МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1985

УДК 534.1

УПРОЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

МУХИН Н. П.

Применение метода усреднения к существенно нелинейным системам, содержащим малый параметр, часто затрудняется тем, что при усреднении правых частей уравнений в стандартной форме не удается выразить интегралы через элементарные или затабулированные функции. В публикуемой работе предлагается упрощенный метод асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем, при котором правые части уравнений в стандартной форме заменяются более простыми функциями, интегралы от этих функций легко берутся. Рассматривается применение метода к существенно нелинейным системам второго порядка.

1. Будем рассматривать существенно нелинейную систему дифференциальных уравнений, содержащую малый параметр ε:

$$x^{\bullet}=F(x, t)+\varepsilon G(x, t), \quad x\in D\subset R^n \tag{1.1}$$

Системы вида (1.1) обычно исследуются методом усреднения [1, 2]. Чтобы применить к системе (1.1) метод усреднения, ее приводят к эквивалентной системе уравнений в стандартной форме. Пусть при $\varepsilon=0$ система (1.1) имеет общее решение $x=\varphi(c, t)$, c — вектор произвольных постоянных. Делая в (1.1) замену переменных $x=\varphi(y, t)$, получим систему в стандартной форме

$$y^{\bullet}=\varepsilon(\partial\varphi/\partial y)^{-1}G[\varphi(y, t), t] \tag{1.2}$$

Аналитическое исследование системы (1.2) затрудняется тем, что при усреднении не удается выразить интегралы от правых частей через элементарные или затабулированные функции. Это в большой степени обусловлено сложным видом порождающего решения, которое входит как аргумент в правые части системы (1.2).

Будем считать, что функцию $\varphi(y, t)$ можно представить в виде

$$\varphi(y, t)=\varphi^*(y, t, \delta)=\varphi_0(y, t)+\delta\varphi_1(y, t)+\delta^2\ldots \tag{1.3}$$

где δ — малый параметр, $\varphi_0(y, t)$ — функция «более простая», чем $\varphi(y, t)$. Подставим (1.3) в систему (1.2). Разлагая по δ правую часть (1.2) и отбрасывая члены порядка $\varepsilon\delta$, получим

$$y^{\bullet}=\varepsilon(\partial\varphi_0/\partial y)^{-1}G[\varphi_0(y, t), t] \tag{1.4}$$

Система (1.4) проще системы (1.2), так как $\varphi_0(y, t)$ является функцией более простого вида, чем $\varphi(y, t)$. Поэтому при усреднении в системе (1.4) легче взять интегралы от правых частей. Кроме того, приведение к системе уравнений в стандартной форме (1.4) можно выполнять используя вместо $\varphi(y, t)$ функцию $\varphi_0(y, t)$, формально считая ее решением порождающей системы. Систему (1.4) будем называть упрощенной системой.

Таким образом, упрощенный метод асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем состоит в том, что при исследовании (1.1) методом усреднения система уравнений в стандартной форме (1.2) заменяется упрощенной системой.

2. Рассмотрим вопрос о близости решений системы (1.2) и усредненной упрощенной системы.

Пусть дана система уравнений (ε и δ — малые параметры):

$$x^{\cdot}=\varepsilon X(x,\ t,\ \delta),\quad x\in D\subset R^n \tag{2.1}$$

Будем считать, что выполнены следующие условия: функция $X(x, t, \delta)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x при $x\in D$, $t\geqslant 0$, кроме того, она непрерывно дифференцируема по δ, и ее частная производная по δ ограничена при $x\in D$, $t\geqslant 0$; равномерно по x существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(x,t,\delta)\,dt=X_0(x,\delta)$$

Наряду с системой (2.1) рассмотрим систему

$$\xi^{\cdot}=\varepsilon X_0(\xi,\ 0) \tag{2.2}$$

Система (2.1) моделирует систему (1.2), а (2.2) — усредненную упрощенную систему (1.4).

