**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1985**

УДК 531.355

К ЗАДАЧЕ О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

КОЗЛОВ В. В.

В публикуемой работе рассматривается задача о вращении ферромагнетика в постоянном по времени и однородном магнитном поле. Исследованы вопросы интегрируемости уравнений движения и существования периодических вращений твердого тела. В случае, когда возникающий согласно эффекту Барнетта магнитный момент тела пропорционален вектору его угловой скорости, установлена связь этой задачи с задачей о движении твердого тела в идеальной жидкости.

1. Уравнения движения. Известно, что «нейтральный» ферромагнетик при вращении становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта, см. [1]). Магнитный момент тела $\mathbf{B}$ связан с его угловой скоростью ω соотношением $\mathbf{B}=\Lambda\omega$, где Λ — некоторый симметричный линейный оператор. Аналогичное явление имеет место и при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона). Механизм намагничивания твердого тела в этих двух случаях обусловлен различными причинами. Оператор Λ вычислен для тел простой формы (например, для однородных эллипсоидов; см. [2]). Далее рассматривается случай, когда $\Lambda=\lambda E$. Поскольку эффект Барнетта проявляется при быстром вращении тела, то постоянная λ принимает небольшие значения.

Если тело вращается в однородном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}$, то на него действуют магнитные силы с моментом $\mathbf{B}\times\mathbf{H}$. Уравнения вращения можно представить в виде уравнений Эйлера — Пуассона

$$I\omega^{\cdot}+\omega\times I\omega=\varepsilon(\omega\times \mathbf{e}),\quad \mathbf{e}^{\cdot}+\omega\times\mathbf{e}=0 \tag{1.1}$$

где I — оператор инерции, $\mathbf{e}=\mathbf{H}/|\mathbf{H}|$, $\varepsilon=\lambda|\mathbf{H}|$.

Поскольку $(\omega\times\mathbf{e}^{\cdot},\omega)=0$, то магнитные силы не совершают работы и поэтому являются гироскопическими. Уравнения движения (1.1) имеют первые интегралы

$$F_1=(I\omega,\omega),\quad F_2=(I\omega,\mathbf{e}),\quad F_3=(\mathbf{e},\mathbf{e})=1 \tag{1.2}$$

Функция F_1 (удвоенная кинетическая энергия тела) сохраняется ввиду свойства гироскопичности внешних сил, а F_2 (проекция кинетического момента на линию магнитного поля) — ввиду инвариантности задачи относительно группы поворотов G вокруг прямой, параллельной $\mathbf{H}$. Как будет показано, «правильная» запись интеграла момента такова: $(I\omega,\mathbf{e})+\varepsilon(\mathbf{e},\mathbf{e})=\mathrm{const}$. Постоянные интегралов F_1 и F_2 будем обозначать $2h$ и c. Поскольку интегралы (1.2) не зависят от ε, то их бифуркационная диаграмма (множество точек плоскости (h,c), где функции (1.2) зависимы) и топологические типы интегральных многообразий точно такие же, как и в задаче Эйлера — Пуансо (см., например, [3]). Бифуркационная диаграмма состоит из трех парабол $h={}^1/_2c^2I_s$, где $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$ — главные моменты инерции тела. Действительным движениям отвечают точки (h,c) из области $h\geqslant{}^1/_2c^2I_3$. Наибольший интерес представляет область над параболой $h\geqslant{}^1/_2c^2I_1$. Соответствующие трехмерные интегральные многообразия

$M_{h,c}=\{F_1=2h,\ F_2=c,\ h>{}^1/_2c^2I_1\}$ диффеоморфны базисному пространству группы $SO(3)$.

Введем по обычному правилу вторую форму гироскопических сил Γ, положив $\Gamma(\omega_1, \omega_2)=\varepsilon(\omega_1\times e, \omega_2)=-\varepsilon(e, \omega_1\times\omega_2)$. Форма Γ точна: $\Gamma=d\gamma$, где первая форма γ определяется равенством $\gamma(\omega)=-\varepsilon(e, \omega)$. Этот факт можно проверить непосредственно с использованием локальных координат на группе $SO(3)$ (например, углов Эйлера). Из точности формы гироскопических сил вытекает возможность представления уравнений (1.1) в форме уравнений Лагранжа с глобально определенным лагранжианом на пространстве касательного расслоения $TSO(3)$.

