МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1985

УДК 531.355

УПРАВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТЬЮ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

КОСТРОВ А. В.

В общем случае указанное движение описывается «жесткими» уравнениями [1, 2], интегрирование которых традиционными явными методами (типа Рунге — Кутта, Адамса) оказывается неустойчивым. Применение для этого неявных или явно-неявных (предсказывающе — уточняющих) методов [3] связано с неоправданно большими затратами. Повышение устойчивости интегрирования стабилизацией погрешности вычислений (способом «двух разных шагов интегрирования» [4]) либо малоэффективно при большой жесткости системы, либо требует дополнительных преобразований [5] или дополнительных дифференциальных уравнений [6], что ведет к усложнению алгоритма и возрастанию затрат на интегрирование.

В публикуемой работе дается метод управления устойчивостью интегрирования уравнений свободного пространственного движения тела традиционными явными разностными методами по информации о суммарной (методической и инструментальной) ошибке вычисления матрицы ориентации в одном цикле расчета остальных параметров движения тела.

Основу метода составляют операции контроля ортогональности матрицы ориентации тела, ортогонализации этой матрицы и настройки в зависимости от степени неортогональности матрицы шага интегрирования без изменения формулы разностного метода интегрирования.

1. Математическая формализация задачи разработки метода может быть представлена следующим образом. Решается задача Коши

$$d\mathbf{y}/dt=\mathbf{f}(t,\ \mathbf{y}),\ \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0,\ t\in[t_0,\ t_c],\ \mathbf{f}\in R^n \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{y}$ — вектор параметров движения тела, $\mathbf{f}$ — вектор-функция правых частей системы уравнений, t — независимая переменная, $\mathbf{y}_0$ задан. Система (1.1) имеет единственное решение (если оно существует), т. е. удовлетворяет условию Липшица $\|\mathbf{f}(t,\ \mathbf{y}_1)-\mathbf{f}(t,\ \mathbf{y}_2)\|\leqslant L\|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\|$ для всех $t\in\in[t_0, t_c]$ и всех компонент векторов $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ (L — константа Липшица). Решение задачи (1.1), представляемое в общем виде как

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t,\ (t_0,\ \mathbf{y}_0)=\mathbf{y}(t) \qquad (1.2)$$

аппроксимируется с учетом погрешностей округлений разностным k — шаговым методом:

$$\mathbf{y}_r^\vee=\mathbf{S}_r(h)+\delta_r\ \ (0\leqslant r\leqslant k) \qquad (1.3)$$

$$\sum_{i=0}^{k} A_i\mathbf{y}_{n+i}=h\,[\varphi(t_n,\mathbf{y}^\vee{}_n,h)+\delta_{n+k},\quad (0\leqslant n\leqslant n-k)$$

где h — шаг интегрирования, A_i — постоянная матрица, φ — заданная функция, зависящая от $\mathbf{f}$, δ_r, δ_{n+k} — возмущения (при $\delta_r=\delta_{n+k}=0$, $\mathbf{y}_n^\vee=\mathbf{y}$), $\mathbf{y}_n^\vee$ — приближение к $\mathbf{y}(t_n)$ — точному решению (1.2) в точке t_n, $t_n=t_0+nh$, $Nh==t_0-t_c$.

Задача заключается в том, чтобы сформировать (в зависимости от соотношения величины некоторой заранее выбранной критериальной функции $\varepsilon_n=\varepsilon(\mathbf{y}_n^{\vee *}, C)$, C — векторный или матричный параметр, с ее пороговым значением ε_0) такие управления на n-м шаге интегрирования $\Delta h(n)$ и $\Delta \mathbf{y}(n)$ соответственно для шага интегрирования $h(n)$ и вектора $\mathbf{y}(n)$, которые бы обеспечили выполнение неравенства

$$\max|\mathbf{y}^*(t_n)-\mathbf{y}_n^{\vee *}\|\leqslant\|\Delta\mathbf{y}\|_* \tag{1.4}$$

где $\|\Delta\mathbf{y}\|_*$ — предельное значение нормы ошибки. Векторы $\mathbf{y}_n^{\vee *}$, $\mathbf{y}^*(t_n)$ могут представлять собой как полнокомпонентные векторы $\mathbf{y}_n^{\vee}$, $\mathbf{y}(t_n)$, так и векторы с неполным числом интегрируемых параметров движения.

