МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1985

УДК 531.37

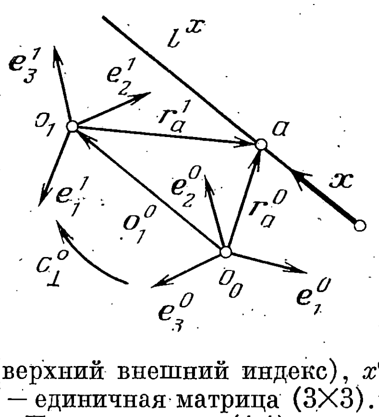
МАТРИЧНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

КОНОПЛЕВ В. А.

Использование традиционных методов решения задач динамики свободного твердого тела, особенно в фазовом пространстве механических состояний при условии выбора произвольной связанной системы координат сталкивается со значительными трудностями технического характера. Причина в том, что формулировки всех классических уравнений движения свободного твердого тела (Эйлера – Лагранжа, Лагранжа II рода, Аппеля, векторные и тому подобное) имеют алгоритмическую форму, недопускающую непосредственного интегрирования на ЭВМ [1]. Проведение вычислений возможно лишь с использованием шести скалярных равенств, получаемых в результате выполнения действий, предписанных указанными алгоритмами (вычисление трехиндексных символов Больцмана, символов Кристофеля первого и второго рода, градиентов кинетической энергии, векторных и смешенных произведений и тому подобное) [2]. При решении простых задач (одномерных, стержневых, а также допускающих использование приближенных методов) это делается без особых трудностей, а расчетные формулы имеют лаконичную форму. В общем случае указанный процесс трудоемок, а получаемые при этом громоздкие скалярные уравнения практически необозримы и никогда не гарантированы от наличия ошибок. При разработке программ вычислений по этим равенствам большая часть матобеспечения ЭВМ остается неиспользованной. Программы насыщены простейшими арифметическими операторами и поэтому, как и сами уравнения, громоздки. Отладка таких программ представляет самостоятельную проблему.

В публикуемой работе предлагается несколько новых, матричных нормальных форм уравнений движения свободного твердого тела, лишенных вышеуказанных недостатков [3]. Уравнения сочетают в себе компактность записи с возможностью непосредственного интегрирования на ЭВМ стандартными методами численного анализа, минуя трудоемкую стадию составления скалярных равенств. Полученные уравнения удобны также при исследовании движения систем твердых тел [4].

1. Вывод уравнений движения свободного твердого тела в пространствах квазискоростей и квазикоординат основан на матричном представлении координатного столбца l_0^{x0} скользящего вектора l_0^x, порождаемого свободным вектором $\mathbf{x}$ и прямой l^x в декартовой системе координат $E_0=(o_0, [\mathbf{e}^0])$ с началом o_0 и ортонормированным базисом $[\mathbf{e}^0]=(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0)$:



$$l_0^{x0} = S_0^0 \| x^0, x^0 \|, \quad S_0^0 = \left\| \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & \langle r_a^0\rangle^0 \end{array} \right\| \qquad (1.1)$$

где $\langle r_a^0\rangle^0$ — кососимметрическая матрица [1], порожденная координатным столбцом r_a^{00} радиус-вектора r_a^0 произвольной точки a на линии l^x (нижний индекс) в E_0 (верхний внешний индекс) и базисе $[\mathbf{e}^0]$ (верхний внешний индекс), x^0 — координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в $[\mathbf{e}^0]$, E — единичная матрица (3×3).

