

УДК 531.383

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОКОМПАСА

БАШИРОВ Р. Х.

Решение прецессионных уравнений гироскопа при конечных поворотах в азимуте на произвольно движущемся основании рассмотрено в [1]. Известно также, что решение прецессионных уравнений движения гироскопа Аншютца, установленного на неподвижном основании, сводится к квадратурам, при этом предполагается, что оба угла поворота чувствительного элемента являются конечными [2].

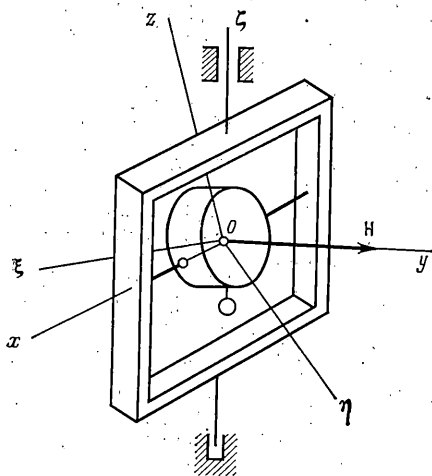
В публикуемой работе приводится асимптотическое интегрирование полных нелинейных уравнений движения гироскопа с кардановым подвесом чувствительного элемента. Кроме конечности углов поворота учитываются моменты инерции рамок подвеса. Показывается, что решение точных уравнений, так же как и приближенных, имеет условно-периодический характер.

Периоды медленных колебаний гироскопа выражены через нормальные эллиптические интегралы в форме Лежандра.

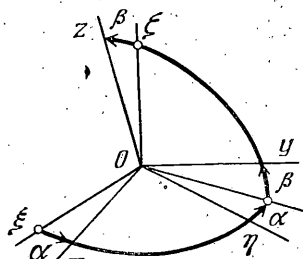
1. Рассматриваемый гироскоп представляет собой гироскоп в кардановом подвесе со смещенным центром масс относительно точки подвеса (фиг. 1), установленный на неподвижном относительно вращающейся Земли основании. Форма Земли предполагается сферической.

Элементы гироскопа считаются абсолютно твердыми телами, которые вращаются в идеальных подшипниках, а оси вращения пересекаются в одной точке; трение в подшипниках отсутствует. Оси вращения колец подвеса и ротора совпадают с их главными осями инерции.

Введем географический трехгранник $O\xi\eta\zeta$, точка O



Фиг. 1



Фиг. 2

которого совпадает с точкой подвеса ротора, ось ξ направлена на восток, а η — на север, ζ — вертикаль, совпадающая с осью вращения внешнего кольца.

Оси Ox , Oy , Oz — главные оси инерции чувствительного элемента, т. е. кожуха с ротором, α — угол отклонения оси вращения ротора от плоскости

меридиана (фиг. 2), β — отклонение оси от плоскости горизонта, вызванное поворотом кожуха вокруг оси x . Угол собственного вращения обозначим γ .

Введем обозначения: C , A — полярный и экваториальный моменты инерции ротора, A_1 , A_2 , A_3 — моменты инерции внешней рамки, G — произведение веса чувствительного элемента на смещение центра масс l (l — положительное число, если центр масс находится на отрицательной части оси Oz), I_1 , I_2 , I_3 — моменты инерции чувствительного элемента относительно осей x , y , z соответственно — выражаются через C , A , моменты инерции кожуха A_1' , A_2' , A_3' , массу чувствительного элемента M и длину l :

$$I_1 = A_1' + A + Ml^2, \quad I_2 = A_2' + Ml^2, \quad I_3 = A_3' + A \quad (1.1)$$

Пусть $u = \|u_1, u_2, u_3\|^T = \|0, u \cos \lambda, u \sin \lambda\|^T$ — вектор угловой скорости вращения Земли в географической системе координат, здесь λ — широта местности. Выразим проекции абсолютной угловой скорости трехгранника $Oxyz$ (кожуха) Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 на его оси через u и производные по времени α , β :

$$\Omega_1 = \dot{\beta} + u_2 \sin \alpha$$

$$\Omega_2 = (\alpha + u_3) \sin \beta + u_2 \cos \alpha \cos \beta \quad (1.2)$$

$$\Omega_3 = (\alpha + u_3) \cos \beta - u_2 \cos \alpha \sin \beta$$

Функция Лагранжа L в принятых обозначениях имеет вид

$$L = \frac{1}{2} [I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 + C (\Omega_2 + \dot{\gamma})^2 + \quad (1.3)$$

$$+ A_3 (\alpha + u_3)^2 + (A_1 \sin^2 \alpha + A_2 \cos^2 \alpha) u_2^2] + G \cos \beta$$

Уравнения движения имеют вид

$$B(\beta) \alpha'' + B'(\beta) \alpha \dot{\beta} + h \cos \beta \dot{\beta} - B_1(\alpha, \beta) \dot{\beta} + B_3(\alpha, \beta) = 0 \quad (1.4)$$

$$I_1 \beta'' - \frac{1}{2} B'(\beta) \alpha^2 - h \cos \beta \alpha + B_1(\alpha, \beta) \alpha + B_2(\alpha, \beta) = 0$$

$$C(\Omega_2 + \dot{\gamma}) = h, \quad B = A_3 + I_2 \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta$$

$$B' = dB/d\beta = (I_2 - I_3) \sin 2\beta, \quad B'' = d^2B/d\beta^2$$

$$B_1 = -B' u_3 + I_1 u_2 \cos \alpha - \frac{1}{2} B'' u_2 \cos \alpha, \quad B_2 = G \sin \beta +$$

$$+ \frac{1}{2} B' (u_2^2 \cos^2 \alpha - u_3^2) - \frac{1}{2} B'' u_2 u_3 \cos \alpha - h u_3 \cos \beta +$$

$$+ h u_2 \sin \beta \cos \alpha, \quad B_3 = h u_2 \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} B' u_2 u_3 \sin \alpha +$$

$$+ (A_2 - A_1 + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \sin^2 \beta - I_1) u_2^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Положив в уравнениях (1.4) $u=0$ и $G=0$, получим уравнения свободного гироскопа, которые, как известно [3, 4], интегрируемы. Интегрируемость сохраняется, если $G \neq 0$, а $u=0$. Действительно, при $u=0$, как видно из (1.2), (1.3), функция Лагранжа не зависит от α , и к интегралу энергии

$$B(\beta) \alpha^2 + I_1 \beta^2 - 2G \cos \beta = 2\sigma_1 = \text{const} \quad (1.5)$$

