующих аппарат и связанных между собой упругими связями.

При описании упругих свойств представим конструкцию летательного аппарата в виде идеального упругого тела с линейной зависимостью между упругими перемещениями и силами, принимая при этом гипотезу о естественном ненапряженном состоянии тела, согласно которой существующие до приложения нагрузок начальные напряжения в теле полагаются равными нулю. Деформаций считаем малыми по сравнению с размерами конструкции.

Внутренние упругие силы F_i связаны с деформациями всей системы соотношениями (k_{ij} — коэффициенты влияния жесткости [1]):

$$F_i = \sum_{j=1}^N k_{ij} u_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

Вектор относительных перемещений представим в виде ряда, соответствующего суперпозиции форм собственных колебаний свободной конструкции, и ограничимся в рассмотрении первыми N_1 формами колебаний

$$u_i = \sum_{l=1}^{N_1} \varphi_{li} q_l(t) \quad (1.3)$$

Здесь обобщенные координаты q_l — искомые безразмерные параметры, зависящие от времени.

Известно, что каждая форма собственных колебаний ортогональна движениям системы как твердого тела и остальным формам собственных колебаний. Эти условия имеют вид [6]

$$\sum_{i=1}^N m_i \varphi_{li} = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i (r_i \times \varphi_{li}) = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i \varphi_{ki} \cdot \varphi_{li} = \delta_{kl} M_l \quad (1.4)$$

где M_l — обобщенные массы, δ_{kl} — символ Кронекера ($k, l = 1, \dots, N_1$). Видно, что при деформациях (1.3) с учетом (1.4) выполняются условия (1.1). Кроме свойств (1.4), формы собственных колебаний удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i,j=1}^N k_{ij} (\varphi_{ki} \cdot \varphi_{lj}) = -\delta_{kl} M_l \Omega_l^2 \quad (k, l = 1, \dots, N_1) \quad (1.5)$$

где Ω_l — частоты собственных колебаний соответствующих форм.

Далее полагаем, что к упругой конструкции аппарата жестко прикреплены точечные грузы массы m_{i*} соответственно точке крепления. Запишем уравнения движения каждой точки в связанной системе координат

$$(m_i + m_{i*}) [V' + \Omega \times V + \Omega' \times (r_i + u_i) + \Omega \times (\Omega \times (r_i + u_i)) + u_i'' + 2\Omega \times u_i'] = (m_i + m_{i*}) g + P_i + T_i + F_i \quad (1.6)$$

Здесь Ω — угловая скорость и V — скорость начала связанной системы координат, P_i — внешние аэродинамические силы, действующие на точки конструкции, g — вектор ускорения силы тяжести, T_i — силы, характеризующие тягу двигателей.

Вводя дополнительно к (1.6) уравнения, полученные путем умножения (1.6) слева векторно на r_i и скалярно на φ_{li} , и проводя суммирование