Представление (1.1) позволяет записать в компактной и одновременно удобной для аналитических преобразований и вычислений на ЭВМ форме сложные при традиционном подходе [5] формулы перехода к новой декартовой системе координат $E_1=(o_1, [\mathbf{e}^1])$. Пусть o_1^{00} и C_1^0 — вектор параллельного переноса и матрица вращения при переходе от E_0 к E_1 (фиг. 1), тогда формулы преобразования имеют вид

$$l_0^{x0}=L_1^{00}l^x{}_1^1,\quad L_1^{01}=T_1^{01}[C_1^0] \tag{1.2}$$

где T_1^{00}, $[C_1^0]$ — матрицы (6×6) параллельного переноса (приведения скользящего вектора к новому началу $o_1 \in E_1$) и вращения вида

$$T_1^{00}=\left\|\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline \langle 0_1^0\rangle^0 & E \end{array}\right\|,\qquad [C_1^0]=\left\|\begin{array}{c|c} C_1^0 & 0 \\ \hline 0 & C_1^0 \end{array}\right\| \tag{1.3}$$

Множество $\mathbf{L}(\mathbf{R}, 6)$ матриц L_{k+1}^{kk} обладает групповыми свойствами, в частности,

$$L_n{}^{00}=L_1{}^{00}L_2{}^{11}L_n^{n-1,\,n-1},\qquad (L_1{}^{00})^{-1}=L_0{}^{11} \tag{1.4}$$

Заметим, что сумма скользящих векторов в общем случае не является скользящим вектором. Класс эквивалентности, состоящий из всех систем скользящих векторов, приводящихся к одному и тому же винту, будем, как обычно, называть винтом [5, 6].

При помощи формул (1.1) и (1.2) легко получаются матричные представления кинетических винтов [6] свободного твердого тела Z_0^0 и Z_1^1 в E_0 и E_1

$$Z_0^0=L_1^{00}Z_1^1,\quad Z_1^1=\Theta_1^1V_1^{01} \tag{1.5}$$

где $V_1^{01}=\|v_1^{01},\ \omega_1^{01}\|^T$ — вектор квазискоростей свободного твердого тела [1], Θ_1^1 — матрица (6×6) инерции Мизеса [6, 7].

$$\Theta_1{}^1=\left\|\begin{array}{c|c} Em & \langle r_c{}^1\rangle^{1T}m \\ \hline \langle r_c{}^1\rangle^1 m & \theta_1{}^1 \end{array}\right\| \tag{1.6}$$

r_c^{11} — радиус-вектор центра масс тела в связанной системе координат E_1, θ_1^1 — матрица (3×3) тензора инерции, вычисленная в точке o_1 и базисе $[\mathbf{e}^1]$, m — масса тела.

Используя теорему об изменении кинетического винта свободного твердого тела [6]

$$Z_0^{0\bullet}=F_0^0 \tag{1.7}$$

где F_0^0 — динамический винт внешних сил, действующих на тело, с учетом (1.5) и (1.4), получаем матричную форму записи уравнений движения свободного твердого тела в пространстве квазискоростей

$$\Theta_1{}^1V_1^{01*}+\Phi_1{}^{01}\Theta_1{}^1V_1{}^{01}=F_1{}^1 \tag{1.8}$$

где $V_1^{01*}=\|v_1^{01*},\omega_1^{01*}\|^T$ — вектор квазиускорений свободного твердого тела (звездочка — операция дифференцирования в связанной системе координат E_1), Φ_1^{01} — блочная (6×6) матрица вида

$$\Phi_1{}^{01}=L_0{}^{11}\cdot L_1^{00\cdot}=\left\|\begin{array}{c|c} \langle\omega_1{}^0\rangle^1 & 0 \\ \hline \langle v_1{}^0\rangle^1 & \langle\omega_1{}^0\rangle^1 \end{array}\right\| \tag{1.9}$$

Уравнение (1.8) является матричным аналогом векторных уравнений движения и уравнений движения Эйлера — Лагранжа. Оно выгодно отличается от них тем, что записано в нормальной матричной форме и, следовательно, легко интегрируется любым стандартным методом без предварительного составления скалярных уравнений.