добавляется циклический интеграл

$$B(\beta) \alpha + h \sin \beta = \sigma_2 = \text{const} \quad (1.6)$$

который отражает сохранение момента количества движения системы относительно вертикальной оси. Таким образом, полученные уравнения (1.4) представляют собой возмущенные уравнения движения свободного гироскопа относительно инерциальной системы координат. Решение невозмущенных уравнений сводится к обращению гиперэллиптических интегралов, при $I_2 = I_3$ — эллиптического.

2. Приведем уравнения к гамильтоновой форме. Обобщенные импульсы p_α , p_β , p_γ системы выражаются через скорости и координаты следующим

образом:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \partial L / \partial \alpha^* = I_2 \Omega_2 \sin \beta + I_3 \Omega_3 \cos \beta + A_3 (\alpha^* + u_3) + C (\Omega_2 + \gamma^*) \sin \beta \\ p_\beta &= \partial L / \partial \beta^* = I_1 \Omega_1 = I_1 (\beta^* + u_2 \sin \alpha) \\ p_\gamma &= \partial L / \partial \gamma^* = C (\Omega_2 + \gamma^*) = h \end{aligned} \quad (2.1)$$

Используя выражения для Ω_i из (1.2), разрешим (2.1) относительно α^* , β^* , γ^* :

$$\begin{aligned} \alpha^* &= B^{-1} (p_\alpha - p_\gamma \sin \beta - \frac{1}{2} B' u_2 \cos \alpha) - u_3 \\ \beta^* &= p_\beta I_1^{-1} - u_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\gamma^* = p_\gamma C^{-1} - B^{-1} (p_\alpha - p_\gamma \sin \beta - \frac{1}{2} B' u_2 \cos \alpha) \sin \beta - u_2 \cos \alpha \cos \beta$$

Функция Гамильтона H системы имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{(p_\alpha - p_\gamma \sin \beta)^2}{2B(\beta)} + \frac{p_\beta^2}{2I_1} + \frac{p_\gamma^2}{2C} - G \cos \beta - p_\alpha u_3 - p_\beta u_2 \sin \alpha - \\ &- p_\gamma u_2 \cos \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} B' B^{-1} u_2 \cos \alpha (p_\alpha - p_\gamma \sin \beta) - D(\alpha, \beta) u_2^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} [(I_2 \cos^2 \beta + I_3 \sin^2 \beta) \cos^2 \alpha + \\ &+ A_1 \sin^2 \alpha + A_2 \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} (B')^2 B^{-1} \cos^2 \alpha] \end{aligned}$$

Уравнения движения представляют собой шесть уравнений, два из которых отделяются и служат для определения циклической переменной γ ($p_\gamma = \text{const}$) после определения α , β , p_α , p_β из уравнений

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\beta}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \frac{dp_\beta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} \quad (2.4)$$

Функцию H представим в виде суммы невозмущенной части H_0 и возмущения H_1 . Введем малый параметр ε , представляющий собой отношение скорости вращения Земли к скорости вращения ротора $v = p_\gamma / C$:

$$\varepsilon^2 = C u / p_\gamma \ll 1 \quad (2.5)$$

В явной форме параметр ε войдет в функцию Гамильтона после некоторых преобразований в ней. Рассмотрим новую функцию K , получающуюся из H умножением на $C p_\gamma^{-2}$ и заменой p_α на p_1 , p_β на p_2 по формулам (K_0 — гамильтониан свободного гироскопа, K_1 — возмущение):

$$p_\alpha = p_\gamma p_1, \quad p_\beta = p_\gamma p_2 \quad (2.6)$$

$$K = C H p_\gamma^{-2} = K_0 + K_1 \quad (2.7)$$

$$K_0 = \frac{C}{2B(\beta)} (p_1 - \sin \beta)^2 + \frac{C p_2^2}{2I_1} + \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= -G C p_\gamma^{-2} \cos \beta - \varepsilon^2 \cos \lambda [p_1 \operatorname{tg} \lambda + p_2 \sin \alpha + \\ &+ \cos \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} B' B^{-1} \cos \alpha (p_1 - \sin \beta)] - \varepsilon^4 \cos^2 \lambda D(\alpha, \beta) C^{-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения с функцией гамильтона K :

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_1}, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_1}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial \alpha}, \quad \frac{dp_2}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial \beta} \quad (2.10)$$

можно получить из (2.4) заменой времени t на безразмерное время $\tau = t p_\gamma / C$ и при помощи соотношений (2.6), (2.7).