2. Примем в качестве интегральной характеристики движения тела в безграничной сопротивляющейся среде суммарную кинетическую энергию тела T_1 и среды T_2 [7, 8]:

$$T=T_1+T_2 \tag{2.1}$$

$$T_1={}^1/_2 m\mathbf{v}_O^2+m\mathbf{v}_O(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})+{}^1/_2\boldsymbol{\omega}\times I^{(O)}\boldsymbol{\omega},\quad T_2={}^1/_2\mathbf{q}^T\Lambda\mathbf{q}$$

Здесь m, $I^{(O)}$ — масса и тензор инерции тела в точке полюса O, $\boldsymbol{\rho}$ — вектор центра масс тела, $\mathbf{v}_O$, $\boldsymbol{\omega}$ — векторы поступательной (полюса O) и угловой скорости тела относительно инерциального пространства, $\mathbf{q}=[\mathbf{v}_O, \boldsymbol{\omega}]$ — вектор обобщенной скорости, $\Lambda=(\lambda_{ij})$ — симметричная матрица присоединенных масс среды (при $j=1, 2, 3$ и $i=1, 2, 3$ коэффициенты λ_{ij} имеют размерности массы, а при $j=4, 5, 6$ и $i=4, 5, 6$ — размерность моментов инерции).

Методом Эйлера — Лагранжа динамические уравнения движения тела представляются в виде

$$d/dt\,\mathrm{grad}_{\mathbf{v}_O}T+\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{grad}_{\mathbf{v}_O}T=\mathbf{F} \tag{2.2}$$

$$d/dt\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\omega}}T+\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\omega}}T+\mathbf{v}_O\times\mathrm{grad}_{\mathbf{v}_O}T=\mathbf{M}_O$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}_O$ — главный вектор и главный момент (относительно полюса O) внешних сил. Запись уравнений, отнесенных к полюсу, дает ряд преимуществ при описании неустановившегося движения асимметричных тел [12]. После подстановки выражения (2.1) в уравнения (2.2) получаются динамические уравнения движения тела, записанные относительно производных $d\mathbf{v}_O/dt$, $d\boldsymbol{\omega}/dt$. Интегрирование этих уравнений в скалярной форме (в проекциях на оси связанной системы координат) дает как функции времени составляющие поступательной (v_{Ox}, v_{Oy}, v_{Oz}) и угловой (ω_x, ω_y, ω_z) скоростей, по которым определяется кинематика движения соответственно уравнениями поступательного и вращательного движения

$$d\mathbf{r}_O/dt=A^T\mathbf{v}_O,\quad dA/dt=-\Omega A \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{r}_O$ — вектор положения полюса тела относительно начала инерциальной системы координат (совпадающего, например, с центром планеты, относительно которой рассматривается движение), A^T — матрица ориентации тела, Ω — кососимметрическая матрица размера 3×3, элементами которой являются проекции вектора ω на оси связанной системы координат, т — символ транспонирования матрицы. Векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}_O$ определяются как суммы главных векторов и главных моментов соответственно аэрогидродинамических сил, гидростатических силы и момента и гравитационных силы и момента.

Начальные условия движения тела в проекциях на оси связанной (s) и инерциальной (ξ) систем координат представляются соответственно в виде

$$\mathbf{v}_{Os}(t_0)=\mathbf{v}_{Os0}=[v_{Ox0}, v_{Oy0}, v_{Oz0}]^T,\quad \boldsymbol{\omega}_s(t_0)=\boldsymbol{\omega}_{s0}=[\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}]^T \tag{2.4}$$

$$\mathbf{r}_O(t_0)=\mathbf{r}_{O0}=[x_{O\xi0}, y_{O\xi0}, z_{O\xi0}]^T,\quad A(t_0)=A_0=(a_{ij})_0\quad (i, j=1, 2, 3)$$

Наиболее неустойчиво численно интегрируется второе уравнение (2.3), представляющее собой наиболее «жесткую» совокупность скалярных уравнений в общей системе. Быстро накапливается ошибка вычисления матрицы A, проявляющаяся в нарушении ортогональности этой матрицы и, как следствие, в неустойчивости расчета траектории тела. При этом выполнение условия ортогональности

$$AA^T = A^T A = E \tag{2.5}$$

для вычисленной матрицы Q (на n-м шаге интегрирования) можно требовать с точностью, характеризуемой неравенством $|b_{ij}| \leqslant \varepsilon_{0ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$. Здесь b_{ij} — элемент матрицы «невязки» $B = QQ^T - E$, ε_{0ij} — элемент матрицы предельно допустимой ошибки ($\varepsilon_{0ij} > 0$). В практических расчетах целесообразно принять $\varepsilon_{0ij} = \varepsilon_0 = \mathrm{const}$ для всех i и j (ε_0 — скалярный показатель предельной неортогональности, определяется эмпирически).