по всем точкам конструкции, получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} & (M + M_*) (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) - \left(S^\circ + S_*^\circ + \sum_{k=1}^{N_1} S_{k*}^\circ g_k \right) \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \times \\ & \times \left(S^\circ + S_*^\circ + \sum_{k=1}^{N_1} S_{k*}^\circ g_k \right) \boldsymbol{\Omega} + \sum_{k=1}^{N_1} S_{k*} \ddot{q}_k - 2 \left(\sum_{k=1}^{N_1} S_{k*}^\circ \dot{q}_k \right) \boldsymbol{\Omega} = \\ & = (M + M_*) \mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} & (S^\circ + S_*^\circ) (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) + \left(J + J_* + \sum_{k=1}^{N_1} (J_k + J_{k*}) g_k \right) \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \\ & \times \left(J + J_* + \sum_{k=1}^{N_1} (J_k + J_{k*}) g_k \right) \boldsymbol{\Omega} + \sum_{k=1}^{N_1} J_{k*} \ddot{q}_k + 2 \sum_{k=1}^{N_1} (J_k + J_{k*}) \dot{q}_k \boldsymbol{\Omega} - \\ & - \left(\boldsymbol{\Omega} \cdot \sum_{k=1}^{N_1} \mathbf{J}_{k*} g_k \right) \boldsymbol{\Omega} = (S^\circ + S_*^\circ) \mathbf{g} + \mathbf{M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & S_{l*} \cdot (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) + \left[\mathbf{J}_{l*} + \sum_{k=1}^{N_1} (\mathbf{J}_{kl} + \mathbf{J}_{kl*}) g_k \right] \cdot \boldsymbol{\Omega} - \\ & - \boldsymbol{\Omega} \cdot \left[\mathbf{J}_l + \mathbf{J}_{l*} + \sum_{k=1}^{N_1} (\mathbf{J}_{kl} + \mathbf{J}_{kl*}) g_k \right] \boldsymbol{\Omega} + M_l \ddot{q}_l + \sum_{k=1}^{N_1} M_{kl*} \ddot{q}_k + \\ & + 2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \sum_{k=1}^{N_1} (\mathbf{J}_{kl} + \mathbf{J}_{kl*}) \dot{q}_k = S_{l*} \cdot \mathbf{g} + R_l - M_l \Omega_l^2 q_l \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i, \quad R_l = \sum_{i=1}^N \varphi_{li} \cdot \mathbf{P}_i \quad (l = 1, \dots, N_1)$$

Силу тяги двигателей $\mathbf{T} = \sum \mathbf{T}_i$ считаем постоянно направленной вдоль оси x . Входящие в уравнения (1.7) матричные (вида S°), векторные (\mathbf{S}) и другие величины определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} S^\circ &= \begin{vmatrix} 0 & -S_z & S_y \\ S_z & 0 & -S_x \\ -S_y & S_x & 0 \end{vmatrix}, & \underline{M}_{(*)} &= \sum_{i=1}^N m_{i(*)}, & M_{kl*} &= \sum_{i=1}^N m_{i*} \varphi_{ki} \cdot \varphi_{li} \\ S_*^\circ &= \sum_{i=1}^N m_{i(*)} r_i^\circ, & S_{k*} &= \sum_{i=1}^N m_{i*} \varphi_{ki} \\ J_{(*)} &= - \sum_{i=1}^N m_{i(*)} r_i^\circ r_i^\circ, & J_{k(*)} &= - \sum_{i=1}^N m_{i(*)} r_i^\circ \varphi_{ki}, & J_{kl(*)} &= - \sum_{i=1}^N m_{i(*)} \varphi_{ki} \varphi_{li}^\circ \\ J_{k*} &= \sum_{i=1}^N m_{i*} r_i^\circ \varphi_{ki}, & J_{kl(*)} &= \sum_{i=1}^N m_{i(*)} \varphi_{ki} \varphi_{li} \end{aligned} \quad (1.8)$$

С учетом (1.2) во втором уравнении (1.7) ввиду второго порядка малости относительно упругих перемещений опущен член

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = - \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \times \mathbf{F}_i = - \sum_{i,j=1}^N k_{ij} \mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j$$

При отсутствии грузов уравнения (1.7) принимают вид

$$M(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) - S^\circ \boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega} \times S^\circ \boldsymbol{\Omega} = M\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{T}$$

$$S^\circ (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) + \left(J + \sum_{k=1}^{N_1} J_k g_k \right) \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\Omega} \times \left(J + \sum_{k=1}^{N_1} J_k g_k \right) \boldsymbol{\Omega} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{N_1} J_k \dot{g}_k \boldsymbol{\Omega} = S^\circ \mathbf{g} + \mathbf{M}$$

$$M_l (\ddot{q}_l + \Omega_l^2 q_l) + 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \sum_{k=1}^{N_1} J_{kl} \dot{q}_k + \boldsymbol{\Omega}' \cdot \sum_{k=1}^{N_1} J_{kl} g_k - \boldsymbol{\Omega} \cdot \left(J_l + \sum_{k=1}^{N_1} J_{kl} g_k \right) \boldsymbol{\Omega} = R_l$$