Если ввести вектор квазикоординат, как обычно [1], равенствами

$$\pi^{\circ}=V_1^{01},\quad \pi^{\circ\circ}=V_1^{01*} \tag{1.10}$$

то, после умножения равенства (1.8) слева на матрицу $(\Theta_1{}^1)^{-1}\equiv\Theta_1{}^{-1}$, получаем матричную форму записи уравнений движения свободного твердого тела в квазикоординатах

$$\pi^{\circ\circ}+\Phi_\pi\pi^{\circ}=\Theta_1{}^{-1}F_1{}^1,\ \Phi_\pi=\Theta_1{}^{-1}\Phi_1{}^{01}\Theta_1{}^1 \tag{1.11}$$

В случае движения тела в поле тяготения с ускорением g имеем $F_1{}^1=$ $=Q_1{}^1+P_1{}^1$, где $Q_1{}^1$, $P_1{}^1$ — динамические винты сил тяготения и внешних сил

$$Q_1{}^1=S_1{}^1[C_1{}^0]\|\lambda,\ \lambda\|^T \tag{1.12}$$

где $\lambda=\|0,\ 0,\ mg\|^T$, если орт $\mathbf{e}_3{}^0$ направлен к центру тяготения.

2. В качестве векторов обобщенных координат, скоростей и ускорений, как обычно, принимаются [1]

$$q=\|o_1{}^{00},\ \alpha\|^T,\ q^{\bullet}=\|v_1{}^{00},\ \alpha^{\bullet}\|^T,\ q^{\bullet\bullet}=\|w_1{}^{00},\ \alpha^{\bullet\bullet}\|^T \tag{2.1}$$

где $\alpha=\|\alpha_1{}^0\alpha_2{}^1,\ \alpha_3{}^2\|^T$ — вектор углов ориентации твердого тела в $[\mathbf{e}^0]$, $v_1{}^{00}=$ $=o_1{}^{00\bullet}$ — координатные столбцы векторов линейных скоростей и ускорений тела относительно E_0 в базисе $[\mathbf{e}^0]$.

Связь векторов π° и $q^{\bullet}$ имеет вид

$$\pi^{\circ}=Dq^{\bullet},\qquad D=[C_1^{0T}]\,M_0{}^E,\qquad M_0{}^E=\left\|\begin{array}{c|c} E & 0\\ \hline 0 & M_0\end{array}\right\| \tag{2.2}$$

где M_0 — матрица кинетических уравнений Эйлера [1]

$$\omega_1{}^{00}=M_0\alpha^{\bullet},\ \omega_1{}^{01}=M_1\alpha^{\bullet},\ M_0=C_1{}^0M_1 \tag{2.3}$$

Подставляя зависимость (2.2) в уравнение (1.11), получаем

$$q^{\bullet\bullet}+(\Phi_1{}^{0q}+D^{-1}D^{\bullet})\,q^{\bullet}=D^{-1}\Theta_1{}^{-1}F_1{}^1,\ \Phi_1{}^{0q}=D^{-1}\Phi_1{}^{01}D \tag{2.4}$$

Учитывая, что

$$D^{\bullet}=[C_1{}^{0T}]\,(M_0{}^{E\bullet}-[\langle\omega_1{}^0\rangle^0]M_0{}^E),\ \langle\omega_1{}^0\rangle^0\omega_1{}^{00}=0$$

и используя методы работы [8], получаем

$$D^{-1}D^{\bullet}q^{\bullet}=K_1{}^0q^{\bullet}=\left\|\begin{array}{c|c}\langle\omega_1{}^0\rangle^{0T} & 0\\ \hline 0 & M_0^{-1}M_0{}^{\bullet}\end{array}\right\|q^{\bullet} \tag{2.5}$$

$$M_0{}^{\bullet}=[0;\ \langle\omega_1{}^0\rangle^0C_1{}^0\mathbf{e}_i{}^1;\ \langle\omega_2{}^0\rangle^0C_2{}^0\mathbf{e}_i{}^0]$$

$$C_1{}^0=C_i(\alpha_1{}^0),\ C_2{}^0=C_1{}^0\cdot C_2{}^1=C_i(\alpha_1{}^0)\,C_i(\alpha_2{}^1)$$

