УДК 531.383

О ДВИЖЕНИИ ГИРОМАЯТНИКА С ИДЕАЛЬНОЙ ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ ПО УГЛУ НУТАЦИИ

БЛИНОВ А. П.

Приводится вывод дифференциальных уравнений движения гиромаятника с несвободным вращением ротора при односторонней идеальной связи по углу нутации методом работы [1]. Определяется вид фазовых траекторий и дается двусторонняя оценка периода движения гиромаятника по углу нутации.

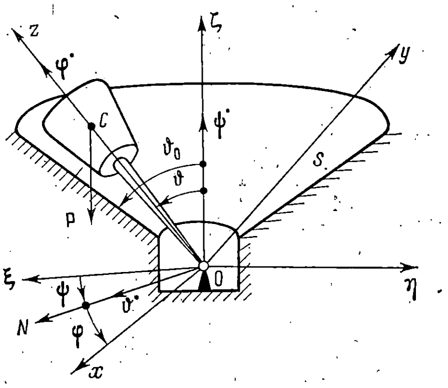
Рассмотрим движение гиромаятника (фигура) в случае, когда по углу нутации ϑ есть ограничение в виде твердой конической поверхности S с углом раствора $2\vartheta_0<\pi$ и вертикальной осью симметрии.

Пусть φ, ψ, ϑ — углы Эйлера, определяющие положение связанной системы координат $Oxyz$ относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$.

Запишем функцию Лагранжа для рассматриваемой системы

$$L^*={}^1/_2[A(\vartheta^{\cdot 2}+\psi^{\cdot 2}\sin^2\vartheta)+C(\Omega+\psi^{\cdot}\cos\vartheta)^2]-Pl\cos\vartheta \qquad (1)$$

Здесь A — момент инерции гиромаятника относительно оси x или y, C — момент инерции относительно оси z, l — расстояние от неподвижной точки O до центра



масс гиромаятника c, расположенного выше точки O, $\Omega=\varphi^{\cdot}$, P — сила тяжести.

В предположении, что скорость собственного вращения гиромаятника поддерживается постоянной $\varphi^{\cdot}=\Omega=\text{const}$ (с помощью синхронного двигателя), уравнения движения гиромаятника (при отсутствии дополнительной связи) имеют вид

$$A\vartheta^{\cdot\cdot}-{}^1/_2A\psi^{\cdot 2}\sin 2\vartheta+C(\Omega+\psi^{\cdot}\cos\vartheta)\psi^{\cdot}\sin\vartheta-Pl\sin\vartheta=0$$

$$A\psi^{\cdot}\sin^2\vartheta+C(\Omega+\psi^{\cdot}\cos\vartheta)\cos\vartheta=c=\text{const} \qquad (2)$$

Имея одностороннюю связь $\vartheta_0-\vartheta\geqslant 0$, введем новую координату [1] $s=\vartheta_0-\vartheta$. Тогда выражение для кинетической энергии примет вид

$$T^*={}^1/_2As^{\cdot 2}+{}^1/_2[A\sin^2(s-\vartheta_0)+C\cos^2(s-\vartheta_0)]\psi^{\cdot 2}+C\Omega\psi^{\cdot}\cos(s-\vartheta_0)+{}^1/_2C\Omega^2$$

Отнесем слагаемое $C\Omega\psi^{\cdot}\cos(s-\vartheta_0)$ к силам обобщенного потенциала, т. е. определим следующую обобщенную силу:

$$Q_s=-C\Omega\psi^{\cdot}\sin(s-\vartheta_0),\quad Q_\psi=-d[C\Omega\cos(s-\vartheta_0)]/dt.$$

Новый лагранжиан примет вид

$$L=L^*-C\Omega\psi^{\cdot}\cos(s-\vartheta_0)=$$
$$={}^1/_2As^{\cdot 2}+{}^1/_2[A\sin^2(s-\vartheta_0)+C\cos^2(s-\vartheta_0)]\psi^{\cdot 2}+Pl\cos(s-\vartheta_0) \qquad (3)$$