$$(l = 1, \dots, N_1) \quad (1.9)$$

В таком виде можно составить уравнения движения и для системы с отличающимся от начального вариантом загрузки. При этом для каждого нового варианта необходимо использовать соответствующие ему формы собственных колебаний в разложениях (1.3) и вычислять заново коэффициенты (1.8). При изложенном выше подходе, в котором независимо от варианта грузов используются разложения (1.3) по одним и тем же базовым формам, получаются более сложные уравнения (1.7). Однако в них в явном виде выделены составляющие, зависящие от грузов. При изменении загрузки достаточно в уравнениях (1.7) изменить только эти составляющие, все остальные параметры оставляя неизменными. Это обеспечивает эффективное проведение на ЭВМ параметрических расчетов.

2. Нестационарные аэродинамические характеристики. Уравнения аэроупругости. Для получения замкнутой системы уравнений движения необходимо определить величины, входящие в правые части уравнений (1.7). Ориентацию связанных осей относительно земной системы координат определяем при помощи углов Эйлера ψ , θ , γ , где ψ — угол курса, θ — угол тангажа, γ — угол крена [3]. Проекции вектора \mathbf{g} на оси связанной системы координат примут вид

$$g_x = -g \sin \theta, \quad g_y = -g \cos \theta \cos \gamma, \quad g_z = g \cos \theta \sin \gamma \quad (2.1)$$

Проекция вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ определяются кинематическими уравнениями Эйлера

$$\Omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \theta, \quad \Omega_y = \dot{\theta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \theta \cos \gamma, \quad \Omega_z = \dot{\theta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \theta \sin \gamma \quad (2.2)$$

Ориентация аппарата относительно набегающего потока определяется углами атаки α и скольжения β . При полете в неподвижной относительно Земли атмосфере проекции вектора скорости связаны с углами атаки и скольжения и величиной скорости соотношениями

$$V_x = V \cos \alpha \cos \beta, \quad V_y = -V \sin \alpha \cos \beta, \quad V_z = V \sin \beta \quad (2.3)$$

Аэродинамические силы и моменты сил целесообразно записывать через их безразмерные коэффициенты

$$c_{x(y,z)} = R_{x(y,z)} / (qS), \quad m_{x(y,z)} = M_{x(y,z)} / (qSb), \quad c_l = R_l / (qSb) \quad (2.4)$$

где b — характерный размер аппарата, S — характерная площадь, $q = 0,5 \rho V^2$ — скоростной напор, ρ — плотность воздуха в невозмущенном потоке.

В задачах аэроупругости [1] и при исследовании устойчивости простейшего движения аппарата [3] скорость его перемещения принимается постоянной ($V = U_0$), при этом осуществляется переход к безразмерной форме записи уравнений движения путем введения безразмерного времени $\tau = U_0 t / b$ [2]. Аэродинамические коэффициенты (2.4) зависят от

совокупности кинематических параметров [2, 3]:

$$\varepsilon_j(\tau) \equiv \{\alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z; q_l, q_l; \delta_v, \delta_v; \Delta_\mu\} \quad (j=1, \dots, N_2)$$

где $\omega_{x(y, z)} = b\Omega_{x(y, z)}/U_0$ — безразмерные угловые скорости, δ_v — углы отклонения рулевых поверхностей, Δ_μ — параметры, характеризующие воздействие на летательный аппарат атмосферных порывов или потока за ударной волной. Дифференцирование ведется по безразмерному времени.