$$\langle\omega_1{}^0\rangle^0=\langle e_i{}^0\rangle^0\alpha_1{}^{0\bullet},\ \langle\omega_2{}^0\rangle^0=\langle\omega_1{}^0\rangle^0+C_1{}^0\langle\omega_2{}^1\rangle^1C_1{}^{0T}=$$

$$=\langle e_i{}^0\rangle^0\alpha_1{}^{0\bullet}+C_i(\alpha_1{}^0)\langle e_i{}^1\rangle^1C_i^T(\alpha_1{}^0)\,\alpha_2{}^{1\bullet}$$

Здесь $\mathbf{e}_i{}^k$ — орт k-го поворота с i-ой осью, $C_i(\alpha_{k+1}^k)$ — простейшая матрица вращения на угол α_{k+1}^k с единицей на месте $(i,\ i)$, $(i,\ k\in\overline{1,\ 3})$:

$$\langle\omega_1{}^0\rangle^0=\sum_{k=0}^{2}C_k{}^0\,\langle e_i^k\rangle^k\,C_k^{0T}\alpha_{k+1}^k \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем две новые эквивалентные формы записи уравнений движения свободного твердого тела в обобщенных координатах

$$q^{\cdot\cdot}+\Phi_1(q,\ q^\cdot)\,q^\cdot=A_1^{-1}F_1^1 \tag{2.7}$$

$$A_1(q)\,q^{\cdot\cdot}+B_1(q,\ q^\cdot)\,q^\cdot=F_1^1 \tag{2.8}$$

$$A_1(q)=\Theta_1^1D,\quad \Phi_1(q,\ q^\cdot)=K_1^0+A_1^{-1}(q)\,\Phi_1^{01}A_1(q)$$

$$B_1(q,\ q^\cdot)=A_1(q)\,K_1^0+\Phi_1^{01}A_1(q)$$

Уравнения (2.7) и (2.8) по внешнему виду похожи на соответствующие уравнения Лагранжа второго рода, но, тем не менее, не являются их матричными аналогами: матрица $A_1(q)$ не является матрицей кинетической энергии $A(q)=D^TA_1(q)=D^T\Theta_1^1D$, динамический винт F_1^1 не является вектором обобщенных сил $Q=D^TF_1^1$, отнесенных к обобщенным координатам q, в матрицах $\Phi_1(q,\ q^\cdot)$ и $B_1(q,\ q^\cdot)$ фигурирует матрица $A_1(q)$, а не матрица кинетической энергии.

Вводя в соответствующие места уравнений (2.7) и (2.8) единичную матрицу $E=(D^T)^{-1}D^T$ и домножая уравнение (2.8) слева на матрицу D^T, получаем равенства, являющиеся матричными аналогами уравнений Лагранжа второго рода.

$$q^{\cdot\cdot}+\Phi_q(q,\ q^\cdot)\,q^\cdot=A^{-1}(q)\,Q \tag{2.9}$$

$$A(q)\,q^{\cdot\cdot}+B(q,\ q^\cdot)\,q^\cdot=Q \tag{2.10}$$

$$\Phi_q(q,\ q^\cdot)=K_1^0+A^{-1}(q)\,\Phi_1^{0q}A(q),\quad \Phi_1^{0q}=D^T\Phi_1^{01}D$$

$$B(q,\ q^\cdot)=A(q)\,K_1^0+\Phi_1^{0q}A(q),\quad A(q)=D^T\Theta_1^1D$$

Уравнения (2.9) и (2.10) получаются также формальной заменой матрицы $A_1(q)=\Theta_1^1D$ на матрицу кинетической энергии $A(q)=D^T\Theta_1^1D$ и матрицы Φ_1^{01} на матрицу Φ_1^{0q}. Это преобразование является усложняющим, следовательно, хорошо известные скалярные уравнения движения свободного твердого тела, получаемые с помощью процедур Лагранжа второго рода сложнее уравнений, получаемых с помощью матричных операций из (2.7)—(2.8): они содержат члены, эквивалентные нулю. Основное преимущество уравнений (2.7), (2.8) в том, что их использование вообще исключает необходимость составления скалярных равенств, так как они записаны в виде готовом к использованию на ЭВМ.