Разрабатываемый метод управления устойчивостью интегрирования основывается на выполнении в процессе интегрирования контроля ортогональности матрицы Q, ее ортогонализации и коррекции шага интегрирования в зависимости от величины $|b_{ij}|$. Структура алгоритма метода разработана, опираясь на результаты массовых расчетов движения тела в атмосфере. Она предусматривает разбиение области возможного изменения предельного значения ε_0 на ряд подобластей, каждой из которых соответствует свое управление:

Управление 1: если для всех i, j (i, j — соответственно номер строки и номер столбца матрицы Q) выполняется условие $|b_{ij}| = |QQ^T - E|_{ij} < 10^{-2}\varepsilon_0$, то шаг интегрирования увеличивается в m раз (в частности удваивается), а матрица Q не изменяется (используется ее вычисленное значение); управление 2: если выполняется условие $10^{-2}\varepsilon_0 \leqslant |b_{ij}| < \varepsilon_0$, то матрица Q не изменяется и интегрирование продолжается с прежним шагом; управление 3: если выполняется условие $\varepsilon_0 \leqslant |b_{ij}| < 10^2\varepsilon_0$, то матрица Q ортогонализируется и интегрирование продолжается с прежним шагом; управление 4: если выполняется условие $|b_{ij}| > 10^2\varepsilon_0$, то результат интегрирования исключается и выполняется возврат к результатам расчета на предыдущем шаге, затем продолжается интегрирование с уменьшенным в m раз шагом (в частности с половинным шагом).

Ортогонализация матрицы Q при формировании управления 3 выполняется по формуле

$$A^{(n)} = A^{(n-1)} - {}^1/_2 (A^{(n-1)} A^{(0)T} A^{(n-1)} - A^{(0)}) \tag{2.6}$$

в которой за нулевое приближение матрицы $A^{(0)}$ принимается вычисленная матрица Q. Итерационные циклы по формуле (2.6) продолжаются до выполнения условия $\|A^{(n)} A^{(n)T} - E\|_{ij} \leqslant \varepsilon_0$.

Формула (2.6) получается в результате решения задачи нахождения ортогональной матрицы, ближайшей к матрице Q. Эта задача формулируется так: дана матрица Q и критерий качества ортогонализации $J(A) = \|A - Q\|_E^2$. Требуется найти такую матрицу A, которая удовлетворяла бы условию $J(A) = \min\limits_{A} J(A, Q)$ с учетом ограничивающего равенства (2.5). Решение этой задачи может быть получено, опираясь на идею метода спуска. Для принятого критерия, представляющего собой квадрат евклидовой нормы, справедливо соотношение [9]: $J(A) = \mathrm{Sp}[(A-Q)(A-Q)^T]$ (Sp — символ следа матрицы). На основе дискретного представления движения к экстремуму критерия результат ортогонализации через один шаг спуска представляется как

$$A_1 = A_0 + \theta\Gamma \tag{2.7}$$

где A_0 — исходное значение матрицы, θ — скалярная величина, Γ — «градиентная» матрица. Теперь можно записать значение критерия через один шаг спуска в виде $J^\vee = \mathrm{Sp}\{[A - (A_0 + \theta\Gamma)][A - (A_0 + \theta\Gamma)]^T\}$.