При определении аэродинамических сил в большинстве практических случаев можно ограничиться линейными подходами [2, 3]. Связь аэродинамических коэффициентов (2.4) с кинематическими параметрами устанавливается с помощью интегральных представлений, учитывающих нестационарность обтекания [2]

$$c_k = c_{0k} + \sum_{j=1}^{N_2} (c_k^{\varepsilon_j} \varepsilon_j(\tau) + \int_{-\infty}^{\tau} I_{c_k}^{\varepsilon_j}(\tau_1) \varepsilon_j(\tau - \tau_1) d\tau_1) \quad (2.5)$$

где $c_k \equiv \{c_1, \dots, c_{N_1}, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z\}$, c_{0k} — значения постоянных составляющих аэродинамических сил и моментов сил, $c_k^{\varepsilon_j}$ — коэффициенты аэродинамических производных, $I_{c_k}^{\varepsilon_j}(\tau)$ — нестационарные части переходных аэродинамических функций, рассчитываемые на основе численных методов.

Добавляя при необходимости уравнение для изменения высоты полета [3] и полагая известными законы отклонения рулевых поверхностей и изменения параметров Δ_μ , получаем замкнутую систему интегродифференциальных уравнений аэроупругости в безразмерном виде

$$A(x) \dot{x} = F(x) + B\varepsilon + \int_{-\infty}^{\tau} I^{\varepsilon}(s) \varepsilon(\tau - s) ds + \int_{-\infty}^{\tau} I^{\varepsilon'}(s) \varepsilon'(\tau - s) ds + f(\tau) \quad (2.6)$$

$$\varepsilon = F_1(x), \quad \varepsilon = \{\alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z, q_l, q_l\}$$

$$x = \{V_y/U_0, V_z/U_0, \gamma, \psi, \theta, \gamma', \psi', \theta', q_l, q_l\} \quad (l=1, \dots, N_1)$$

Вид матрицы $A(x)$ и вектор-функции $F(x)$ определяется уравнениями (1.7) и соотношениями (2.1), (2.2). Вектор-функция $F_1(x)$ отражает зависимости (2.2), (2.3) между кинематическими и определяющими параметрами. Матрицы B , $I^{\varepsilon}(\tau)$ и $I^{\varepsilon'}(\tau)$ характеризуют нестационарные аэродинамические нагрузки (2.5); вектор-функция $f(\tau)$ соответствует нагрузкам (2.5), возникающим в результате отклонения рулевых поверхностей и действия атмосферных порывов.

3. Формулы Коши и устойчивость решений интегродифференциальных уравнений. Предположим, что летательный аппарат совершает пространственное движение с установившимся режимом обтекания и с постоянными кинематическими параметрами ε_j (это движение принимаем за невозмущенное). Применяя обычную процедуру, на основе уравнений (2.6) составим уравнения возмущенного движения и линеаризуем их. Для многих видов движения получаем систему интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра второго рода, не разрешенную относительно производной:

$$\dot{x}^*(t) = Hx(t) + \int_0^t J(s) x(t-s) ds + \int_0^t J_1(s) x^*(t-s) ds + J_1(t) x_0 \quad (3.1)$$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор-столбец параметров возмущенного движения, причем $x(t) = 0$ при $t < 0$, а при $t = 0$ $x(0) = x_0$; H — постоянная матрица размера $n \times n$; интегральные ядра $J(t)$ и $J_1(t)$ — непрерывные при $t \geq 0$ матрицы размера $n \times n$, элементы которых ограничены и абсолютно ин-

тегрируемы на полуинтервале $[0, +\infty)$; кроме того, предполагаем, что матрица $J_1(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$.

Матрицей Коши системы уравнений (3.1) будем называть матрицу $V(t)$ размера $n \times n$, столбцы которой являются решениями задачи Коши для момента времени $t=0$ и которая является нормальной при $t=0$, т. е. $V(0)=E$.