Сравнивая уравнения (2.9) и (2.10) со стандартными формами записи уравнений Лагранжа второго рода [1], получаем следующие тождества

$$d/dt\,\mathrm{grad}_{q^\cdot}T-\mathrm{grad}_qT\equiv A(q)\,q^{\cdot\cdot}+B(q,\ q^\cdot)\,q^\cdot \tag{2.11}$$

$$\left\|\cdots\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\begin{Bmatrix}s\\ ij\end{Bmatrix}q_i^\cdot q_j^\cdot\cdots\right\|^T\equiv\Phi_q(q,q^\cdot)\,q^\cdot\qquad(s=1,2,\ldots,6) \tag{2.12}$$

в которых правые части являются матричными представлениями левых.

Часто изучается только вращательное движение твердого тела с полюсом в центре масс ($r_c^{11}\equiv0$). В этом случае из (2.7) получаем матричное уравнение

$$\alpha^{\cdot\cdot}=M_1^{-1}[\theta_1^{-1}(M_1^{f1}-\langle\omega_1^0\rangle^0\theta_1^1M_1\alpha^\cdot)-C_1^{0T}M_0^\cdot\alpha^\cdot] \tag{2.13}$$

где M_1^{f1} — главный момент динамического винта $F_1^1=\|F^1,\ M_1^{f1}\|^T$.

3. Матричное уравнение движения свободного твердого тела в фазовом пространстве механических состояний получается подстановкой в производную вектора $\mathbf{x}=\|q,\ q^\cdot\|^T$ вектора $q^{\cdot\cdot}$ из (2.7)

$$\mathbf{x}^\cdot=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t),\quad \mathbf{f}(\mathbf{x},\ t)=\|q^\cdot,\ q^{\cdot\cdot}\|^T \tag{3.1}$$

Если вектор $F_1{}^1$ в (2.7) зависит от вектора управления $\mathbf{u}\in R_m$, то получаем матричное уравнение управляемого движения свободного твердого тела в виде

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2), где $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ — явная гладкая вектор-функция своих аргументов, позволяет решать задачи управления и устойчивости движения свободного твердого тела классическими методами соответствующих теорий. Уравнение (3.2) легко линеаризуется в окрестности программного движения, так как столбцы матриц Якоби при наличии матричного представления (2.7) вектора $q^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ легко вычисляются в явном виде.

В заключение отметим, что все полученные в статье матричные уравнения позволяют простым перемножением матриц получать различные формы скалярных уравнений движения свободного твердого тела (если таковые понадобятся) без обращения к известным трудоемким алгоритмам.

4. С прикладной точки зрения полученные формы уравнений движения твердого тела обладают очевидными преимуществами перед известными: они компактны, разрешены относительно старших производных, готовы к использованию на ЭВМ без каких-либо предварительных приготовлений, записаны в терминах элементарных матриц (элементами которых являются только элементарные функции), что исключает использование в программах ЭВМ простейших арифметических операторов, удобны для аналитических преобразований алгебраическими методами.

Матричные коэффициенты уравнений не нужно вычислять предварительно, это делает ЭВМ. Для иллюстрации теории, в качестве примера, покажем, по каким формулам будут выполняться указанные вычисления для трех наиболее пространственных систем углов ориентации свободного твердого тела [1].

