**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1985**

УДК 531.38

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ, ПРИ НАЛИЧИИ УДАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

ИВАНОВ А. П.

В [1–4 и др.] изучены различные свойства движения твердого тела, подвешенного на натянутой струне.

В публикуемой статье учитывается возможность ослабления струны, которая рассматривается как односторонняя связь. Для динамически симметричного тела, прикрепленного к струне в некоторой точке своей оси, исследуется устойчивость периодических движений, складывающихся из перманентных вращений вокруг вертикали и виброударных движений вдоль вертикали.

Показано, в частности, что, как бы ни мала была амплитуда таких колебаний, они могут дестабилизировать вращение.

1. Будем считать струну нерастяжимой нескручиваемой нитью, один конец которой жестко закреплен в точке O вала мотора, сообщающего ей неизменяемую угловую скорость Ω. В [3] указано на различие движений тела в случаях шарнирного или жесткого его крепления к струне: во втором случае движение подчинено [5] кинематической связи вида $\omega_\tau=\Omega$, где ω_τ — проекция мгновенной угловой скорости ω на вектор τ, касательный к струне в точке O' ее крепления к телу. Такое различие, однако, исчезает, если точка O' лежит на оси динамической симметрии тела, а τ коллинеарен этой оси.

При этом приведенное выше равенство совпадает по форме с первым интегралом, выражающим в случае шарнирной подвески постоянство проекции кинетического момента тела на его ось. Следовательно, рассмотрение голономного случая достаточно для исследования обоих способов крепления.

Введем системы координат: инерциальную $OXYZ$ с осью Y, направленной вертикально вверх и связанную с телом $GX'Y'Z'$, где G — центр тяжести, а Z' — ось симметрии. Точка O' имеет в системе $GX'Y'Z'$ координаты $(0, 0, b)$.

Положение тела будем описывать углами Эйлера θ, ψ, φ и координатами r, α, β точки O' в сферической системе, связанной с $OXYZ$ посредством соотношений: $x=r\cos\alpha\cos\beta$, $y=r\sin\alpha\cos\beta$, $z=r\sin\beta$. Функция Лагранжа L имеет вид

$$L={}^1\!/_2\sum_{i,\,j=0}^{5} a_{ij}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}+U=\frac{m}{2}(x_G^{\cdot 2}+y_G^{\cdot 2}+z_G^{\cdot 2})+$$

$$+{}^1\!/_2A(q_3^{\cdot 2}+q_4^{\cdot 2}\sin^2 q_3)+{}^1\!/_2C(q_5^{\cdot}+q_4^{\cdot}\cos q_3)^2-mgy_G\qquad (q_0\geqslant 0)$$

$$x_G=(a-q_0)\cos q_1\cos q_2-b\sin q_3\sin q_4$$

$$y_G=(a-q_0)\sin q_1\cos q_2+b\sin q_3\cos q_4$$

$$z_G=(a-q_0)\sin q_2-b\cos q_3,\quad q_0=a-r,\quad q_1=\alpha,$$

$$q_2=\beta,\ q_3=\theta,\ q_4=\psi,\ q_5=\varphi$$

где m и mg — масса и вес тела, A и C — его экваториальный и осевой моменты инерции, a — длина натянутой струны.

Система уравнений с лагранжианом (1.1) допускает T-периодические решения вида

$$q_0={}^1/_2gt(T-t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T,\ q_0(t+T)=q_0(t) \tag{1.2}$$

$$q_1^\circ=-{}^1/_2\pi,\ q_2^\circ=0,\ q_3^\circ={}^1/_2\pi,\ q_4^\circ=\pi,\ q_5^\cdot=\Omega$$

для которых точки G и O' лежат на оси Y и совершают вдоль нее виброударное движение, а относительное движение — это перманентное вращение вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω.

При $T\to 0$ решения (1.2) переходят в один из видов стационарных движений тела на струне, исследованный в [4].

