

К ТЕОРИИ БЕЗАВАРИЙНОГО ТОРМОЖЕНИЯ

ФУФАЕВ Н. А.

Для остановки движущегося колесного экипажа обычно применяют тормозные колодки, которые прижимаются к диску или барабану, жестко скрепленному с колесом. Однако при слишком большой величине тормозного момента может произойти блокировка колес, т. е. прекращение их собственного вращения. В результате начинается движение колес со скольжением, колесный экипаж теряет управляемость и увеличивается вероятность аварии. Блокировка является лишь достаточным, но не необходимым условием качения колеса со скольжением. Поэтому для отыскания необходимых условий качения колеса без скольжения требуется исследовать динамику колесного экипажа.

В публикуемой работе на простом примере устанавливаются условия торможения колеса без скольжения.

1. Пусть однородный диск¹ массы m и радиуса r движется в вертикальной плоскости, соприкасаясь с наклонной шероховатой прямой. К диску приложен тормозной момент M , со стороны опорной прямой на него действует сила нормального давления $N = mg \cos \alpha$ и тангенциальная сила F (фиг. 1). Предположим, что диск взаимодействует с опорной прямой и с тормозными колодками посредством сил сухого (кулоновского) трения. Тогда согласно закону Кулона — Амонтона зависимости $F = F(U)$, где U — скорость скольжения диска, и $M = M(\Omega)$ изображаются кусочно-ломаными кривыми, показанными на фиг. 2. Величина M_* пропорциональна силе прижатия тормозных колодок; f — коэффициент трения скольжения. При $U = 0$ сила F может принимать любое значение на интервале $(-fmg \cos \alpha, fmg \cos \alpha)$, а момент M при $\Omega = 0$ может принять любое значение на интервале $(-M_*, M_*)$. Составим уравнения движения диска в соответствии с обозначениями на фиг. 1 (k — центральный радиус инерции диска):

$$mdV/dt = mg \sin \alpha + F, \quad mk^2 d\Omega/dt = M - rF \quad (1.1)$$

Скорость U скольжения диска по опорной прямой выражается соотношением

$$U = V - r\Omega, \quad \Omega = d\varphi/dt \quad (1.2)$$

В безразмерных величинах $x_0 = xr^{-1}$, $\tau = tr^{-1/2}(fg \cos \alpha)^{1/2}$, $u = x_0 \dot{\varphi}$, $\omega = \rho^{-1} \dot{\varphi}$, $\rho = r^2 k^{-2}$, $\sigma = f^{-1} \tan \alpha$, $\lambda = M_*(fmg r \cos \alpha)^{-1}$ уравнения (1.1) с учетом (1.2) принимают вид

$$u^* = (1 + \rho)F_0 - \rho M_0 + \sigma, \quad \omega^* = M_0 - F_0 \quad (1.3)$$

Здесь F_0 — безразмерная тангенциальная сила взаимодействия диска с опорной плоскостью, M_0 — безразмерный тормозной момент, u — безразмерная скорость скольжения диска, ω — безразмерная угловая скорость вращения диска; точка вверху означает дифференцирование по безразмерному времени t .

Согласно введенным обозначениям и графикам на фиг. 2, имеем

$$F_0 = -1 \quad (u > 0), \quad F_0 = 1 \quad (u < 0), \quad -1 \leq F_0 \leq 1 \quad (u = 0); \\ M_0 = -\lambda \quad (\omega > 0), \quad M_0 = \lambda \quad (\omega < 0), \quad -\lambda \leq M_0 \leq \lambda \quad (\omega = 0) \quad (1.4)$$

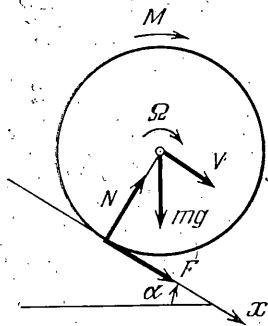
Уравнения (1.3) описывают движение изображающей точки на фазовой плоскости (ω, u) . Согласно (1.4), прямые $u = 0$ и $\omega = 0$ разбивают эту плоскость на четыре квадранта, в которых уравнения движения изображающей точки имеют вид

$$u^* = -(1 + \rho) + \rho\lambda + \sigma, \quad \omega^* = 1 - \lambda \quad (\omega > 0, u > 0) \\ u^* = -(1 + \rho) - \rho\lambda + \sigma, \quad \omega^* = 1 + \lambda \quad (\omega < 0, u > 0) \\ u^* = 1 + \rho - \rho\lambda + \sigma, \quad \omega^* = -1 + \lambda \quad (\omega < 0, u < 0) \\ u^* = 1 + \rho + \rho\lambda + \sigma, \quad \omega^* = -(1 + \lambda) \quad (\omega > 0, u < 0) \quad (1.5)$$