Матрица Γ определяется из условия стационарного поведения величины $J^\vee$ в зависимости от матрицы A_0, т. е. из уравнения

$$\partial J^\vee / \partial\theta |_{\theta=0} = 2\mathrm{Sp}[(A_0^T - A^T)\Gamma] = 0 \tag{2.8}$$

при наличии ограничения (2.5), которое представляется в виде двух ограничений. Для n-го шага перехода от матрицы A_{n-1} к матрице A_n исходное ограничение (2.5) можно записать как $\psi_n = A_n^T A_n - E = 0$. Подставив в это выражение матрицу A_1, продифференцировав полученное соотношение по параметру θ, получим первое искомое ограничение:

$$\partial\psi_n/\partial\theta|_{\theta=0} = A_0^T\Gamma + \Gamma^T A_0 = 0 \qquad (2.9)$$

Другое ограничение получается следующим образом. Для матрицы Γ справедливы соотношения $\theta^2 = \|\theta\Gamma\|_E^2 = \theta^2\|\Gamma\|_E^2$, но $\|\Gamma\|_E^2 = \mathrm{Sp}(\Gamma^T\Gamma)$. Поэтому $\theta^2[1-\mathrm{Sp}(\Gamma^T\Gamma)] = 0$. Поскольку по условию $\theta \neq 0$, то справедливо равенство

$$1-\mathrm{Sp}(\Gamma^T\Gamma) = 0 \qquad (2.10)$$

представляющее собой второе ограничение.

Таким образом, для определения стационарного значения можно записать функцию Лагранжа в виде

$$L^*(\Gamma) = 2\mathrm{Sp}[(A_0 - A^T)\Gamma] + l[1-\mathrm{Sp}(\Gamma^T\Gamma)] + \mathrm{Sp}[L(A_0^T\Gamma + \Gamma A_0)] \qquad (2.11)$$

где l, L — неопределенные скалярный и матричный множители (матрица L симметрична). Матрица Γ действительная. Декомпозируем эту матрицу как [9]: $\Gamma = \Gamma_0 + \varkappa H$, где H — произвольная действительная матрица, $\varkappa$ — некоторый параметр, Γ_0 — матрица, в окрестности которой функция (2.11) изменяется с минимальной скоростью при движении вдоль градиентного направления. Подставив эту матрицу в функцию (2.11) и продифференцировав затем последнюю по параметру $\varkappa$, запишем (H — произвольная действительная матрица):

$$\mathrm{Sp}\{[(L+E)A_0^T - A^T - l\Gamma_0^T]^T H\} = 0 \qquad (2.12)$$

Поэтому

$$\Gamma_0 = [A_0(L+E) - A]/l \qquad (2.13)$$

Матрица (2.13) удовлетворяет условию (2.9). Следовательно, после подстановки (2.13) в (2.9) с учетом симметричности матрицы $L+E = {}^1/_2(A_0^T A + A^T A_0)$ отыскивается матрица Γ_0 в форме

$$\Gamma_0 = {}^1/_2(A_0 A^T A_0 - A)/l \qquad (2.14)$$

Достаточное условие минимума функции $L^*(\Gamma)$ определяется неравенством $\partial^2 L^*/\partial\varkappa^2 > 0$ при $\varkappa = 0$. Можно показать, что при $l < 0$ действительно $\partial^2 L^*/\partial\varkappa^2 > 0$ (т. е. при значении Γ_0 функция $L^*(\Gamma)$ имеет минимум). Подставляя матрицу (2.14) в выражение (2.7), получаем

$$A_1 = A_0 - \tau(A_0 A^T A_0 - A) \qquad (2.15)$$

где $\tau = {}^1/_2\theta/l$ — шаг итерационной градиентной процедуры. Конкретное значение этого шага можно найти путем решения задачи оптимизации, в которой необходимо задать функцию потерь для $(n+1)$-го шага итерации. Например квадратичная функция потерь (квадрат евклидовой нормы $\|A - A^{(n+1)}\|_E^2$) минимизируется при $\tau = {}^1/_2$. Приняв $\tau = {}^1/_2$ и заменив в формуле (2.15) на основе принципа индукции матрицу A_1 на матрицу $A^{(n)}$, а матрицу A_0 на матрицу $A^{(n-1)}$, получим формулу (2.6).

Свойство сходимости алгоритма в данном случае можно определить выражением $\max|A^{(n)}A^{(n)T} - E|_{ij}$ при $n \to \infty$. Сходимость процесса для матрицы Q зависит от того, насколько «сильно» отличается матрица $A^{(0)} = Q$ от ближайшей ортогональной, т. е. насколько велика норма $(\sum (Q_{ij} - E_{ij})^2)^{1/2}$. Минимальное значение этой нормы, при которой процесс ортогонализации еще сходится, определяет границу области сходимости.