3. Среди решений невозмущенной системы имеются движения вращательного, апериодического и периодического типа. Ограничимся последним типом движений, среди которых выделим еще более узкий класс движе-

ний, соответствующий малым амплитудам нутационных колебаний. При этом углы поворота чувствительного элемента не предполагаются малыми. Математически такое ограничение выражается неравенством

$$h_0 \ll 1 \quad (3.1)$$

где h_0^2 — константа интеграла $1/2 CB^{-1}(p_1 - \sin \beta)^2 + 1/2 CI_1^{-1} p_2^2 = h_0^2$ невозмущенных уравнений. Предположим также, что

$$GC/p_1^2 \sim \varepsilon^2 \quad (3.2)$$

Замечание 1. Принятые предположения целесообразны по следующим причинам: переход к переменным действие — угол $J_1, J_2, \varphi_1, \varphi_2$ интегрируемой системы осложняется необходимостью обращения гиперэллиптических интегралов; инвариантные относительно фазового потока торы невозмущенной системы не разрушаются в большинстве случаев, а только слегка деформируются при введении в гамильтониан малых возмущений, если при этом выполнены условия теоремы Колмогорова [5, 6]. Непосредственный подсчет определителя Δ в условии изоэнергетичности в теореме

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial^2 K_0 / \partial J^2 & \partial K_0 / \partial J \\ \partial K_0 / \partial J & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.3)$$

показывает, что он отличен от нуля, за исключением тех точек (J_1, J_2) , которые образуют нулевой уровень энергии: $K_0(J_1, J_2) = h_0^2 = 0$. Теорема не гарантирует существование на этом уровне энергии множества инвариантных торов, дополнение к которому имеет малую меру [6]. Этим был определен выбор условия (3.1).

Учитывая условие (3.1), представим в (2.8) β в виде суммы $\beta = \beta' + \beta^\circ$, где β' — малая величина $\sim \varepsilon \sim h_0$; $\beta^\circ = \text{const}$ выбирается из условия стационарности решений невозмущенных уравнений

$$B(\beta) d\alpha/d\tau = p_1 - \sin \beta, \quad I_1 d\beta/d\tau = p_2, \quad dp_1/d\tau = 0$$

$$\frac{dp_2}{d\tau} = \frac{1}{B(\beta)} (p_1 - \sin \beta) \cos \beta - \frac{B'}{B^2} (p_1 - \sin \beta)^2 \quad (3.4)$$

Отсюда в качестве β° можно взять $\beta^\circ = \arcsin p_1$. Такое представление индуцирует каноническую замену переменных

$$p_1 = P_1, \quad p_2 = P_2, \quad \beta = \arcsin P_1 + q_2, \quad \alpha = q_1 + P_2 / \sqrt{1 - P_1^2} \quad (3.5)$$

в которой q_2, P_2 следует считать малыми величинами $\sim \varepsilon \sim h_0$ из условия (3.1). Замена (3.5) аналогична заменам асимптотических методов.

Функция Гамильтона K после разложения в ряд по малому параметру h_0 в новых переменных имеет вид

$$K = \frac{C(1 - P_1^2)q_2^2}{2[A_3 + I_3 + (I_2 - I_3)P_1^2]} + \frac{CP_2^2}{2I_1} - \frac{CG}{p_1^2} \sqrt{1 - P_1^2} - \varepsilon^2 [\cos \lambda \cos q_1 \sqrt{1 - P_1^2} + P_1 \sin \lambda] + \varepsilon^3 K_2(P, q, \varepsilon) \quad (3.6)$$

Здесь все члены высших порядков малости, начиная с ε^3 , обозначены $\varepsilon^3 K_2$.

4. Структура уравнений и возмущений по отношению к уравнениям свободного гироскопа становится весьма наглядной в переменных действие — угол. Первые два слагаемых в (3.6) представляют собой функцию Гамильтона одномерного осциллятора ($P_1 = \text{const}$). Переменные действие — угол $J_1, J_2, \varphi_1, \varphi_2$ такой системы следующие [6]:

$$J_1 = P_1, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_2 dq_2 = \sqrt{\frac{B(P_1)I_1}{1 - P_1^2}} \frac{h_0^2}{C} \quad (4.1)$$

$$\varphi_1 = q_1, \quad \varphi_2 = \arcsin \left[\frac{q_2}{h_0} \sqrt{\frac{C(1 - P_1^2)}{2B(P_1)}} \right] \quad (4.2)$$

$$B(P_1) = A_3 + I_3 + (I_2 - I_3)P_1^2$$

Разрешая второе равенство (4.1) относительно h_0^2 и осуществляя указанную замену, получим выражение для K

$$K = K_0 + \varepsilon^2 K_1 + \varepsilon^3 K_2 = J_2 C \sqrt{(1 - J_1^2) / [I_1 B(J_1)]} - \varepsilon^2 (\cos \lambda \cos \varphi_1 \sqrt{1 - J_1^2} + J_1 \sin \lambda) - CG p_1^{-2} \sqrt{1 - J_1^2} + \varepsilon^3 K_2(J, \varphi, \varepsilon) \quad (4.3)$$

Видим, что уравнения первого приближения, соответствующие гамильтониану $K_0 + \varepsilon^2 K_1$, интегрируемые, так как гамильтониан при этом не содержит φ_2 .

Уравнения возмущенной системы с гамильтонианом $K_0 + \varepsilon^2 K_1$ имеют стандартный вид двухчастотной системы

$$dJ_1/d\tau = -\varepsilon^2 \cos \lambda \sin \varphi_1 \sqrt{1 - J_1^2} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \omega_1(J_1, J_2) + \varepsilon^2 \left(\cos \lambda \cos \varphi_1 \frac{J_1}{\sqrt{1 - J_1^2}} - \sin \lambda \right) + \frac{CG}{p_1^2} \frac{J_1}{\sqrt{1 - J_1^2}}$$

$$dJ_2/d\tau = 0, \quad d\varphi_2/d\tau = \omega_2(J_1, J_2) \quad (4.5)$$

$$\omega_1 = -\frac{J_1 J_2}{\sqrt{1 - J_1^2}} \frac{C(A_3 + I_2)}{B(J_1) \sqrt{I_1 B(J_1)}}, \quad \omega_2 = C \sqrt{\frac{1 - J_1^2}{I_1 B(J_1)}}$$

Система уравнений (4.4) имеет интегралы $J_2 = \text{const}$, $K_0 + \varepsilon^2 K_1 = \text{const}$, и уравнения интегрируются в квадратах.