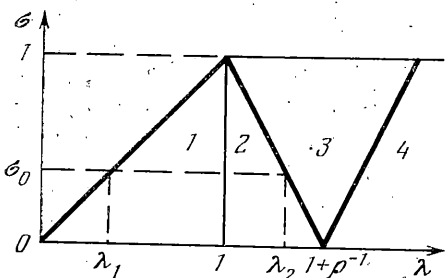
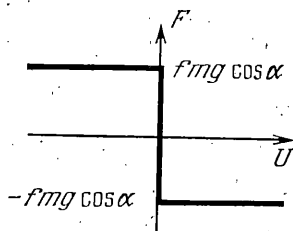
Уравнения, описывающие движение изображающей точки на границах $u = 0$ и $\omega = 0$, получаются из (1.3) простыми вычислениями. При $u = 0$ сила F_0 согласно (1.4) является неизвестной наряду с ω . Подставляя в (1.3) значения $u = u^* = 0$ и исключая F_0 , получим искомые уравнения

$$(1 + \rho)\omega^* = -\lambda + \sigma \quad (u = 0, \omega > 0), \quad (1 + \rho)\omega^* = \lambda + \sigma \quad (u = 0, \omega < 0) \quad (1.6)$$

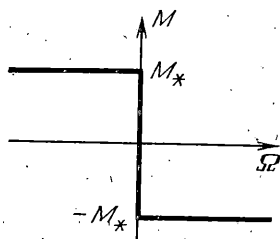
¹ Качение однородного диска по наклонной прямой изучал П. Аппель [1], а с учетом тормозного момента — И. В. Новожилов [2], однако без исследования динамики.



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

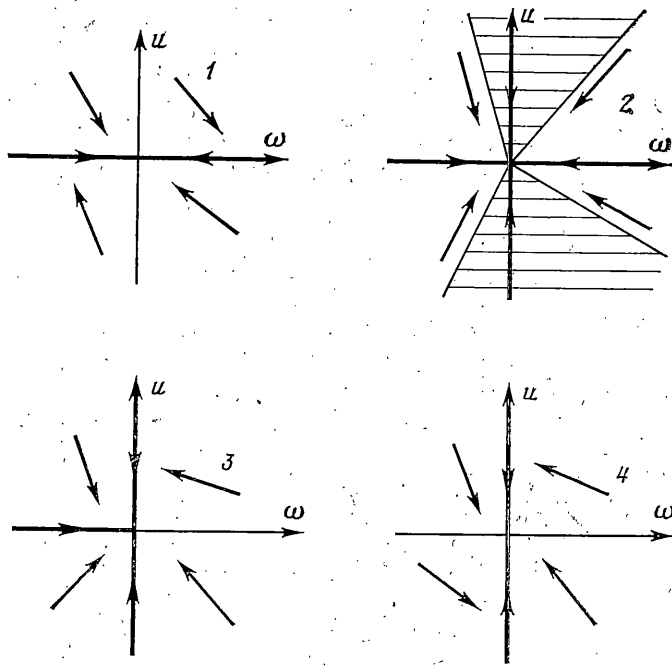
Аналогично при $\omega=0$ момент M_0 согласно (1.4) оказывается неизвестной величиной наряду с u . Подставляя в (1.3) $\omega=\omega^*=0$ и исключая M_0 , приходим к уравнениям

$$u^* = -1 + \sigma \quad (\omega=0, u > 0), \quad u^* = 1 + \sigma \quad (\omega=0, u < 0) \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.5)–(1.7) следует, что динамику рассматриваемой системы определяют три существенных физических параметра: $\rho > 0$, $\lambda > 0$, $\sigma > 0$. Зафиксируем параметр ρ и проведем разбиение первого квадранта плоскости параметров λ , σ на области различного поведения систем. Приравнявая нулю правые части уравнений (1.5)–(1.7), получим уравнения прямых, которые разбивают первый квадрант плоскости λ , σ на тринадцать областей. Однако из уравнений (1.6) и (1.7) следует, что необходимое условие торможения диска заключается в выполнении неравенств $\lambda \geq \sigma$, $\sigma \leq 1$, которые и выделяют на плоскости λ , σ требуемый участок, разделенный прямыми $\lambda=1$, $\sigma=-\rho\lambda+1$, $\sigma=\rho\lambda-1$ на четыре области, показанные на фиг. 3. Неравенство $\sigma \leq 1$ означает, что торможение возможно лишь при условии $\text{tg } \alpha \leq f$. Поскольку $f \leq 1$, затормозить диск на горке с углом наклона $\alpha > 45^\circ$ невозможно. Предельный угол α_* наклона горки, на которой можно затормозить при заданном коэффициенте трения скольжения f , равен $\alpha_* = \text{arctg } f$. Этот результат известен и означает, что реакция должна быть в конусе трения.