При изучении интегродифференциальных уравнений интегральные ядра часто заменяются более простыми функциями, облегчающими расчет, например при использовании метода групповой аппроксимации переходных функций [2]. Предположим, что исследовалась система уравнений (3.1), а система уравнений, более точно отражающая происходящий процесс, имеет вид

$$x^*(t) = Hx(t) + \int_0^t (J(s) + M(s)) x(t-s) ds + \int_0^t (J_1(s) + M_1(s)) x^*(t-s) ds + (J_1(t) + M_1(t)) x_0 \quad (3.2)$$

где $M(t)$ и $M_1(t)$ (непрерывные матрицы размера $n \times n$) — некоторые малые возмущения интегральных ядер $J(t)$ и $J_1(t)$, не учтенные при изучении системы уравнений (3.1).

Решение задачи Коши $x(0)=x_0$ системы уравнений (3.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = V(t) x_0 + \int_0^t R(t-s) x(s) ds \quad (3.3)$$

$$R(t) = M_1(t) + \int_0^t V(t-s) M(s) ds + \int_0^t V^*(t-s) M_1(s) dt$$

где $V(t)$ — матрица Коши системы уравнений (3.1).

Справедливость этого утверждения (теорема 1) устанавливается непосредственной подстановкой выражения (3.3) в систему уравнений (3.2) с использованием дифференцируемости матрицы $J_1(t)$.

На движение летательного аппарата даже в условиях линеаризации аэродинамической и упругой частей задачи могут существенно влиять нелинейности неаэродинамического характера. Кроме того, кинематические параметры, линейно входящие в интегральные члены, нелинейно связаны с параметрами возмущенного движения.

С учетом указанных нелинейностей уравнения возмущенного движения принимают вид

$$x^*(t) = Hx(t) + \int_0^t J(t-s) (x(s) + g(x(s))) ds + \int_0^t J_1(t-s) (x^*(s) + g'(x(s)) x^*(s)) ds + J_1(t) (x_0 + g(x_0)) + f(t, x(t)) \quad (3.4)$$

Здесь $g(x)$ и $f(t, x)$ — непрерывные нелинейные по x вектор-функции, т. е. в области $t \geq 0$, $|x| \leq h$ выполняются неравенства

$$|g(x)| \leq A|x|^{1+\gamma}, \quad |f(t, x)| \leq A_1|x|^{1+\gamma} \quad (3.5)$$

где h , γ , A и A_1 — некоторые положительные постоянные, $g'(x)$ — матрица размера $n \times n$, элементами которой являются выражения $g'_{ij} = \partial g_i / \partial x_j$.

Решение задачи Коши $x(0)=x_0$ системы уравнений (3.4) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = V(t) x_0 + \int_0^t V(t-s) f(s, x(s)) ds + \int_0^t K(t-s) g(x(s)) ds \quad (3.6)$$

$$K(t) = J_1(t) + \int_0^t V(t-s) J(s) ds + \int_0^t V^*(t-s) J_1(s) ds$$

где $V(t)$ — матрица Коши системы уравнений (3.1).

Справедливость последнего утверждения (теоремы 2) также проверяется подстановкой выражения (3.6) в систему уравнений (3.4).

При помощи приведенных формул (3.3) и (3.6), которые по аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений естественно называть формулами Коши, можно ослабить условия доказанных в [7] теорем.

Во многих задачах интегральные ядра удовлетворяют условиям [7]:

$$J(t), J_1(t), M(t), M_1(t) \in L_1^\mu[0, +\infty) \quad (\mu > 0) \quad (3.7)$$

Свойства интегральных ядер позволяют применить к системе уравнений (3.1) преобразование Лапласа. Изображение по Лапласу $V^*(p)$ матрицы Коши $V(t)$ системы уравнений (3.1) в области $\operatorname{Re} p \geq -\mu$ удовлетворяет матричному уравнению $(pE - H - J^*(p) - pJ_1^*(p))V^*(p) = E$, а изображение $V^{**}(p)$ матрицы $V^*(t)$ выражается через матрицу $V^*(p)$ с помощью соотношения $V^{**}(p) = (H + J^*(p) + pJ_1^*(p))V^*(p)$, где $J^*(p)$ и $J_1^*(p)$ — изображения по Лапласу матриц $J(t)$ и $J_1(t)$ соответственно.