Пусть $x(t)$, $\xi(t)$ — соответственно, решения систем (2.1) и (2.2), $x(0)=\xi(0)$, $\xi(t)$ лежит в D вместе со всей своей ρ-окрестностью при $t\geqslant 0$. Тогда в интервале времени $t\in[0,\ L\varepsilon^{-1}]$, $L>0$ справедливо неравенство

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant C_1(L)\sqrt{\delta_1(\varepsilon)}+C_2(L)\delta \tag{2.3}$$

где $\delta_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ [3], для периодической по t функции $X(x, t, \delta)$ будем иметь $\delta_1(\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$.

Если функция $X_0(\xi, 0)$ удовлетворяет условиям второй основной теоремы Н. Н. Боголюбова [1], то при достаточно малых δ будут верны утверждения этой теоремы относительно соответствия и устойчивости почти-периодических решений системы (2.1) и квазистационарных решений системы (2.2).

3. Рассмотрим применение упрощенного метода к существенно нелинейным системам 2-го порядка. Пусть дано существенно нелинейное уравнение, содержащее малый параметр ε таким образом, что при $\varepsilon=0$ оно может быть точно проинтегрировано. Пусть это уравнение имеет вид

$$x^{\cdot\cdot}+f(x)=\varepsilon F(x,\ x^{\cdot}) \tag{3.1}$$

Будем считать, что при $\varepsilon=0$ уравнение (3.1) имеет решение

$$x=z(a,\ \psi),\quad \psi=\omega(a)(t+t_0),\quad z(a,\ \psi+2\pi)=z(a,\ \psi) \tag{3.2}$$

где a и t_0 — произвольные постоянные, a характеризует амплитуду и форму колебаний, t_0 — начальную фазу, $\omega(a)$ — частота.

Заменив в уравнении (3.1) переменные $(x,\ x^{\cdot})\to(a,\ \psi):x=z(a,\ \psi)$, $x^{\cdot}=\omega(a)z_\psi'(a,\ \psi)$, получим систему в стандартной форме

$$a^{\cdot}=-\frac{\varepsilon}{D(a)}F(z,\omega z_\psi')z_\psi',\qquad D(a)=\omega z_a' z_{\psi\psi}''-z_\psi'(\omega z_\psi')_a'$$

$$\psi^{\cdot}=\omega(a)+\frac{\varepsilon}{D(a)}F(z,\omega z_\psi')z_\psi' \tag{3.3}$$

где $D(a)$ не зависит от ψ в силу того, что $x=z(a,\ \psi)$ — решение порождающего уравнения.

Исследование системы (3.3) методом усреднения затрудняется тем, что из-за сложного вида порождающего решения при усреднении интегралы от правых частей уравнений этой системы не удается выразить через известные функции. Иначе дело обстоит при рассмотрении квазилинейных уравнений типа (3.1). Для них правые части соответствующей системы уравнений в стандартной форме будут функциями простых гармоник. Интегралы от функций, аргументами которых являются тригонометрические функции, обычно берутся.

Сравнение колебаний существенно нелинейных и линейных систем, например колебаний, описываемых точным и линеаризованным уравнениями математического маятника, показывает, что эти колебания близки по форме. Воспользуемся этим обстоятельством для упрощения исследования уравнения (3.1).

Пусть порождающее решение удалось представить в виде

$$z(a, \psi) = z^*(a, \psi, \delta) = z_0(a, \psi) + \delta z_1(a, \psi) + \delta^2 \ldots$$
$$z_0(a, \psi) = \xi(a)\cos\psi + \eta(a)\sin\psi, \quad \psi = \omega(a)(t + t_0) \tag{3.4}$$

Малый параметр δ характеризует отличие формы колебаний, описываемых уравнением (3.1) при $\varepsilon=0$, от гармонических. На практике в качестве функции $z_0(a, \psi)$ можно взять первый член разложения в ряд Фурье функции $z(a, \psi)$.