Справедливо мультипликативное представление квадратной матрицы в виде [9]: $Q = M\Pi = (QQ^T)^{1/2}\Pi$, где $M = (QQ^T)^{1/2}$ — левый модуль матрицы Q, Π — ортогональная матрица. Матрица M представляется как $M = TN^{(0)}T^T$. Здесь T — матрица, составленная из собственных вектор — столбцов матрицы M. Таким образом, имеем $A^{(n)}=(TN^{(n)}T^{T})\Pi$. Необходимым и достаточным условием сходимости матрицы $A^{(n)}$ к матрице Π является условие $\lim N^{(n)}=E$ при $n\to\infty$, или в скалярной форме — условий $\lim N_{ij}^{(n)}=1$ ($i=j$). Алгоритму (2.6) соответствует составленная для элементов собственных векторов система уравнений $n_j^{(n)}=n_j^{(n-1)}-{}^1/_2 n_j^{(0)}(n_j^{(n-1)^2}-1)$. Записанное выше предельное условие выполняется, если выполняется неравенство $n_j^{(0)}<2$.

Таким образом, чтобы проверить принадлежность вычисленной матрицы Q области сходимости, надо вычислить собственные значения матрицы $M=(QQ^T)^{1/2}$ и проверить выполнение условий $n_j<2$. В принципе эту операцию необходимо выполнять на каждом шаге ортогонализации. Это, конечно, снижает экономичность алгоритма. Однако, как показывают расчеты движения тела в атмосфере на ЭВМ типа БЭСМ-6 и ЕС методом Рунге — Кутта четвертого порядка, вычисленная матрица Q находится в области сходимости (если, конечно, начальный шаг интегрирования не будет выбран чрезмерно большим). По-видимому, этот вывод можно распространить и на случай решения рассматриваемой задачи с использованием других явных методов интегрирования.

3. С использованием разработанного метода воспроизведено методом Рунге — Кутта четвертого порядка множество случаев спуска тела в плотных слоях атмосферы Земли. Главная цель при этом состояла в определении (для заданной области изменения начальных условий движения, массово-инерционных и геометрических характеристик тела) скалярного показателя ε_0 предельной неортогональности матрицы Q и в оценке времени, затрачиваемого на интегрирование в сравнении со случаем интегрирования с постоянным шагом, при котором получается устойчивое решение поставленной задачи.

Интегрировались уравнения аэробаллистики при следующих допущениях: присоединенные массы и гидростатические силы пренебрежимо малы, гравитационное поле Земли — центральное, атмосфера — стандартная, тело в номинальном состоянии — осесимметричное (ось симметрии совпадает с осью X связанной системы координат, в качестве полюса принят номинальный центр масс). В возмущенном состоянии тело является асимметричным, имеющим смещение центра масс с оси симметрии и отклонение главных осей инерции относительно осей инерции осесимметричного тела, а также искажения формы тела вращения. Движение асимметричного тела описывается системой уравнений [12] ($\pi_0=3{,}981277\cdot10^{14}$ м^3/с^2):

$$\begin{gathered} d\mathbf{v}_O/dt=(1/m)\mathbf{F}-\Omega\mathbf{v}_O-\Omega^2\boldsymbol{\rho}+\mathrm{P}(I^{(O)}+m\mathrm{P}^2)^{-1}(\mathbf{M}_O-\mathrm{P}\mathbf{F}-\Omega I^{(O)}\boldsymbol{\omega}+m\mathrm{P}\Omega^2\boldsymbol{\rho}) \\ d\boldsymbol{\omega}/dt=(I^{(O)}+m\mathrm{P}^2)^{-1}(\mathbf{M}_O-\mathrm{P}\mathbf{F}-\Omega I^{(O)}\boldsymbol{\omega}+m\mathrm{P}\Omega^2\boldsymbol{\rho}) \\ d\mathbf{r}_O/dt=A^T\mathbf{v}_O,\quad dA/dt=-\Omega A \end{gathered} \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{v}_O=\|v_{Ox},\ v_{Oy},\ v_{Oz}\|^T,\quad \boldsymbol{\omega}=\|\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\|^T,\quad \mathbf{r}_O=\|x_{O\xi},\ y_{O\xi},\ z_{O\xi}\|^T$$