Замечание 2. С формальной точки зрения к уравнениям (4.4) можно было применить процедуру осреднения. Осредняя по φ_1 первое уравнение, получим заранее известный результат $J_1 = \text{const}$ [6]. Таким образом, возмущение $\varepsilon^2 K_1$ не нарушает условно-периодического характера поведения исходной системы с функцией K_0 , слегка деформирует инвариантные торы и меняет частоты движения по ним. Отметим, что этот результат в рассматриваемом случае несправедлив, так как согласно (4.5), (4.1) и (3.1) частота ω_1 является малой величиной: $\omega_1 \sim J_2 \sim h_0^2 \ll 1$. Последнее неравенство $\omega_1 \ll 1$ нарушается для торов с J_1 , близкими к значениям $J_{1*} = \pm 1$ (в исходных координатах $\beta_* = \arcsin J_1 = \pm 1/2\pi$), так как ω_1 имеет особенность в точках J_{1*} . Итак, поведение исследуемой системы в окрестности точек $\beta = \pm 1/2\pi$ приближенно описывается движением по торам $J_1 = \text{const}$ и $J_2 = \text{const}$, т. е. уравнениями движения гироскопа со смещенным центром масс относительно инерциальной системы координат. Далее окрестности точек $\beta = \pm 1/2\pi$ исключаются из рассмотрения.

Утверждение 1. В тех точках (J_1, J_2) , где $\omega_1 = 0$, обращаются в нуль либо гессиан K_0 ($|\partial^2 K_0 / \partial J^2|$), либо определитель Δ в условии изоэнергетичности (3.3).

Действительно, ω_1 обращается в нуль на прямых $J_1 = 0$, либо $J_2 = 0$. На прямой $J_1 = 0$ обращается в нуль гессиан K_0 :

$$\left| \frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} \right| = \frac{J_1^2}{1 - J_1^2} \frac{C^2 (A_3 + I_2)^2}{B(J_1)^3 I_1} \Big|_{J_1=0} = 0 \quad (4.6)$$

На прямой $J_2 = 0$ обращается в нуль определитель Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \omega_1 \omega_2 (\partial \omega_1 / \partial J_2 + \partial \omega_2 / \partial J_1) - \omega_2^2 \partial \omega_1 / \partial J_1 = \\ &= \omega_2 J_2 (2f^2 - \omega_2 \partial f / \partial J_1), \quad f(J_1) = \omega_1 / J_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Утверждение 2. $\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \omega_1 = 0$, $J_1 \neq \pm 1$. Согласно (4.5), частота ω_1 пропорциональна J_2 ,

которая, в свою очередь, пропорциональна константе интеграла h_0^2 . Учитывая, что константа h_0^2 выражается через постоянную энергии σ : $h_0^2 = \sigma / p_1$, получим нужный результат. Следовательно, ω_1 можно рассматривать как прецессионную частоту.

Замечание 3. Так как $\omega_1, \varepsilon \rightarrow 0$ при $p_1 \rightarrow 0$, то фактически систему (4.4) и (4.5) следует рассматривать как одночастотную. Инвариантные поверхности такой системы диффеоморфны цилиндрам, которые замыкаются в торы при введении возмущения. В этом смысле возмущения вносят качественное изменение на нулевом уровне

энергии. Теорема Колмогорова о сохранении инвариантных торов при малом изменении функции Гамильтона здесь не выполняется. Заметим, что условия теоремы не выполнены из-за вырожденности гамильтониана на этом уровне (см. утверждение 1). Отметим также, что введенное возмущение $\varepsilon^2 K_1$ устраняет вырожденность, так как на нулевом ($J_2=0$) и на соседних уровнях энергии в промежутке между торами ($J_1=0$) образуются новые торы, движение по которым происходит с функционально независимыми частотами ω_2 и ω_1 , последняя из которых будет определена далее. Добавление к функции $K_0 + \varepsilon^2 K_1$ возмущений следующего порядка малости $\varepsilon^3 K_2$ уже не меняет качественно картину движения, это также следует из теоремы Колмогорова. Таким образом, большинство решений точной системы будет представляться двухчастотными обмотками торов, близких к полученным из системы (4.4), (4.5).

Рассмотрим решение уравнений (4.4). Интеграл $K_0 + \varepsilon^2 K_1 = -h_2 = \text{const}$ можно представить при помощи вспомогательной переменной $n = \arcsin J_1$ в виде

$$\begin{aligned} [a - h_1(n)] \cos n + k_1 \cos \varphi_1 \cos n + k_2 \sin n &= h_2 \\ h_1 &= J_2 C [B(n) I_1]^{-1/2}, \quad B(n) = A_3 + I_2 \sin^2 n + I_3 \cos^2 n \\ k_1 &= \varepsilon^2 \cos \lambda, \quad k_2 = \varepsilon^2 \sin \lambda, \quad a = CG p_7^{-2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Уравнения (4.4) при помощи той же переменной n преобразуются к виду

$$dn/d\tau = -k_1 \sin \varphi_1, \quad (4.9)$$

$$d\varphi_1/d\tau = k_1 \cos \varphi_1 \operatorname{tg} n - k_2 + [a - h_1(n) (A_3 + I_2) B^{-1}] \operatorname{tg} n \quad (4.10)$$

Исключая из уравнений (4.9) φ_1 при помощи интеграла (4.8), приходим к обращению квадратуры

$$\int_{n_0}^n \frac{\cos n \, dn}{\sqrt{k_1^2 \cos^2 n - [k_2 \sin n + (a - h_1(n)) \cos n - h_2]^2}} = \frac{Ct}{p_7} \quad (4.11)$$

Отсюда находим $n = n(t)$, фаза $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ определяется из интеграла (4.8).