Определив обобщенный импульс $p=\partial L/\partial\psi^{\cdot}=[A\sin^2(s-\vartheta_0)+C\cos^2(s-\vartheta_0)]\psi^{\cdot}$, запишем функцию Рауса $R^*=L-p\psi^{\cdot}={}^1/_2As^{\cdot 2}-{}^1/_2[A\sin^2(s-\vartheta_0)+C\cos^2(s-\vartheta_0)]^{-1}p^2-Pl\cos(s-\vartheta_0)$, которая после негладкой замены переменной $s=|x|$ [1] примет вид

$$R(x,x^{\cdot},p)=R^*(|x|,x^{\cdot}\operatorname{sgn}x,p)={}^1/_2Ax^{\cdot 2}-{}^1/_2A^{-1}r(x)p^2-Pl\cos(|x|-\vartheta_0)$$

$$r(x)=[\sin^2(|x|-\vartheta_0)+a\cos^2(|x|-\vartheta_0)]^{-1},\quad a=C/A$$

Обобщенная сила Q_s, соответствующая новой координате x, равна $Q_x=Q_s \operatorname{sgn} x$ или $Q_x=-a\Omega r(x)\sin(|x|-\vartheta_0)p \operatorname{sgn} x$, поэтому уравнения движения с учетом дополнительной связи и первого интеграла $p=-C\Omega\cos(|x|-\vartheta_0)+p_0$ (p_0 — произвольная постоянная) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial x^{\cdot}}-\frac{\partial R}{\partial x}=Q_x, \qquad \psi^{\cdot}=-\frac{\partial R}{\partial p}=\frac{1}{A}r(x)p$$

Поскольку обобщенная производная от $|x|$ по x определяется выражением

$$\frac{d|x|}{dx}=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

то уравнения движения гиромаятника можно записать в развернутом виде:

$$x^{\cdot\cdot}+F(x)\operatorname{sgn} x=0 \tag{5}$$

$$\psi^{\cdot}=A^{-1}r_1(x)r(x), \quad r_1(x)=p_0-C\Omega\cos(|x|-\vartheta_0) \tag{6}$$

$$F(x)=-A_1r_1^2(x)r^2(x)\sin[2(|x|-\vartheta_0)]+A_2r_1(x)r(x)\sin(|x|-\vartheta_0)+A_3\sin(|x|-\vartheta_0)$$

$$A_1=(A-C)/(2A^3), \quad A_2=2C\Omega/A^2, \quad A_3=Pl/A$$

Таким образом, движение гиромаятника по углу прецессии определяется его движением по углу нутации, т. е. решением уравнения (5).

Интегрируя уравнение (5), получим (h — произвольная постоянная):

$$\frac{1}{2}x^{\cdot 2}+\int_0^x F(x)\operatorname{sgn} x\,dx=h \tag{7}$$

Заметим, что функция $V=\dfrac{1}{2}x^{\cdot 2}+\displaystyle\int_0^x F(x)\operatorname{sgn} x\,dx$ будет определенно-положительной функцией Ляпунова в полосе $|x|\leqslant\vartheta_0$, $|x^{\cdot}|<\infty$, по крайней мере для значений p_0 и Ω, удовлетворяющих неравенству

$$A_2(C\Omega\cos\vartheta_0-p_0)+A_3(\sin^2\vartheta_0+a\cos^2\vartheta_0)>0 \tag{8}$$

а ее производная по времени в силу (5) тождественно равна нулю. Поэтому фазовые траектории уравнения (5) в указанной полосе представляют собой замкнутые линии.

В силу симметрии уравнения (5) относительно оси $x=0$ и симметрии (7) относительно оси $x^{\cdot}=0$ достаточно определить фазовые траектории для $x\geqslant 0$, $x^{\cdot}\geqslant 0$, т. е. решить уравнение

$$x^{\cdot}=\sqrt{2}\sqrt{h+f(x)} \tag{9}$$

в котором для $a<1$:

$$f(x)=f_1(x)=A_0-A_3\cos(x-\vartheta_0)-\frac{A_{10}+A_{11}\cos(x-\vartheta_0)}{1-a_1\cos^2(x-\vartheta_0)}-$$

$$-A_{12}\ln\frac{1+a_2\cos(x-\vartheta_0)}{1-a_2\cos(x-\vartheta_0)}+A_{13}\ln[1-a_1\cos^2(x-\vartheta_0)]$$

$$a_1=1-a, \qquad a_2=\sqrt{|a_1|}, \qquad A_{10}=\frac{1}{2A}\left(\frac{p_0^2}{A}+\frac{C^2\Omega^2}{A-C}\right)$$

$$A_{11}=-\frac{2}{a_1}A_1C\Omega p_0, \qquad A_{12}=-\frac{C\Omega p_0}{2a_2A^2}, \qquad A_{13}=\frac{C^2\Omega^2}{2a_1A^2}$$

$$A_0=A_3\cos\vartheta_0+\frac{A_{10}+A_{11}\cos\vartheta_0}{1-a_1\cos^2\vartheta_0}-A_{12}\ln\frac{1+a_2\cos\vartheta_0}{1-a_2\cos\vartheta_0}+A_{13}\ln(1-a_1\cos^2\vartheta_0)$$