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},\qquad \Omega=\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{Vmatrix}$$

$$I^{(O)}=\begin{Vmatrix} I_x^{(O)} & -I_{xy}^{(O)} & -I_{xz}^{(O)} \\ -I_{yx}^{(O)} & I_y^{(O)} & -I_{yz}^{(O)} \\ -I_{zx}^{(O)} & -I_{zy}^{(O)} & I_z^{(O)} \end{Vmatrix},\quad \mathrm{P}=\begin{Vmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{Vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} R_x+G_x \\ R_y+G_y \\ R_z+G_z \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_0=\begin{Vmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} M_{Ox}^R \\ M_{Oy}^R \\ M_{Oz}^R \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{Vmatrix}=A\begin{Vmatrix} G_{x\xi} \\ G_{y\xi} \\ G_{z\xi} \end{Vmatrix}=-A\left\{m\,\frac{\pi_0}{r_O{}^3}\begin{Vmatrix} x_{O\xi} \\ y_{O\xi} \\ z_{O\xi} \end{Vmatrix}\right\}$$

$$r_O=\sqrt{x_{O\xi}^2+y_{O\xi}^2+z_{O\xi}^2},\quad \rho=\|\rho_x,\ \rho_y,\ \rho_z\|^T$$

Характерная длина рассматриваемого тела L_x на несколько порядков меньше величины r_O. Поэтому гравитационный момент равен нулю. Составляющие аэродинамических силы R_x, R_y, R_z и момента $M_{Ox}{}^R$, $M_{Oy}{}^R$, $M_{Oz}{}^R$ рассчитываются по формулам [12]. Их коэффициенты определяются как функции числа Маха M, угла атаки α_π и аэродинамического крена φ:

$$\begin{gathered}
c_x=c_x(\mathrm{M},\ \alpha_\pi),\quad c_y=c_n(\mathrm{M},\ \alpha_\pi)\cos\varphi\\
c_z=-c_n(\mathrm{M},\ \alpha_\pi)\sin\varphi,\quad m_{Ox}=\Delta m_{Ox}\\
m_{Oy}=(c_d-c_m)c_z-m_{Oy}^{\check\omega_y}(\mathrm{M},\ \alpha_\pi)\,\omega_y{}^{\vee}+\Delta m_{Oy}\\
m_{Oz}=-(c_d-c_m)c_y-m_{Oz}^{\check\omega_z}(\mathrm{M},\ \alpha_\pi)\,\omega_z{}^{\vee}+\Delta m_{Oz}
\end{gathered}\tag{3.2}$$

Здесь $c_x(\mathrm{M},\alpha_\pi)$, $c_n(\mathrm{M},\alpha_\pi)$, $m_{Oy}^{\check\omega_y}(\mathrm{M},\alpha_\pi)=m_{Oz}^{\check\omega_z}(\mathrm{M},\alpha_\pi)=m_O^{\check\omega}(\mathrm{M},\alpha_\pi)$ — соответственно коэффициенты продольной и поперечной сил, момента демпфирования и безразмерная координата центра давления ($c_d=x_d L_x$, отсчитывается от носка тела) для симметричного относительно продольной оси тела, $\check\omega_{y,z}=\omega_{y,\,z}L_x/v_O$ — безразмерная угловая скорость тела.

M	$\alpha_\pi=0°$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
6	0,17	0,26	0,37	0,46	0,54	0,53	0,41	0,16	—0,27	—0,79	—1,25	—1,55	—1,70
10	0,15	0,19	0,28	0,37	0,43	0,45	0,39	0,17	—0,26	—0,77	—1,25	—1,55	—1,70
25	0,14	0,18	0,28	0,37	0,43	0,45	0,39	0,17	—0,26	—0,77	—1,25	—1,55	—1,70
6	0	0,48	1,06	1,62	2,11	2,35	2,27	1,94	1,37	0,81	0,30	0,05	0
10	0	0,48	1,06	1,75	2,30	2,55	2,45	2,12	1,55	0,82	0,30	0,05	0
25	0	0,48	1,06	1,75	2,30	2,55	2,45	2,12	1,55	0,82	0,30	0,05	0
6	0,19	0,20	0,28	0,34	0,39	0,45	0,39	0,33	0,31	0,24	0,15	0,06	0,04
10	0,16	0,17	0,25	0,32	0,36	0,37	0,38	0,32	0,29	0,23	0,14	0,05	0,03
25	0,16	0,17	0,25	0,32	0,36	0,37	0,38	0,32	0,29	0,23	0,14	0,05	0,03
6	0,65	0,65	0,65	0,65	0,60	0,65	0,64	0,63	0,65	0,61	0,60	0,62	0,61
10	0,65	0,65	0,65	0,65	0,60	0,65	0,64	0,63	0,65	0,61	0,60	0,62	0,61
25	0,65	0,65	0,65	0,65	0,60	0,65	0,64	0,63	0,65	0,61	0,60	0,62	0,61