2. Согласно (1.5), в каждом квадранте плоскости λ , σ интегральные кривые являются параллельными прямыми, угол наклона которых определяется правой частью соответствующих дифференциальных уравнений. На фиг. 4 изображены фазовые портреты, которые получаются при соотношениях физических параметров, отвечающих точкам в области 1, 2, 3 и 4 плоскости λ , σ на фиг. 3. Стрелки на графиках фиг. 4 указывают направление движения изображающей точки по фазовым траекториям, которое на границах $u=0$ и $\omega=0$ реализуется только на участках, являющихся устойчивыми по отношению к отклонениям от этих границ. Следовательно, в областях, примыкающих к границе, фазовые траектории должны быть расположены так, чтобы при движении по ним изображающая точка приходила на границу как из одной примыкающей области, так и из другой [3]. Назовем этот случай стыковкой фазовых траекторий. Таким образом, стыковка фазовых траекторий выделяет на границе область, в которой и реализуется движение изображающей точки в соответствии с уравнениями (1.6) и (1.7). На фиг. 4 участки границ, по которым происходит движение изображающей точки, отмечены жирной линией, а стрелки на линии указывают направление движения по границе.

Фазовые портреты на фиг. 4 полностью отражают динамику рассматриваемой системы при выбранных соотношениях физических параметров. Нахождение изображающей точки в начале координат плоскости ω , u отвечает состоянию покоя диска. Следовательно, задача о торможении диска на наклонной прямой сводится к отыс-



Фиг. 4

канию таких соотношений параметров, при которых изображающая точка из любого начального положения на фазовой плоскости ω, u приходит в начало координат и там остается. Вид фазовых портретов на фиг. 4 указывает на то, что эта задача решается при любых соотношениях параметров в областях 1-4 на фиг. 3. Однако задача безаварийного торможения заключается в том, чтобы остановить диск без перехода в режим качения со скольжением. Движение изображающей точки на оси $u=0$ соответствует качению диска без скольжения, а движение по оси $\omega=0$ — режиму блокировки диска, т. е. его поступательному движению. Анализ фазовых портретов на фиг. 4 позволяет также решить и задачу о безаварийном торможении диска. В самом деле, для любых значений λ, σ в области 1 изображающая точка всегда приходит на ось $u=0$ и затем движется по ней к началу координат. В этом случае даже имеющееся скольжение диска прекращается и диск затормаживается без скольжения. Для значений λ и σ в области 2 появляется область начальных состояний диска (на фиг. 4 эта область отмечена штриховкой), когда торможение диска происходит со скольжением, включая фазу блокировки. При начальных состояниях вне этой области торможение диска происходит так же, как и для λ, σ в области 1. Если в начальный момент времени диск катился без скольжения, то для λ, σ в областях 1 и 2 торможение диска будет безаварийным. Для значений параметров в области 3 полуось $u=0, \omega > 0$ оказывается неустойчивой и безаварийное торможение становится невозможным. В области 4 вся ось $u=0$ оказывается неустойчивой и торможение всегда происходит со скольжением.

Таким образом, безаварийное торможение диска возможно только для значений параметров в областях 1 и 2. Следовательно, при любом заданном значении $\sigma > 0$ ($\sigma < 1$) величина λ должна находиться в интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, где $\lambda_1 = \sigma, \lambda_2 = (1 + \rho - \sigma)\rho^{-1}$. Подставляя сюда выражения λ, σ через первоначальные параметры, получаем неравенства

$$\sin \alpha < \frac{M_*}{mgr} < f \left(1 + \frac{k^2}{r^2} \right) \cos \alpha - \frac{k^2}{r^2} \sin \alpha \quad (2.1)$$

которые должны выполняться при безаварийном торможении диска на наклонной прямой. Из (2.1) следует, что тормозной момент M_* должен быть заключен в интервале $M_1 < M_* < M_2$. При значении M_* , близком к M_1 , торможение диска будет очень длительным. При $M_* = M_2$ торможение будет наиболее быстрым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Новожилов И. В.* Условия застоя в системах с кулоновским трением. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1, с. 8-14.
3. *Фуфаев Н. А.* Динамика систем с освобождающими кинематическими связями. — В кн.: Динамика систем. Устойчивость, синхронизация и хаотичность. Горький: Изд-е ГГУ, 1983, с. 27-38.

Горький

Поступила в редакцию
3.II.1984