а для $a>1$:

$$f(x)=B_0+f_2(x), \qquad f_2(x)=-A_3\cos(x-\vartheta_0)+\frac{B_{10}+B_{11}\cos(x-\vartheta_0)}{1-a_1\cos^2(x-\vartheta_0)}+$$

$$+B_{12}\operatorname{arctg}[a_2\cos(x-\vartheta_0)]-B_{13}\ln[1+a_1^2\cos^2(x-\vartheta_0)]+B_{14}\ln[1-a_1\cos^2(x-\vartheta_0)],$$

$$B_0=f_2(0)$$

$$B_{10}=\frac{1}{2A^2}p_0^2-\frac{1}{a_1^2}A_1C^2\Omega^2,\quad B_{11}=\frac{2}{a_1}A_1C\Omega p_0$$

$$B_{12}=\frac{1}{a_2}\left(A_2-\frac{2}{a_1}A_1C\Omega\right),\quad B_{13}=\frac{1}{a_1^2}A_1C^2\Omega^2,\quad B_{14}=\frac{1}{2a_1}A_2C\Omega$$

Из уравнения (9) можем определить период τ движения фазовой точки в плоскости x, $x^\bullet$

$$\tau=2\sqrt{2}\int_0^{x_M}\frac{dx}{\sqrt{h+f(x)}}\tag{10}$$

В интеграле (10) x_M – ближайшее к нулю значение x, при котором подкоренное выражение обращается в нуль.

Для того чтобы дать удобную двустороннюю оценку периода τ, перейдем к новой переменной $\xi=\cos(x-\vartheta_0)-\cos\vartheta_0$ для $x\geqslant 0$.

Тогда, ограничиваясь случаем $a<1$, получим из (9)

$$\xi^\bullet=\sqrt{2}\sqrt{(\sin^2\vartheta_0-2\xi\cos\vartheta_0-\xi^2)[h+f_1(x(\xi))]}\tag{11}$$

$$f_1(\xi)=-A_3\xi-\frac{A_{15}+A_{11}\xi}{A_{16}-A_{17}\xi-a_1\xi^2}+A_{21}+A_{12}\ln\frac{1-A_{18}\xi}{1+A_{19}\xi}+A_{13}\ln[1-A_{20}\xi(1+A_{20}'\xi)]$$

$$A_{15}=A_{10}+A_{11}\cos\vartheta_0,\quad A_{16}=1-a_1\cos^2\vartheta_0,\quad A_{17}=2a_1\cos\vartheta_0$$

$$A_{18}=\frac{a_2}{1-a_2\cos\vartheta_0},\quad A_{19}=\frac{a_2}{1+a_2\cos\vartheta_0},\quad A_{20}=\frac{A_{17}}{A_{16}},\quad A_{20}'=\frac{a_1}{A_{17}},\quad A_{21}=\frac{A_{15}}{A_{16}}$$

Для функции $f_1(\xi)$, $0\leqslant\xi\leqslant\xi_0=1-\cos\vartheta_0$ можно дать оценку

$$-A_{29}-A_{30}\xi\leqslant f_1(\xi)\leqslant -A_{31}\xi-A_{32}\xi^2\tag{12}$$

$$A_{29}=A_{15}/a-A_{21},\quad A_{30}=A_3+A_{11}/a+A_{12}[A_{19}-\xi_0^{-1}\ln(1-A_{18}\xi_0)]-$$
$$-A_{13}\xi_0^{-1}\ln[1-A_{20}\xi_0(1+A_{20}'\xi_0)]$$

$$A_{31}=A_3+A_{11}A_{16}^{-1}+(a^{-1}+A_{16}^{-1})A_{15}\xi_0^{-1}+A_{12}[A_{18}+\xi_0^{-1}\ln(1+A_{19}\xi_0)]+A_{13}A_{20}$$

$$A_{32}=A_{11}\xi_0^{-1}(a^{-1}-A_{16}^{-1})+A_{13}A_{20}A_{20}',\quad A_i\geqslant 0\quad (i=1,\ldots,32)\quad \text{при } p_0\leqslant 0$$

Тогда искомая оценка периода τ примет вид

$$\sqrt{\frac{8}{A_{32}}}\int_0^{\xi_M}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)(\xi-\xi_4)}}\leqslant\tau\leqslant\sqrt{\frac{8}{A_{30}}}\int_0^{\xi_5}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_5)}}$$

Здесь $\xi_1=\xi_0$, $\xi_2=-1-\cos\vartheta_0$, а ξ_3, ξ_4 – корни уравнения $h-A_{31}\xi-A_{32}\xi^2=0$, $\xi_3\xi_4<0$, $\xi_5=(h-A_{29})/A_{30}$, $\xi_M=\cos(x_M-\vartheta_0)-\cos\vartheta_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781–788.

Москва

Поступила в редакцию 21.IX.1984