Значения этих коэффициентов, полученные по формулам теории Ньютона неупругого удара [10, 12] для выбранной формы тела, приведены в таблице, где первая группа данных соответственно для чисел M=6, 10, 25 и углов атаки $\alpha_\pi=0$, 15°, ..., 165°, 180° определяют коэффициент $c_x(\mathrm{M},\alpha_\pi)$, вторая — коэффициент $c_n(\mathrm{M},\ \alpha_\pi)$, третья — коэффициент $m_O^{\check\omega}(\mathrm{M},\ \alpha_\pi)$, четвертая — коэффициент $c_d(\mathrm{M},\ \alpha_\pi)$. Расчет коэффициентов в процессе интегрирования по данным таблицы ведется способом линейной интерполяции. Слагаемые Δm_{Ox}, Δm_{Oy}, Δm_{Oz} — постоянные при движении вдоль конкретной траектории добавки к коэффициентам осесимметричного тела, обусловленные асимметриями формы тела. Для коэффициентов сил подобные добавки пренебрежимо малы. Член $c_m=x_m/L_x$ — безразмерная постоянная координата центра масс тела, отсчитываемая от носка тела.

При расчетах вводится понятие невозмущенного (номинального) движения. Приняты следующие номинальные массово-инерционные и геометрические характеристики тела: m=500 кг, $I_x^{(0)}=10$ кг·м², $I_y^{(0)}=I_z^{(0)}=I^{(0)}=100$ кг·м², $S_м$=0,5 м², L_x=2 м, x_m=1 м, представляющие собой соответственно массу, моменты инерции, характерные площадь и длину, а также координату центра масс тела. Возмущения указанных характеристик задаются путем формирования массово-инерционных асимметрий и асимметрий формы (аэродинамических асимметрий) в пределах:

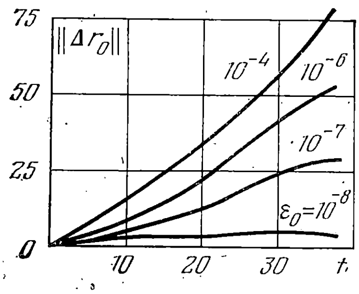
$$|\rho_x/L_x|\leqslant 2\cdot 10^{-2},\quad |\rho_y/L_x|\leqslant 1{,}5\cdot 10^{-3},\quad |\rho_z/L_x|\leqslant 1{,}5\cdot 10^{-3},$$

$$\varphi_x=\text{const}=0,\quad |\varphi_y|\leqslant 1^\circ,\quad |\varphi_z|\leqslant 1^\circ,\quad |\Delta I^{(O)}/I^{(O)}|\leqslant 0{,}01,$$

$$(\varphi_x = I_{yz}^{(O)}/(I_z^{(O)} - I_y^{(O)}),\qquad \varphi_y = I_{xz}^{(O)}/(I_x^{(O)} - I_z^{(O)}),$$

$$\varphi_z = I_{xy}^{(O)}/(I_y^{(O)} - I_x^{(O)})),\qquad |\Delta m_{Ox}|\leqslant 10^{-4},\qquad |\Delta m_{Oy}|\leqslant$$

$$\leqslant 10^{-3},\ |\Delta m_{Oz}|\leqslant 10^{-3}.$$



Начальные условия движения задаются на высоте $H(t_0=0)=10^5$ м над поверхностью Земли и изменяются в широких пределах. Не изменяются лишь начальные координаты (для всех координат принимаются значения $x_{O\xi 0}=z_{O\xi 0}=0$, $y_{O\xi 0}=10^5$ м).