Связь производной $dn/d\tau$ и n , отраженная в квадратуре (4.11), показана в левой части фиг. 3, на которой изображены также траектории эволюционных движений в пространстве (n, n, φ_1) . Траектории ложатся на цилиндрическую поверхность (4.9), полученную параллельным переносом оси n вдоль синусоидальной образующей. Жирной линией изображена сепаратриса, отделяющая замкнутые кривые движения около устойчивого положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $n = n_+$ от кривых, соответствующих вращениям и показанных пунктиром.

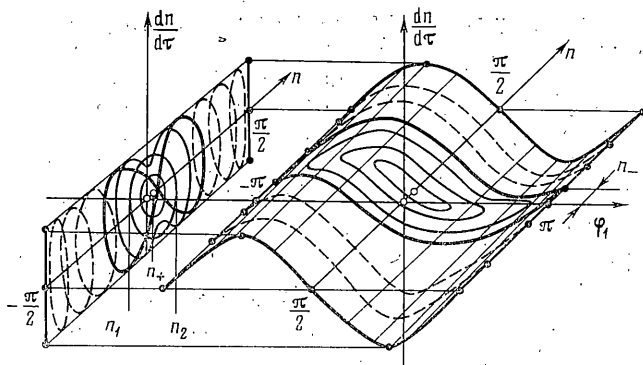
Замечание 4. Правые части уравнений (4.9), (4.10) периодичны по φ_1 и n с периодом 2π и π соответственно. Картинную плоскость (φ_1, n) исходной системы достаточно построить в прямоугольнике δ_1 : $-\pi \leq \varphi_1 \leq \pi$, $-1/2\pi < n < 1/2\pi$; остальная часть картины может быть получена в силу указанной периодичности.

Решение уравнений (4.4) в исходных координатах выражается через (4.11) следующим образом:

$$\alpha = \varphi_1 + \alpha_0(n) \cos \left[\int_{t_0}^t \omega_2^\circ(n) \, dt \right] + O(\varepsilon^2) \quad (4.12)$$

$$\beta = n + \sqrt{B(n) I_1^{-1}} \alpha_0(n) \sin \left[\int_{t_0}^t \omega_2^\circ(n) \, dt \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\alpha^* = -\omega_2^\circ(n) \alpha_0(n) \sin \left[\int_{t_0}^t \omega_2^\circ(n) \, dt \right] + O(\varepsilon)$$



Фиг. 3

$$\beta^* = p_\gamma \cos n I_1^{-1} \alpha_0(n) \cos \left[\int_{t_0}^t \omega_2^\circ(n) dt \right] + O(\varepsilon)$$

$$\omega_2^\circ(n) = \frac{p_\gamma \cos n}{\sqrt{I_1 B(n)}}, \quad \alpha_0(n) = \left[\frac{2J_2}{\cos n} \sqrt{\frac{2I_1}{B(n)}} \right]^{1/2} =$$

$$= \alpha_0(n_0) \left[\frac{\cos n_0}{\cos n} \sqrt{\frac{B(n_0)}{B(n)}} \right]^{1/2}, \quad n_0 = n(t_0)$$

Отличие решений (4.12) от прецессионных не только в том, что к решению $\alpha = \varphi_1(t)$, $\beta = n(t)$ добавлены малые быстро осциллирующие слагаемые. Сам интеграл (4.8), связывающий φ_1 и n , отличается от аналогичного интеграла прецессионной теории добавочным членом $-h_1(n) \cos n$. Известно [7], что нутационные колебания уравновешенного гироскопа приводят к уходу Магнуса в инерциальной системе координат, тогда как малые нутации гироскопа приводят к малому искажению эволюционной траектории и к поправке момента силы тяжести.

Так как разность между правыми частями точных уравнений с функцией Гамильтона K и уравнений (4.4) $\ll \varepsilon^3$, то за время $\tau \ll \varepsilon^{-2}$ решения разойдутся на расстояние $\ll \varepsilon$. Аккуратные оценки см. в [6]. В реальном времени решения уравнений (4.4) имеют точность порядка ε на отрезке $0 \leq t \leq N\varepsilon^{-2} C p_\gamma^{-1}$. Учитывая обозначения для ε (2.5), имеем отрезок $0 \leq t \leq \ll N/u$, где u — угловая скорость вращения Земли. Заметим, что величина $2\pi/u$ равна одним Земным суткам.

5. При помощи интеграла (4.11) определим величину периода T эволюционных движений $n(t)$:

$$T = \frac{2p_\gamma}{C} \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{\sqrt{\Phi(n)}} \quad (5.1)$$

Здесь n_1 и n_2 — нули функции $\Phi(n)$ (фиг. 3), между которыми происходит движение. Функция $\Phi(n)$ имеет вид

$$\Phi(n) = (\rho_0)^2 [h_2' - \cos(n - n_+)] [\cos(n - n_-) - h_2''] (\cos n)^{-2} \quad (5.2)$$

$$\rho_0(n) = \{ [k_2^2 + (a_0 - k_1)^2] [(a_0 + k_1)^2 + k_2^2] \}^{1/4}, \quad a_0 = a - h_1(n) \quad (5.3)$$

$$h_2' = h_2 / \sqrt{(a_0 + k_1)^2 + k_2^2}, \quad h_2'' = h_2 / \sqrt{(a_0 - k_1)^2 + k_2^2}$$

$$\operatorname{tg} n_+ = k_2 (a_0 + k_1)^{-1}, \quad \operatorname{tg} n_- = k_2 (a_0 - k_1)^{-1} \quad (5.4)$$

Рассмотрим три условия: $I_2 = I_3$; $I_2 \neq I_3$, $h_1 = 0$ и $a_0 \gg k_1, k_2$, при которых интеграл (5.1) можно выразить через нормальные эллиптические интегра-

лы Лежандра. В первых двух случаях $a_0 = \text{const}$ в силу постоянства h_1 , что влечет за собой постоянство c° , h_2' , h_2'' , n_+ , n_- и, следовательно, упрощение интеграла. В последнем случае, как будет показано далее, изменение n происходит в узком диапазоне $\sim k_1/a_0 \ll 1$, следовательно, можно также считать, что $a_0 = \text{const}$.