2. Исследуем устойчивость решений (1.2) по отношению к малым возмущениям величин q_i, $q_i^\cdot$ ($i=1,\ldots,4$) и T. Полагая $q_i=q_i^\circ+Q_i$, запишем линеаризованные по Q_i, $Q_i^\cdot$ уравнения, описывающие движение системы (1.1) в промежутках между ударами, в виде

$$x_G^{\cdot\cdot}=0,\ q_0^{\cdot\cdot}=-g,\ z_G^{\cdot\cdot}=0,\ q_5^{\cdot\cdot}=0 \tag{2.1}$$

$$AQ_3^{\cdot\cdot}+C\Omega Q_4^\cdot=0,\quad AQ_4^{\cdot\cdot}-C\Omega Q_3^\cdot=0$$

$$x_G=(a-q_0)Q_1+bQ_4,\quad z_G=(a-q_0)Q_2+bQ_3$$

Как следует из уравнений (2.1), изменение переменных q_0, q_5 описывается в первом приближении соотношениями (1.2). Проинтегрируем систему (2.1) на интервале $0\leqslant t<T$, считая $q_0(t)={}^1/_2gt(T-t)$, $q_5^\cdot=\Omega$:

$$Q_1=[a-q_0(t)]^{-1}(x_G^\circ+x_G^{\cdot\circ}t-bQ_4),\ Q_2=[a-q_0(t)]^{-1}(z_G^\circ+z_G^{\cdot\circ}t-bQ_3) \tag{2.2}$$

$$Q_3=Q_3^\circ+\omega^{-1}[Q_3^{\cdot\circ}\sin\omega t+Q_4^{\cdot\circ}(\cos\omega t-1)]$$

$$Q_4=Q_4^\circ+\omega^{-1}[Q_3^{\cdot\circ}(1-\cos\omega t)+Q_4^{\cdot\circ}\sin\omega t]$$

$$x_G^\circ=aQ_1^\circ+bQ_4^\circ,\ x_G^{\cdot\circ}=aQ_1^{\cdot\circ}-vQ_1^\circ+bQ_4^{\cdot\circ}$$

$$z_G^\circ=aQ_2^\circ+bQ_3^\circ,\ z_G^{\cdot\circ}=aQ_2^{\cdot\circ}-vQ_2^\circ+bQ_3^{\cdot\circ}$$

$$\omega=CA^{-1}\Omega,\quad v=q_0^{\cdot\circ}={}^1/_2gt$$

Для построения фундаментальной матрицы решений на промежутке $0\leqslant t\leqslant T$ необходимо учесть ударное взаимодействие при $t=T$. Для этого воспользуемся свойством непрерывности при ударе величин $\partial L/\partial Q_i^\cdot$ ($i=1,\ldots,4$) [6]. Положим

$$P_1=\partial L/\partial Q_1^\cdot-mavQ_1=m[a-q_0(t)](x_G^\cdot+Q_1y_G^\cdot)-mavQ_1 \tag{2.3}$$

$$P_2=\partial L/\partial Q_2^\cdot-mavQ_2=m[a-q_0(t)](z_G^\cdot+Q_2y_G^\cdot)-mavQ_2$$

$$P_3=\partial L/\partial Q_3^\cdot-mbvQ_3=mb(z_G^\cdot+Q_3y_G^\cdot)+AQ_3^\cdot-mbvQ_3$$

$$P_4=\partial L/\partial Q_4^\cdot-mbvQ_4+C\Omega Q_3=mb(x_G^\cdot+Q_4y_G^\cdot)+AQ_4^\cdot-mbvQ_4.$$