Рассматриваемая задача инвариантна относительно действия группы поворотов G вокруг вектора $\mathbf{H}$. Векторное поле этой группы порождается единичным вектором $\mathbf{e}$. Поскольку Γ инвариантна относительно G и $\Gamma(e, \omega)=0$ для всех ω, то форму Γ можно опустить до второй формы $\Gamma^\vee$ на сфере Пуассона $SO(3)/G=S^2$, определяемой уравнением $(e, e)=1$. В сферических координатах ϑ, φ на S^2 $(0<\vartheta<\pi,\ \varphi \bmod 2\pi)$ форма $\Gamma^\vee$ имеет вид $\varepsilon \sin\vartheta d\vartheta\wedge d\varphi$: она совпадает с точностью до множителя ε с ориентированной площадью единичной сферы как поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Следовательно

$$\int\limits_{S^2}\Gamma^\vee=4\pi\varepsilon \tag{1.3}$$

2. Вариационный принцип. Пусть $L(\omega, e)$ — гладкая функция на пространстве состояний $TSO(3)$, инвариантная относительно действия группы G. Рассмотрим задачу по нахождению движений твердого тела $\alpha:[t_1, t_2]\to SO(3)$, на которых функционал действия

$$\Phi(\alpha)=\int\limits_{t_1}^{t_2} L(\omega(t), e(t))\,dt$$

принимает стационарное значение (в классе кривых на $SO(3)$ с закрепленными концами). Можно показать, что движение α является стационарной точкой функционала Φ тогда и только тогда, когда функции $\omega(t)$ и $e(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\omega}+\omega\times\frac{\partial L}{\partial\omega}=\frac{\partial L}{\partial e}\times e,\qquad \dot{e}+\omega\times e=0 \tag{2.1}$$

Уравнения (2.1) фактически являются уравнениями Пуанкаре для группы $SO(3)$ и их можно получить методом из [4] (ср. с [5], п. 264). Они имеют первые интегралы

$$(\partial L/\partial\omega, \omega)-L,\quad (\partial L/\partial\omega, e) \tag{2.2}$$

Второй из них является интегралом Нетер; он порожден группой симметрий G. Если положить

$$L={}^1/_2(I\omega, \omega)+\varepsilon(\omega, e) \tag{2.3}$$

то уравнения (2.1) будут эквивалентны уравнениям (1.1). Следовательно, вращение намагниченного твердого тела в однородном магнитном поле описывается вариационным принципом Гамильтона. Интегралами (2.2) в этом случае будут функции $(I\omega, \omega)/2$ и $(I\omega, e)+\varepsilon(e, e)$.

Предположим, что лагранжиан L является невырожденной функцией относительно ω:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\omega_i\partial\omega_j}\right\|\neq 0,\qquad \omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Полагая $\mathbf{M}=\partial L/\partial\boldsymbol{\omega}$ и разрешая это равенство относительно $\boldsymbol{\omega}$ (по крайней мере локально), введем функцию Гамильтона: $H(\mathbf{M}, \mathbf{e})=(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega})-L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})$. Используя очевидные равенства $\partial L/\partial\mathbf{e}+\partial H/\partial\mathbf{e}=0$, $\boldsymbol{\omega}=\partial H/\partial\mathbf{M}$, уравнения (2.1) можно представить в виде следующей системы для переменных M и e:

$$\mathbf{M}^{\cdot}=\mathbf{M}\times\partial H/\partial\mathbf{M}+\mathbf{e}\times\partial H/\partial\mathbf{e},\quad \mathbf{e}^{\cdot}=\mathbf{e}\times\partial H/\partial\mathbf{M} \tag{2.4}$$

Этот результат фактически принадлежит Н. Г. Четаеву, представившему уравнения Пуанкаре в форме уравнений Гамильтона [6].