Показатель ε_0 был установлен с использованием критериальной функции

$$\|\Delta \mathbf{r}_O(t,\varepsilon_0)\| = \{[x_{O\xi}(t,\varepsilon_0)-x_{O\xi}(t)]^2+[y_{O\xi}(t,\varepsilon_0)- -y_{O\xi}(t)]^2+[z_{O\xi}(t,\varepsilon_0)-z_{O\xi}(t)]^2\}^{1/2} \tag{3.3}$$

в которой $x_{O\xi}(t)$, $y_{O\xi}(t)$, $z_{O\xi}(t)$ — координаты полюса при движении тела вдоль невозмущенной траектории, воспроизводимой с постоянным (достаточно малым) шагом интегрирования; $x_{O\xi}(t,\varepsilon_0)$, $y_{O\xi}(t,\varepsilon_0)$, $z_{O\xi}(t,\varepsilon_0)$ — координаты полюса при движении тела вдоль возмущенной траектории (воспроизводимой с использованием разработанного метода управления устойчивостью интегрирования). Невозмущенные траектории получаются двойным интегрированием с постоянным шагом, соответственно равным h и $2h$. При этом оцениваются методическая и инструментальная (округления) ошибки в конечной точке движения тела соответственно по формулам [11]:

$$\Delta_{мj}=[x_j(h)-x_j(2h)]/(2^p-1),\quad k=\lg 0{,}1124\, n^{2/3} \tag{3.4}$$

где p — порядок метода интегрирования, k — число потерянных десятичных разрядов при округлении результата, n — число шагов интегрирования. За эталонную невозмущенную траекторию принимается такая, для которой суммарная вычислительная ошибка не превышает нескольких метров по координатам и порядка одного метра в секунду по составляющим поступательной скорости в конечной точке движения.

Расчеты велись на ЭВМ ЕС 1050. Начальный шаг интегрирования с использованием разработанного метода принимался для различных вариантов разным по величине, ограниченной снизу значением 0,05 с. Величина ε_0 считалась допустимой, если норма (3.3) по мере движения тела имела нерасходящийся характер и не превышала величины суммарной вычислительной ошибки определения эталонной траектории.

На фигуре показан характер изохронного изменения нормы (3.3) в зависимости от времени движения тела и задаваемого показателя ε_0 для случаев движения, сопровождающихся вращательными резонансами. Если границы $\varepsilon_1=10^2\,\varepsilon_0$ и $\varepsilon_2=10^{-2}\,\varepsilon_0$ принимаются без учета порядка метода интегрирования, то может иметь место потеря устойчивости (при ме́ньших ε_0 обнаруживаются бо́льшие значения нормы (3.3)). Если границы ε_1, ε_2 принимаются зависящими от порядка метода интегрирования, например как функция $\varepsilon_1=2^{p+1}\,\varepsilon_0$ и $\varepsilon_2=2^{-(p+1)}$, то неустойчивость устраняется. Установлено, что граница области устойчивости интегрирования уравнений (3.1) методом Рунге — Кутта четвертого порядка для воспроизведенного множества движений определяется значением $\varepsilon_0=10^{-8}$. При этом сокращаются временные затраты в 2—3 раза по сравнению с интегрированием при постоянном шаге.

ЛИТЕРАТУРА

1. Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations/Ed. by G. Hall and J. M. Watt. Oxford: Clarendon Press, 1976. 336 p.— Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1979. 312 с.
2. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
3. *Kerczek C., Davis S. H.* Calculation of transition matrices.— AIAA Journal, 1975, v. 13, No. 10, p. 1400—1403.
4. *Боданский Е. Д., Фурман В. Д.* О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона.— Космич. исследования, 1970, т. 8, вып. 6, с. 944—948.

5. *Ткаченко А. И.* Погрешности вычисления параметров Родрига – Гамильтона.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1, с. 32–37.
6. *Скиба Г. Г.* Метод расчета элементов матрицы направляющих косинусов при численном решении задач пространственного движения тел в атмосфере.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 55–57.
7. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
10. *Артонкин В. Г., Леутин П. Г., Петров К. П., Столяров Е. П.* Аэродинамические характеристики острых и притупленных конусов при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях.– Тр. ЦАГИ, 1972, вып. 1413. 93 с.
11. *Горбатенко С. А., Макашов Э. М., Полушкин Ю. Ф., Шефтель Л. В.* Расчет и анализ движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1971. 352 с.
12. *Костров А. В.* Движение асимметричных баллистических аппаратов. М.: Машиностроение, 1984. 271 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1984