Связь между значениями переменных при $t=0$ и при $t=T$ устанавливается в силу (2.2), (2.3) соотношениями

$$Q_1^T=Q_1^\circ+\frac{T}{ma^2}P_1^\circ-\frac{b}{a\omega}[\varkappa_1(1-c_0)+\varkappa_2s_0] \tag{2.4}$$

$$Q_2^T=Q_2^\circ+\frac{T}{ma^2}P_2^\circ-\frac{b}{a\omega}[\varkappa_1s_0-(1-c_0)\varkappa_2]$$

$$Q_3^T=Q_3^\circ+\frac{1}{\omega}[\varkappa_1s_0-\varkappa_2(1-c_0)],\quad Q_4^T=Q_4^\circ+$$

$$+\frac{1}{\omega}[\varkappa_1(1-c_0)+\varkappa_2s_0],\quad P_1^T=P_1^\circ-2mavQ_1^T$$

$$P_2{}^T = P_2{}^\circ - 2mavQ_2{}^T, \qquad P_3{}^T = \frac{b}{a} P_2{}^\circ - 2mbvQ_3{}^T +$$

$$+ A(\varkappa_1 c_0 - \varkappa_2 s_0), \qquad P_4{}^T = \frac{b}{a} P_1{}^\circ - 2mbvQ_4{}^T + A(\varkappa_1 s_0 + \varkappa_2 c_0),$$

$$\varkappa_1 = Q_3{}^{\cdot\circ} = \frac{1}{A}\left(P_3{}^\circ - \frac{b}{a} P_2{}^\circ\right)$$

$$\varkappa_2 = Q_4{}^{\cdot\circ} = \frac{1}{A}\left(P_4{}^\circ - \frac{b}{a} P_1{}^\circ\right), \qquad s_0 = \sin \omega T, \qquad c_0 = \cos \omega T$$

Характеристическое уравнение $\det \|\mathbf{N} - \rho \mathbf{E}_8\| = 0$, где матрица $\mathbf{N}$ осуществляет линейное преобразование значений Q°, P° в значения Q^T, P^T по формулам (2.4), является возвратным. Посредством замены $w = {}^1/_2(\rho + 1/\rho)$ оно может быть преобразовано к виду

$$\chi(w) = (w-1)(w-r_1)^2(w-c_0) +$$
$$+ 2\varepsilon s_0 (w-1)(w-r_1)(w-r_2) + 2\varepsilon^2(1-c_0)(w-r_2)^2 =$$
$$= w^4 + a_3 w^3 + a_2 w^2 + a_1 w + a_0 = 0 \tag{2.5}$$

$$\varepsilon = \frac{mgTb(a+b)}{2aC\Omega}, \qquad r_1 = 1 - \frac{gT^2}{2a}, \qquad r_2 = 1 - \frac{gT^2}{2(a+b)}$$

Для устойчивости решений (1.3) необходимо, чтобы уравнение (2.5) имело четыре корня в промежутке $[-1, 1]$. Как известно, это эквивалентно выполнению системы неравенств

$$|a_3| \leqslant 4, \quad 3|a_3| \leqslant a_2 + 6, \quad |3a_3 + a_1| \leqslant 4 + 2a_2 \tag{2.6}$$
$$|a_3 + a_1| \leqslant 1 + a_0 + a_2, \quad b_1 \geqslant 0, \quad b_2 \leqslant 0$$
$$27b_0{}^2 - 18b_0 b_1 b_2 + 4b_0 b_2{}^3 + 4b_1{}^3 - b_1{}^2 b_2{}^2 \leqslant 0$$

$$b_0 = -\left(\frac{1}{8} a_3{}^3 - {}^1/_2 a_2 a_3 + a_1\right)^2, \qquad b_1 = \frac{3}{16} a_3{}^4 - a_3{}^2 a_2 + a_2{}^2 + a_3 a_1 - 4a_0,$$
$$b_2 = 2a_2 - \frac{3}{4} a_3{}^2$$

При выполнении неравенств (2.6) и отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков в общем случае невырожденности нормальной формы имеет место [7] устойчивость решений (1.2) для большинства начальных условий.