Используя обратное преобразование Лапласа, нетрудно показать, что справедлива следующая лемма: если в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -\lambda$ ($\lambda \leq \mu$) нет корней у характеристического уравнения системы уравнений (3.1)

$$\Phi(p) \equiv \det \left[pE - H - \int_0^\infty J(s) e^{-ps} ds - p \int_0^\infty J_1(s) e^{-ps} ds \right] = 0 \quad (3.8)$$

то существуют постоянные $C \geq 1$ и $C_1 \geq 0$, такие, что для матрицы Коши $V(t)$ системы уравнений (3.1) выполняются неравенства

$$\|V(t)\| \leq C \exp(-\lambda t), \quad \|V^*(t)\| \leq C_1 \exp(-\lambda t)$$

Сформулируем теперь теорему 3 об устойчивости решений линейных систем уравнений при замене интегральных ядер. Пусть интегральные ядра системы уравнений (3.2) удовлетворяют условиям (3.7), у характеристического уравнения (3.8) системы уравнений (3.1) в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -\lambda$ ($0 < \lambda \leq \mu$) нет корней и

$$C \int_0^\infty \|M(t)\| dt + (C_1 + \lambda) \int_0^\infty \|M_1(t)\| dt < \lambda$$

где C, C_1 — константы, фигурирующие в лемме, тогда решения системы уравнений (3.2) асимптотически устойчивы.

Действительно, в силу условий теоремы существует постоянная δ , такая, что $0 < \delta < \lambda$ и выполняется неравенство

$$\frac{1}{\lambda - \delta} \int_0^\infty (C \|M(s)\| + C_1 \|M_1(s)\|) e^{\delta s} ds + \int_0^\infty \|M_1(s)\| e^{\delta s} ds < 1$$

так как оно верно при $\delta = 0$ и все слагаемые непрерывны по δ при $\delta < \mu$ [7]. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ выбираем начальные возмущения x_0 системы уравнений (3.2) столь малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{C|x_0|}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda - \delta} \int_0^\infty (C \|M(s)\| + C_1 \|M_1(s)\|) e^{\delta s} ds + \int_0^\infty \|M_1(s)\| e^{\delta s} ds < 1$$

Покажем, что при выполнении этого неравенства $|x(t)| < \varepsilon \exp(-\delta t)$. Согласно теореме 1, решение системы уравнений (3.2) при возмущении $x(0) = x_0$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.3). Меняя в (3.3) порядок интегрирования, используя условия теоремы и лемму, получаем

$$|x(t)| \leq e^{-\lambda t} \left(C|x_0| + \int_0^t e^{\lambda s} \int_0^s (C\|M(\tau)\| + C_1\|M_1(\tau)\|) |x(s-\tau)| d\tau ds \right) + \int_0^t \|M_1(s)\| |x(t-s)| ds$$

При $t=0$ $|x(0)| < \varepsilon$. Пусть $|x(t)| < \varepsilon \exp(-\delta t)$ при $0 \leq t < t_0$, а $|x(t_0)| = \varepsilon \exp(-\delta t_0)$. Но тогда должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \exp(-\delta t_0) &\leq \exp(-\lambda t_0) \left(C|x_0| + \varepsilon \int_0^{t_0} \exp[(\lambda - \delta)s] \int_0^s (C\|M(\tau)\| + \right. \\ &\quad \left. + C_1\|M_1(\tau)\|) e^{\delta\tau} d\tau ds \right) + \varepsilon \exp(-\delta t_0) \int_0^{t_0} \|M_1(s)\| e^{\delta s} ds \leq \\ &\leq \varepsilon \exp(-\delta t_0) \left(\frac{C|x_0|}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda - \delta} \int_0^\infty (C\|M(\tau)\| + C_1\|M_1(\tau)\|) e^{\delta\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \|M_1(\tau)\| e^{\delta\tau} d\tau \right) < \varepsilon \exp(-\delta t_0) \end{aligned}$$