Уравнения (2.4) по форме совпадают с уравнениями Кирхгофа, описывающими движение твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости (см., например, [7]). Применим это наблюдение к задаче о вращении намагниченного твердого тела. Функции Лагранжа (2.3) отвечает гамильтониан

$$H={}^1/_2(A\mathbf{M}, \mathbf{M})+(B\mathbf{M}, \mathbf{e})+{}^1/_2(C\mathbf{e}, \mathbf{e}) \tag{2.5}$$

где $A=I^{-1}$, $B=-\varepsilon I^{-1}$, $C=\varepsilon^2 I^{-1}$. Функция Гамильтона с диагональными матрицами A, B, C ($B\neq0$) описывает динамику твердых тел с винтовой симметрией (см. [7]). Неотрицательная функция H не является в этом случае положительно-определенной: $H={}^1/_2(I^{-1}(\mathbf{M}-\varepsilon\mathbf{e}), (\mathbf{M}-\varepsilon\mathbf{e}))=0$, где $\mathbf{M}=\varepsilon\mathbf{e}$.

С точки зрения уравнений Кирхгофа последнее соотношение отвечает винтовому движению тела в направлении вектора $\mathbf{e}$. Поскольку на таком движении полная энергия тела и жидкости равна нулю, то твердое тело обладает соответствующей винтовой симметрией и его масса равна нулю.

3. Задача об интегрируемости уравнений движения. Поскольку уравнения Кирхгофа гамильтоновы на четырехмерных многообразиях уровня интегралов $F_2^*=(\mathbf{M}, \mathbf{e})=(I\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})+\varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ и $F_3^*=(\mathbf{e}, \mathbf{e})\neq0$ (см. [8]), то для их полной интегрируемости недостает четвертого независимого интеграла. Этот же вывод можно сделать применяя теорию интегрирующего множителя Эйлера — Якоби. Вопрос о существовании дополнительного интеграла уравнений Кирхгофа, аналитического по переменным $\mathbf{M}$ и $\mathbf{e}$, исследован в [9], где показано, что необходимым условием интегрируемости является выполнение следующего равенства:

$$a_1^{-1}(b_2-b_3)+a_2^{-1}(b_3-b_1)+a_3^{-1}(b_1-b_2)=0 \tag{3.1}$$

где a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 — диагональные элементы матриц A и B в формуле (2.5). Пусть $I=\operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Подставляя в (3.1) значения $a_s=I_s^{-1}$, $b_s=-\varepsilon I_s^{-1}$, получим $\varepsilon I_1I_2I_3(I_3^{-1}-I_2^{-1})(I_1^{-1}-I_3^{-1})(I_1^{-1}-I_2^{-1})=0$. Следовательно, для существования дополнительного аналитического интеграла уравнений (1.1) необходима динамическая симметрия твердого тела. Выполнения условия симметрии достаточно для интегрируемости: если, например, $I_1=I_2$, то уравнения (1.1) имеют дополнительный линейный интеграл $F_4=I_3\omega_3+\varepsilon e_3$. Этот интегрируемый случай отмечен и исследован в [10]. С точки зрения задачи о движении твердого тела в идеальной жидкости этот результат является частным случаем более общего результата Кирхгофа: если матрицы A, B, C диагональны и $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ и $c_1=c_2$, то уравнения (2.3) имеют первый интеграл $F_4=M_3$ (см. [7]).

Интегрируемости несимметричного случая препятствует расщепление сепаратрис постоянных вращений свободного твердого тела вокруг средней оси инерции при добавлении гироскопических сил в [9].

4. Периодические вращения. Рассмотрим задачу о существовании периодических решений уравнений (1.1). Сначала воспользуемся методами вариационного исчисления в целом. Факторизацией по группе симметрий G сведем задачу к исследованию приведенной лагранжевой системы с двумя степенями свободы. Пространством положений будет $SO(3)/G=S^2$ — сфера Пуассона. При фиксированном значении интеграла $F_2=(I\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})=c$ приведенная система будет системой с гироскопическими силами; соответствующая вторая форма гироскопических сил $\Gamma_c=\Gamma^\vee+\Phi_c$, где $\Gamma^\vee$ — форма магнитных сил (см. п. 1), а Φ_c — гироскопическая форма, получающаяся в результате понижения порядка по Раусу задачи Эйлера — Пуансо.