3. Рассмотрим подробнее некоторые случаи движения. Если точки G и O' совпадают (тело прикреплено к струне в центре тяжести), то $b=0$ и в (1.1) переменные q_0, q_1, q_2, описывающие движение центра тяжести, отделяются от переменных q_3, q_4, q_5, описывающих относительное движение. В уравнении (2.5) $\varepsilon=0$, его корни $w=1$ и $w=c_0$ соответствуют относительному движению, являющемуся регулярной прецессией, близкой к исходному перманентному вращению, а кратному корню $w=r_1$ отвечают простые элементарные делители определяющей матрицы. Условие устойчивости в первом приближении в рассматриваемом случае $b=0$ принимает вид

$$qT^2 < 4a \tag{3.1}$$

Отметим, что условие (3.1) совпадает с условием устойчивости виброударного движения тяжелой точки в вертикальной плоскости не ниже гладкой кривой, радиус кривизны которой в ударной точке равен a [8].

Пусть теперь $b \neq 0$, а скорость вращения Ω велика, так что $\varepsilon \ll 1$. Представим корни уравнения (2.5) в виде степенных рядов по малому параметру ε:

$$w_j = w_j^\circ + \sum_{m=1}^{\infty} c_{jm}\varepsilon^m \quad (j=1,\ldots,4) \tag{3.2}$$

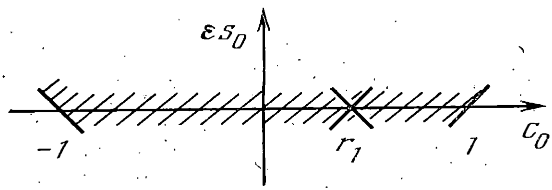
где w_j° — корни уравнения (2.5) при $\varepsilon=0$. Подставляя (3.2) в (2.5) при $j=1,\ldots,4$, последовательно получаем

$$w_1 = 1-2(1-r_2)^2\varepsilon^2/(1-r_1)^2+O(\varepsilon^3) \tag{3.3}$$

$$w_{2,3} = r_1 - \varepsilon s_0 \frac{r_2-r_1}{c_0-r_1} \pm (1-c_0)\frac{r_2-r_1}{c_0-r_1}\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)^{1/2} + O(\varepsilon^2)$$

$$w_4 = c_0 - 2\varepsilon s_0(c_0-r_2)/(c_0-r_1)+O(\varepsilon^2)$$

Как следует из (3.3), при $c_0\neq\pm1$, $c_0\neq r_1$ условие (3.1) устойчивости при $\varepsilon=0$ оказывается достаточным и для устойчивости в первом приближении при достаточно малых значениях ε. Значения параметров при $c_0=\pm1$ и при $c_0=r_1$ соответствуют появлению в системе параметрических



резонансов. На фигуре представлена область $|w_i|\leqslant1$ $(i=1,\ldots,4)$ для малых значений ε. Здесь границей области устойчивости вблизи точки $c_0=1$ является кривая $w_4=1$, аппроксимируемая при малых ε отрезком прямой $\varepsilon s_0={}^1/_2(c_0-1)(1-r_1)/(1-r_2)={}^1/_2(a+b)(c_0-1)/a$; вблизи точки $c_0=-1$ — кривая $w_4=-1$, аппроксимируемая отрезком прямой $\varepsilon s_0={}^1/_2(c_0+1)(1+r_1)/(1+r_2)$, а вблизи резонанса $c_0=r_1$ область устойчивости определяется как решение системы шести линейных неравенств вида

$$1-r_1\geqslant\varepsilon s_0(r_1-r_2)(1\pm\sqrt{1+r_1})/(c_0-r_1)\geqslant-1-r_1$$

$$1-r_1\geqslant2\varepsilon s_0(r_2-r_1)/(c_0-r_1)\geqslant-1-r_1$$

Как следует из проведенного анализа, наличие параметрических резонансов может привести к неустойчивости решений (1.2) при сколь угодно малых значениях ε.

Автор благодарит А. П. Маркеева за помощь в постановке задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 3–18.
2. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 3–16.
3. *Румянцев В. В.* К динамике твердого тела, подвешенного на струне.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 5–15.
4. *Морозова Е. П.* Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 5, с. 621–626.
5. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
7. *Иванов А. П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 5, с. 725–732.
8. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 632–636.

Москва

Поступила в редакцию
22.VIII.1984