Упрощенная система уравнений для (3.1) будет иметь вид

$$a^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{D(a)} F(z_0, \omega z_{0\psi}') z_\psi' = \varepsilon A(a, \cos\psi, \sin\psi) \tag{3.5}$$

$$\psi^{\cdot} = \omega(a) + \frac{\varepsilon}{D(a)} F(z_0, \omega z_{0\psi}') z_\psi' = \omega(a) + \varepsilon\Psi(a, \cos\psi, \sin\psi)$$

Правые части этой системы являются функциями синусов и косинусов, поэтому исследование ее методом усреднения имеет такой же порядок сложности, как и исследование системы в стандартной форме для квазилинейного уравнения. Для амплитуды $a(t)$, получаемой упрощенным методом, справедлива оценка (2.3), в которой $\delta_1(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.

4. Рассмотрим существенно нелинейное уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + \sin x = \varepsilon(1 - x^2)x^{\cdot} \quad (\varepsilon > 0) \tag{4.1}$$

Заменяя $\sin x$ на x, получим уравнение Ван-дер-Поля, исследование которого методом усреднения не представляет никаких трудностей [1, 2], так как оно является квазилинейным.

Порождающее уравнение для (4.1) имеет общее периодическое решение $x = 2\arcsin[a\,\mathrm{sn}(2K(a)\psi/\pi, a)]$ $(0 \leqslant a < 1)$, $\psi = \pi(t + t_0)/2K(a)$.

Из системы уравнений в стандартной форме запишем только уравнение для амплитуды

$$a^{\cdot} = \varepsilon\frac{\pi}{2aK(a)}\left\{1 - 4\arcsin^2\left[a\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K(a)}{\pi}\psi, a\right)\right]\right\}\mathrm{cn}^2\left(\frac{2K(a)}{\pi}\psi, a\right) \tag{4.3}$$

где в формулах (4.2) и (4.3) sn, cn — эллиптические функции Якоби, $K(a)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Правая часть уравнения (4.3) довольно сложна, и поэтому взять от нее интеграл при усреднении не удается. Применим предлагаемый упрощенный метод. Разложим порождающее решение в ряд Фурье

$$x = \frac{4\pi}{K(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{(2n+1)(1+q^{2n+1})}\sin(2n+1)\psi, \qquad q = \exp\left(-\pi\frac{K(\sqrt{1-a^2})}{K(a)}\right) \tag{4.4}$$

В широких пределах изменения переменной a параметр q остается малым ($q<0{,}05$ при $a<0{,}75$), поэтому в разложении (4.4) оставим только первый член. Правая часть соответствующего упрощенного уравнения для амплитуды будет простой функцией от $\sin\psi$ и $\cos\psi$. После усреднения будем иметь

$$\dot{a}=\varepsilon\frac{4\pi^3}{aK^3(a)}\frac{q}{(1+q)^2}\left(1-\frac{16\pi^2}{K^2(a)}\frac{q}{(1+q)^2}\right) \tag{4.5}$$

Решение этого уравнения можно записать в виде квадратуры.

Исследуем стационарные режимы. Приравнивание нулю правой части уравнения (4.5) дает: $a=0$ соответствует неустойчивому положению равновесия $x=0$ уравнения (4.1); $a\approx0{,}50$ соответствует устойчивому предельному циклу $x\approx0{,}97\sin 0{,}93(t+t_0)$ уравнения (4.1) (отметим, что порядок отбрасываемых в ряду (4.4) членов равен 10^{-3}, размах колебаний при этом не является малым, так как вообще $|x|\leqslant\pi$); $a\approx0{,}99$ — этот корень надо отбросить, так как исследование неверно при a, близком к единице ($q\to1$ при $a\to1$).

Автор благодарит В. Ф. Журавлева, по инициативе и при постоянном внимании которого была сделана эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
2. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
4. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for nonlinear differential equations.— J. méc., 1969, v. 8, No. 3, p. 357—372.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.X.1983