Эйлерова матрица ориентации $C_3{}^0=C_3(\psi_1)C_1(\varphi)C_3(\psi_2)$, $C_1{}^0=C_3(\psi_1)$, $C_2{}^0=C_3(\psi_1)C_1(\varphi)$, $\langle\omega_1{}^0\rangle^0=\langle e_3\rangle\dot{\psi}$, $\langle\omega_2{}^0\rangle^0=\langle e_3\rangle\dot{\psi}_1+C_3(\psi_1)\langle e_1\rangle C_3{}^{\mathrm{T}}(\psi_1)\dot{\varphi}$, $\langle\omega_3{}^0\rangle^3=C_3{}^{0\mathrm{T}}\langle\omega_3{}^0\rangle^0\times C_3{}^0$, $\langle\omega_3{}^0\rangle^0=\langle\omega_2{}^0\rangle^0+C_3(\psi_1)C_1(\varphi)\langle e_3\rangle C_1{}^{\mathrm{T}}(\varphi)C_3{}^{\mathrm{T}}(\psi_1)\dot{\psi}_2$.

Корабельная матрица ориентации: $C_3{}^0=C_3(\psi_k)C_2(\theta_k)C_1(\varphi_k)$, $C_1{}^0=C_3(\psi_k)$, $C_2{}^0=C_3(\psi_k)C_2(\theta_k)$, $\langle\omega_1{}^0\rangle^0=\langle e_3\rangle\dot{\psi}_k$, $\langle\omega_2{}^0\rangle^0=\langle\omega_1{}^0\rangle^0+C_3(\psi_k)\langle e_2\rangle C_3{}^{\mathrm{T}}(\psi_k)\dot{\theta}_k$, $\langle\omega_3{}^0\rangle^3=C_3{}^{0\mathrm{T}}\times\langle\omega_3{}^0\rangle^0C_3{}^0$, $\langle\omega_3{}^0\rangle^0=\langle\omega_2{}^0\rangle^0+C_3(\psi_k)C_2(\theta_k)\langle e_1\rangle C_2{}^{\mathrm{T}}(\theta_k)C_3{}^{\mathrm{T}}(\psi_k)\dot{\varphi}_k$.

Самолетная матрица ориентации: $C_3{}^0=C_2(\theta_c)C_3(\psi_c)C_1(\varphi_c)$, $C_1{}^0=C_2(\theta_c)$, $C_2{}^0=C_2(\theta_c)C_3(\psi_c)$, $\langle\omega_1{}^0\rangle^0=\langle e_2\rangle\dot{\theta}_c$, $\langle\omega_2{}^0\rangle^0=\langle\omega_1{}^0\rangle^0+C_2(\theta_c)\langle e_3\rangle C_3{}^{\mathrm{T}}(\theta_c)\dot{\psi}_c$, $\langle\omega_3{}^0\rangle^3=C_3{}^{0\mathrm{T}}\times\langle\omega_3{}^0\rangle^0C_3{}^0$, $\langle\omega_3{}^0\rangle^0=\langle\omega_2{}^0\rangle^0+C_2(\theta_c)C_3(\psi_c)\langle e_1\rangle C_3{}^{\mathrm{T}}(\psi_c)C_2{}^{\mathrm{T}}(\theta_c)\dot{\varphi}_c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Коренев Г. В.* Цель и приспособляемость движений. М.: Наука, 1974. 528 с.
3. *Коноплев В. А.* Операторное уравнение движения твердого тела в пространстве скоростей. Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1982, вып. 6, с. 54—57.
4. *Коноплев В. А.* Матричные формы уравнений движения носителей роторов-манипуляторов. III Всес. совещ. по робототехническим системам. Тез. докл. Воронеж: Изд-во Воронеж. политехн. ин-та, 1984, ч. I, с. 57—58.
5. *Меркин Д. Р.* Алгебра свободных и скользящих векторов. М.: Физматгиз, 1962. 163 с.
6. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
7. *Mises R.* Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik.— Z. angew. Math. und Mech., 1924, Bd. 4, H. 2, S. 155—181.
8. *Коноплев В. А.* Исследование кинематики сложного движения тела с помощью матричных методов.— Прикл. механика, 1984, т. 20, № 9, с. 130—131.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.III.1984