а это невозможно. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь нелинейную систему уравнений (3.4). Пусть интегральные ядра системы уравнений (3.4) удовлетворяют условиям $J(t) \in L_1^{\mu}[0, +\infty)$, $\|J_1(t)\| \leq L \exp(-\mu t)$, где $\mu > 0$ и $L \geq 0$; решения системы уравнений (3.1) асимптотически устойчивы и справедливы неравенства (3.5), тогда нулевое решение системы уравнений (3.4) асимптотически устойчиво (теорема 4). Для доказательства этой теоремы учтем, что характеристическая функция $\Phi(p)$ системы уравнений (3.1) является аналитической в области $\operatorname{Re} p > -\mu$ и в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$ в силу условий теоремы не имеет нулей. А так как в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -\lambda$ ($\lambda < \mu$) число нулей функции $\Phi(p)$ конечно, что следует из свойств интегральных ядер, то всегда можно подобрать λ , такое, что $0 < \lambda < \mu$ и в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -\lambda$ функция $\Phi(p)$ нулей не имеет. Воспользовав-

шись леммой и теоремой 2, получаем $|x(t)| \leq e^{-\lambda t} \left(C|x_0| + D \int_0^t e^{\lambda s} |x(s)|^{1+\nu} \right.$

$$\left. ds \right); \quad D = A_1 C + AL + A \int_0^\infty (C\|J(s)\| + C_1\|J_1(s)\|) e^{\lambda s} ds,$$

где C и C_1 — константы, фигурирующие в лемме. Следуя далее по схеме, изложенной в [7] при рассмотрении нелинейностей, нетрудно довести доказательство до конца.

Представляют интерес системы уравнений с переменными коэффициентами и свободным членом, зависящим от времени. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} x'(t) = (H + B(t))x(t) + \int_0^t J(s)x(t-s)ds + \int_0^t J_1(s)x'(t-s)ds + \\ + J_1(t)x_0 + f(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $B(t)$ — матрица размера $n \times n$, $f(t)$ — n -мерная вектор-функция, характеризующая внешние силовые воздействия, которые возникают, например, из-за атмосферных порывов, возмущений потока за ударной волной, вмешательства пилота в управление полетом и т. п.

Пусть интегральные ядра $J(t)$, $J_1(t)$, матрица $B(t)$ и вектор-функция $f(t)$ системы уравнений (3.9) абсолютно интегрируемы на полуинтервале $[0, +\infty)$ и характеристическая функция системы уравнений (3.1) в области $\text{Re } p \geq 0$ не имеет нулей, тогда решения системы уравнений (3.9) ограничены. Если при этом вектор-функция $f(t) = f_1(t)x_0$, т. е. линейно зависит от начальных возмущений $x(0) = x_0$, то решения системы уравнений (3.9) устойчивы (теорема 5). Для доказательства, воспользовавшись теоремой 2, получаем, что решение задачи Коши $x(0) = x_0$ системы уравнений (3.9) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = V(t)x_0 + \int_0^t V(t-s)(B(s)x(s) + f(s))ds$$

где $V(t)$ — матрица Коши системы уравнений (3.1). Из условий теоремы следует, что $\|V(t)\| \leq C$, поэтому

$$|x(t)| \leq C|x_0| + C \int_0^t |f(s)| ds + C \int_0^t \|B(s)\| |x(s)| ds$$

Применяя основное интегральное неравенство, получаем

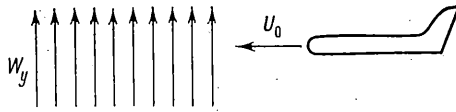
$$|x(t)| \leq C \left(|x_0| + \int_0^t |f(s)| ds \right) e^{\kappa(t)}, \quad \kappa(t) = C \int_0^t \|B(s)\| ds$$

Это неравенство и доказывает теорему. Нетрудно проверить, что все результаты, полученные в [7], переносятся на системы уравнений, рассмотренные в публикуемой работе.