В этих предположениях величины n_+ и n_- , определяемые выражениями (5.4), имеют смысл, соответственно, устойчивого и неустойчивого положения равновесия: $(\alpha=0, \beta=n_+)$, $(\alpha=\pi, \beta=n_-)$.

При вычислении интеграла будем предполагать возможными следующие ситуации: имеется два действительных нуля $\Phi(n)$ в интервале $(-1/2\pi, 1/2\pi)$; имеется четыре нуля $\Phi(n)$ в том же интервале.

При вычислении интеграла проследим, как меняется движение гироскопа с изменением постоянной интегрирования h_2 . Заметим, что первый интеграл (4.8) удовлетворяется вещественными n и φ_1 лишь при некоторых ограничениях на значения h_2 . Действительно, h_2 выражается через начальные условия $n(0) = n_0$, $\varphi(0) = \varphi_{10}$:

$$\begin{aligned} |h_2| &= |a_0 \cos n_0 + k_2 \sin n_0 + k_1 \cos n_0 \cos \varphi_{10}| = \\ &= |\sqrt{k_2^2 + (a_0 + k_1 \cos \varphi_{10})^2} \sin(n_0 + \alpha_0)| \leq \sqrt{k_2^2 + (a_0 + k_1)^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

В первом случае, как видно из (5.2), константа интегрирования и параметры системы должны удовлетворять двум условиям для того, чтобы $\Phi(n)$ имела только два вещественных нуля: $|h_2'| < 1$, $|h_2''| > 1$. Этот случай соответствует колебаниям вокруг устойчивого положения равновесия, на фиг. 3 траектории изображены тонкими сплошными линиями. Неравенства имеют вид

$$\sqrt{(a_0 - k_1)^2 + k_2^2} < h_2 < \sqrt{(a_0 + k_1)^2 + k_2^2} \quad (5.6)$$

Замена переменной интегрирования $z = \text{tg}^{1/2}(n - n_+)$ в (5.4) приводит к вычислению эллиптического интеграла

$$\rho_1 T = \int_{-z_0}^{z_0} \frac{(1 - 2 \text{tg} n_+ z - z^2) dz}{(1 + z^2) \sqrt{(z_0^2 - z^2)(z - z_1)(z - z_2)}} \quad (5.7)$$

в котором z_0 — вещественный нуль подкоренного выражения: $z_0 = \text{tg}[(n_2 - n_1)/4]$; z_1, z_2 — комплексно-сопряженные в рассматриваемом случае (5.6) и действительные величины в случае $|h_2''| < 1$:

$$z_{1,2} = \frac{\sin(n_- - n_+) \pm i \sqrt{h_2''^2 - 1}}{h_2'' + \cos(n_+ - n_-)}, \quad \rho_1 = \rho_0 \frac{C \sqrt{h_2'' + \cos(n_+ - n_-)}}{2 \sqrt{2p_\gamma \cos n_+} \sqrt{1 + z_0^2}} \quad (5.8)$$

Следующая замена приводит к форме, близкой к нормальной форме Лежандра

$$\text{tg}^2 \psi / 2 = (z_0 - z) \cos \theta_1 / (z_0 + z) \cos \theta_2 \quad (5.9)$$

В (5.9) θ_1 и θ_2 — острые углы, определяемые равенствами

$$\text{tg} \theta_1 = \{ [h_2'' + \cos(n_+ - n_-)] z_0 + \sin(n_+ - n_-) \} (h_2'' - 1)^{-1/2} \quad (5.10)$$

$$\text{tg} \theta_2 = \{ -[h_2'' + \cos(n_+ - n_-)] z_0 + \sin(n_+ - n_-) \} (h_2'' - 1)^{-1/2}$$

Период T теперь определяется интегралом

$$\rho_1 T = \int_0^\pi \frac{\Phi_0(\psi) d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k = \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (5.11)$$

$$\Phi_0(\psi) = \rho \frac{\cos^2 \psi + a_1 \cos \psi + a_2}{\cos^2 \psi + a_3 \cos \psi + a_4}$$

$$s = \cos \theta_1 / \cos \theta_2, \quad n_3 = \frac{1}{2}(n_1 - n_2), \quad n_+ = \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$$

$$a_1 = \frac{2(s^2 - 1) \cos n_3 - 2(s^2 + 1) \operatorname{tg} n_+ \sin n_3}{(s^2 + 1) \cos n_3 - 2s - (s^2 - 1) \operatorname{tg} n_+ \sin n_3}$$

$$a_2 = \frac{(s^2 + 1) \cos n_3 + 2s - (s^2 - 1) \operatorname{tg} n_+ \sin n_3}{(s^2 + 1) \cos n_3 - 2s - (s^2 - 1) \operatorname{tg} n_+ \sin n_3}$$

$$a_3 = \frac{2(s^2 - 1)}{s^2 + 1 - 2s \cos n_3}, \quad a_4 = \frac{s^2 + 1 + 2s \cos n_3}{s^2 + 1 - 2s \cos n_3}$$

$$\rho = \frac{(s^2 + 1) \cos n_3 - 2s - (s^2 - 1) \sin n_3 \operatorname{tg} n_+}{(2s \cos n_3 - s^2 - 1) \sqrt{h_2''^2 - 1}} \times \\ \times \sqrt{\cos \theta_1 \cos \theta_2 [h_2'' + \cos(n_+ - n_-)]}$$