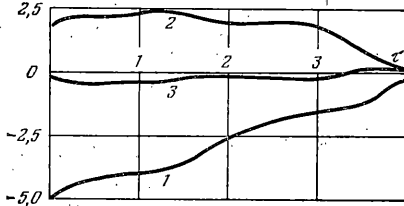
4. Пример. Приведем результаты численного решения нелинейных интегродифференциальных уравнений, описывающих пространственное движение гипотетического транспортного самолета при воздействии на него интенсивного вертикального порыва (фиг. 1) со скоростью $W_y = 30$ м/с. Считается, что до встречи с порывом самолет совершал установившийся полет на высоте 1000 м со скоростью $U_0 = 150$ м/с. В разложении (1.3) удерживается шесть первых членов, при этом собственные формы колебаний конструкции самолета определяются на основе его балочной схематизации [1]. Коэффициенты аэродинамических производных и нестационарные части переходных аэродинамических функций в (2.5) рассчитываются на основе численного метода дискретных вихрей [2].

На фиг. 2 приведены результаты расчетов нестационарных частей переходных аэродинамических функций $I_{c_y}^{\Delta_1}(\tau)$, $I_{m_z}^{\Delta_1}(\tau)$, $I_{c_1}^{\Delta_1}(\tau)$ для коэффициента подъемной силы c_y , момента тангажа m_z и обобщенной силы c_1 (кривые 1, 2, 3 соответственно) по безразмерному параметру $\Delta_1 = W_y/U_0$.

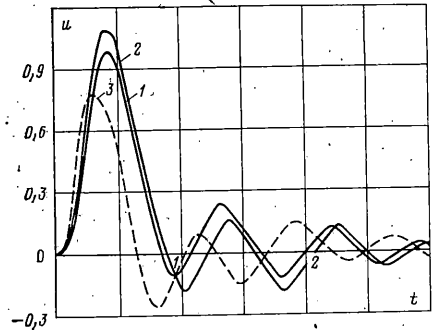
На фиг. 3 представлены кривые, описывающие изменение упругого перемещения конца крыла u_h [м] при пространственном движении самолета (размерность времени в с). Кривая 1 получена для незагруженного самолета с массой m_0 , а кривая 2 — при наличии в центральной части фюзеляжа груза массы $m_* = 0,4m_0$. В первом случае интегрировались уравнения (1.9), во втором — (1.7). Для аэродинамических характеристик использовались интегральные представления (2.5). Кривая 3 в отличие от кривой 1 рассчитана без учета нестационарности обтекания на основе гипотезы квазистационарности. В соответствии с этой гипотезой интеграль-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ные члены в представлениях (2.5) не учитываются. Как видно, наличие грузов и влияние нестационарности аэродинамических характеристик приводит к заметному изменению аэроупругих характеристик летательного аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфман Р. Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958, 799 с.
2. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В. Введение в аэроупругость. М.: Наука, 1980, 383 с.
3. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983, 320 с.
4. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика упругого летательного аппарата.—В кн.: Итоги науки и техн. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1982, т. 5, с. 135–197.
5. Buckens F. The influence of elastic components on the attitude stability of a satellite.—Proc. 5th Intern. Symp. Space Technol. and Sci., Tokyo, 1963. Tokyo AGNE Corp., 1964, p. 193–203.
6. Ashley H. Observations on the dynamic behavior of large flexible bodies in orbit.—AIAA Journal, 1967, v. 5, No. 3, p. 460–469.—Рус. перев.: Эшли Х. Динамика крупных гибких объектов на орбите.—Ракетн. техн. и космонавт., 1967, т. 5, № 3, с. 92–104.
7. Астапов И. С. Об устойчивости решений интегродифференциальных уравнений аэроупругости.—Вестн. Моск. ун-та, Математика, механика, 1981, № 6, с. 89–95.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1984