Разложим функцию $\Phi_0(\psi)$ на элементарные дроби

$$\Phi_0 = \rho + Q/(\cos \psi - c) + \bar{Q}/(\cos \psi - \bar{c}) \quad (5.12)$$

$$c = c_1 + ic_2 = \frac{s^2 - 1 - 2is \sin n_3}{s^2 + 1 - 2s \cos n_3}, \quad Q = Q_1 + iQ_2 = \\ = \frac{1}{2}(a_1 - a_3)\rho + \frac{1}{2}i[a_2 - a_4 + (a_3 - a_1)c_1]\rho/c_2$$

Преобразуем получающиеся при этом интегралы

$$\int_0^\pi \frac{d\psi}{(\cos \psi - c) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(\cos \psi - c) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} - \\ - \int_{-\pi/2}^0 \frac{dy}{(\cos y + c) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2c d\psi}{(\cos^2 \psi - c^2) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \\ = \int_0^{\pi/2} \frac{2c d\psi}{(1 - c^2)[1 - (1 - c^2)^{-1} \sin^2 \psi] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2c}{1 - c^2} \Pi \left(\frac{1}{1 - c^2} \middle| k \right) \quad (5.13)$$

Таким образом, вычисление периода свелось к вычислению полных эллиптических интегралов третьего рода в форме Лежандра с комплексными параметрами $(1 - c^2)^{-1}$ и $(1 - \bar{c}^2)^{-1}$. Как известно [8], полный эллиптический интеграл третьего рода с комплексным параметром можно свести к интегралам с действительными параметрами, для чего достаточно воспользоваться теоремой о перестановке параметра и предела интегрирования, из которой следует равенство, справедливое для интегралов $\Pi(c_0^2 \setminus \kappa)$ с параметром c_0^2 и модулярным углом κ ($\sin \kappa = k$):

$$\Pi(c_0^2 \setminus \kappa) = \mathbf{K}(\kappa) + \frac{c_0}{\sqrt{(1 - c_0^2)(\sin^2 \kappa - c_0^2)}} [\mathbf{K}(\kappa) \mathbf{E}(\varphi \setminus \kappa) - \\ - \mathbf{F}(\varphi \setminus \kappa) \mathbf{E}(\kappa)] \quad (5.14)$$

Здесь $\mathbf{K}(\kappa)$, $\mathbf{E}(\kappa)$ — полные эллиптические интегралы с модулярным углом κ . В неполных интегралах первого и второго рода $\mathbf{F}(\varphi \setminus \kappa)$, $\mathbf{E}(\varphi \setminus \kappa)$ величина $\varphi = \varphi' + i\varphi''$ — комплексная амплитуда, определенная равенством

$$\sin \varphi \sin \kappa = c_0 = 1/\sqrt{1 - c^2} \quad (5.15)$$

Так как интегралы первого и второго рода с комплексной амплитудой выражаются через интегралы с действительными пределами интегриро-

вания, то и вычисление периода колебаний сводится к вычислению табличных интегралов:

$$F(\varphi' + i\varphi'' \backslash \kappa) = F(\chi \backslash \kappa) + iF(\mu \backslash 90^\circ - \kappa) \quad (5.16)$$

$$E(\varphi' + i\varphi'' \backslash \kappa) = E(\chi \backslash \kappa) - iE(\mu \backslash 90^\circ - \kappa) + iF(\mu \backslash 90^\circ - \kappa) + (b_1 + ib_2)/b_3$$

где $\text{ctg}^2 \chi = x$ — положительный корень уравнения

$$x^2 - x[\text{ctg}^2 \varphi' + \sin^2 \kappa \text{sh}^2 \varphi'' \text{cosec}^2 \varphi' - \cos^2 \kappa] - \cos^2 \kappa \text{ctg}^2 \varphi' = 0, \quad \sin^2 \kappa \text{tg}^2 \mu = \text{tg}^2 \varphi' \text{ctg}^2 \chi - 1$$

$$b_1 = \sin^2 \kappa \sin \chi \cos \chi \sin^2 \mu \sqrt{1 - \sin^2 \kappa \sin^2 \chi}$$

$$b_2 = (1 - \sin^2 \kappa \sin^2 \chi) \sin \mu \cos \mu \sqrt{1 - \cos^2 \kappa \sin^2 \mu}$$

$$b_3 = \cos^2 \mu + \sin^2 \kappa \sin^2 \chi \sin^2 \mu$$

Итак, период колебаний T в первом случае выражается при помощи (5.12) и (5.13) через табличные интегралы

$$T = \frac{2}{\rho_1} \left[\rho K(\kappa) + \frac{Qc}{1-c^2} \Pi \left(\frac{1}{1-c^2} \backslash \kappa \right) + \frac{\bar{Q}\bar{c}}{1-\bar{c}^2} \Pi \left(\frac{1}{1-\bar{c}^2} \backslash \kappa \right) \right] \quad (5.17)$$

или после применения последовательно всех формул (5.14)–(5.17) получим окончательно

$$T = S_1 K(\kappa) - E(\kappa) F(\chi \backslash \kappa) S_2 + F(\mu \backslash 90^\circ - \kappa) [E(\kappa) - K(\kappa)] S_3 + S_3 K(\kappa) E(\mu \backslash 90^\circ - \kappa) + S_2 K(\kappa) E(\chi \backslash \kappa) \quad (5.18)$$

$$S_1 = \frac{2}{\rho_1} \left[\rho + 2 \frac{b_1 u^\circ - b_2 v^\circ}{b_3} + \rho \frac{2(a_1 - a_3)c_1 - (a_2 - a_4)(1 + a_4)}{(1 - c_1^2 + c_2^2)^2 + 4(c_1 c_2)^2} \right]$$

$$S_2 = 2u_0/\rho_1, \quad S_3 = 2v_0/\rho_1$$

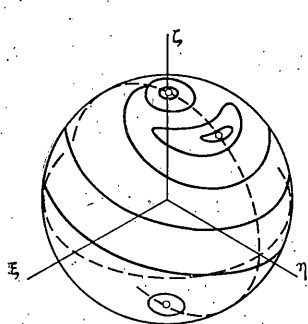
$$u^\circ = \text{Re} \frac{Q_1 + iQ_2}{\sqrt{(1-c^2)[1-(1-c^2)\sin^2 \kappa]}}$$

$$v^\circ = \text{Im} \frac{Q_1 + iQ_2}{\sqrt{(1-c^2)[1-(1-c^2)\sin^2 \kappa]}}$$

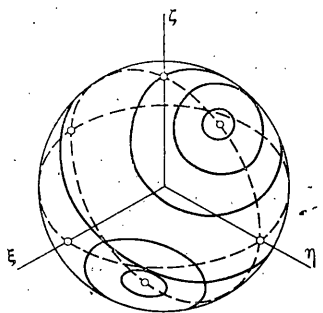
Интеграл (5.1), а следовательно, и период прецессионных движений вокруг устойчивого положения равновесия выражен через эллиптические интегралы в форме Лежандра.

Во втором случае, когда подкоренная функция $\Phi(n)$ в (5.1) имеет четыре вещественных нуля, период движений вычисляется по аналогичной (5.18) формуле, отличающейся лишь коэффициентами S_1, S_2, S_3 .

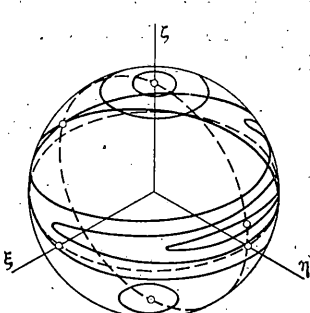
На фиг. 4–6 изображены эволюционные движения точки пересечения единичной сферы с осью вращения ротора Oy гироскопа, установленного на северном полушарии Земли ($k_2 > 0$). Движение системы в южном полушарии ($k_2 < 0$) можно получить из приведенных, принимая во внимание инвариантность уравнений (4.9) относительно замены $\varphi_1, n, |k_2|$ на $-\varphi_1, -n, -|k_2|$. На сфере пунктирными линиями изображены пересечения с ней горизонтальной ($\xi\eta$) и меридиональной ($\eta\xi$) плоскостей. Переменные (φ_1, n) имеют смысл долготы и широты, соответственно, и принимают значения $(\varphi_1, 0)$ на первой плоскости и $(0, n)$ на северной части плоскости ($\eta\xi$). Полные движения можно представить себе в виде пугационных колебаний, центр которых медленно смещается вдоль замкнутых кривых, изображенных сплошными линиями. Картина движения при $a > k_1$ (фиг. 6)



Фиг. 4



Фиг 5



Фиг. 6

отличается от движений при $a < k_1$ (фиг. 5) наличием сепаратрисы. На фиг. 4 изображено стягивание верхней петли сепаратрисы при уменьшении a до k_1 .

Обычно в реальных наземных гирокомпасах параметры подобраны так, что выполнено условие $G \gg hu_2$ или, что то же самое, $a \gg k_1$, которое влечет за собой в силу (5.6) малость диапазона изменения h_2 : $a_0 - k_1 \leq h_2 \leq a_0 + k_1$, а следовательно, n , так как при этом $h_2 = a_0 \cos n [1 + O(k_1/a_0)]$, $k_1/a_0 \rightarrow 0$. Замкнутые кривые вместе с ограничивающей их сепаратрисой тем ближе к плоскости $\xi\eta$, чем меньше отношение k_1/a_0 .

Наряду с выражением (5.18), учитывающим в формуле для периода конечность углов поворота α и β , полезно иметь более простую формулу, справедливую при малой разности n_1 и n_2 , в пределах которых происходит изменение координаты n . Ее можно получить из (5.18), опуская слагаемые следующего порядка малости по параметру k_1/a_0 :

$$T = 4K(\kappa) \sqrt{h / (G - h_1^\circ)} u_2 \quad (5.19)$$

В (5.19) $\kappa = \frac{1}{2}\alpha_0$ — модулярный угол полного эллиптического интеграла первого рода $K(\kappa)$, выраженный через амплитуду колебаний по углу вращения внешнего карданового кольца α_0 : $-\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Константа h_1° выражается через амплитуду нутационных колебаний a_H :

$$h_1^\circ = (a_H)^2 H^2 (A_3 + I_2) / 2I_1 (A_3 + I_3) \quad (5.20)$$

Формула (5.19) аналогична выражению для периода математического маятника.

Автор выражает признательность В. Ф. Журавлеву за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жбанов Ю. К. Решение уравнений движения гирогоризонткомпаса при конечных углах отклонения от меридиана. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 102–104.
2. Летов А. М. К теории гирополукомпасов. — Инж. сб., 1952, т. 13, с. 123–130.
3. Николаи Е. Л. О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. — ПММ, 1939, т. 3, № 4, с. 3–34.
4. Климов Д. М., Степаненко Н. П. Об интегрировании уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе. — Инж. ж. МТТ, 1967, № 6, с. 143–150.
5. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. — Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4, с. 527–530.
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
7. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. А. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979, 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1983