Известно, что $\int \Phi_c = 4\pi c$ (интегрированное по S^2) ([8]). Учитывая формулу (1.3), приходим к равенству $\int \Gamma_c = 4\pi(c+\varepsilon)$ (интегрированное по S^2). Следовательно, при $c=-\varepsilon$ форма Γ_c точна и в этом случае динамика приведенной системы описывается уравнениями Лагранжа с однозначным лагранжианом $L=L_2+L_1+L_0$, определенным на TS^2.

Отметим, что $L_0=-{}^1/_2c^2(I\mathbf{e}, \mathbf{e})$; функция $(-L_0)$ является приведенным потенциалом. При фиксированном значении полной энергии $h=L_2-L_0$ задача о периодических траекториях сводится к задаче о замкнутых экстремалях функционала Мопертюи $\int [2((L_0+h)L_2)^{1/2}+L_1]\,dt$. При достаточно больших значениях h подынтегральное выражение является положительно-определенной функцией скоростей и поэтому к функционалу Мопертюи применимы методы вариационного исчисления в целом. Так, например, из результата Биркгофа о замкнутых геодезических финслеровой метрики на многомерной сфере [11] вытекает существование периодических траекторий на сфере Пуассона (при $c=-\varepsilon$ и каждом достаточно большом значении h). Разрешима двухконцевая вариационная задача: любые две точки на сфере Пуассона можно соединить траекторией заданной энергии. Для каждой точки на S^2 имеется геодезическая петля: т. е. для $a\in S^2$ существует движение $x:[t_1, t_2]\to S^2$ энергии h, такое, что $x(t_1)=x(t_2)=a$.

Аналогичные результаты верны и при $c\neq-\varepsilon$, только их обоснование более сложно. Наличие периодических траекторий при всех $c\neq-\varepsilon$ и $h>\max(-L_0)$ указано в [8, 12, 13]. Отметим, что значениям $h>\max(-L_0)$ отвечают точки плоскости (h, c), лежащие над параболами бифуркационной диаграммы: $h>{}^1/_2c^2I_1$. Для того чтобы установить существование движения с заданными значениями h и c, соединяющего фиксированные точки a и b на сфере Пуассона, можно поступить следующим образом. На сфере Пуассона с выколотой точкой a форма Γ_c является точной (лемма Пуанкаре), причем в подходящих локальных координатах на $S^2\setminus\{a\}$ коэффициенты первой формы γ_c ($d\gamma_c=\Gamma_c$) ограничены. Поэтому движение системы в $S^2\setminus\{a\}$ описывается уравнениями Лагранжа с однозначным лагранжианом $L_2+L_1+L_0$. Среди кусочно-гладких кривых, соединяющих точки a и b на $S^2\setminus\{a\}$, ищем кривую, доставляющую минимум функционалу Мопертюи. Такая кривая существует при каждом фиксированном значении c и достаточно больших h. Аналогичный результат подходит и для замкнутых петель траекторий. Таким же способом можно установить существование замкнутых траекторий на сфере Пуассона, перенося известное доказательство Биркгофа о замкнутых геодезических [11] на системы с гироскопическими силами, форма которых не является точной. При этом придется ограничиться точками плоскости (h, c), расположенными вдали от бифуркационной диаграммы. Теория в [8, 12, 13] дает, однако, более сильный результат. Отметим, что двухконцевая задача разрешима не при всех значениях $h>\max(-L_0)$. Соответствующий пример для родственной задачи о движении заряженной частицы по сфере в магнитном поле указан в [8].

В случае малых значений параметра ε (практически наиболее важный случай) в задаче о периодических решениях уравнений (1.1) более эффективным является метод малого параметра. Если ε не является малым, то в уравнениях (1.1) можно сделать следующую замену переменных: $\omega\mapsto N\omega$, $t\mapsto Nt$. Вид уравнений при этом не изменится, только параметр ε заменится на ε/N. Следовательно, при больших значениях N (что эквивалентно случаю быстрых вращений тела) с помощью метода малого параметра можно получить семейства короткопериодических решений.

Будем считать, что $I_1<I_2<I_3$. Случай равных моментов инерции не представляет особого интереса ввиду свойства плотности периодических траекторий в фазовом пространстве. Если $h>{}^1/_2c^2I_1$, то при $\varepsilon=0$ на каждой трехмерной интегральной поверхности $M_{h,c}=\{F_1=2h, F_2=c\}$ уравнения (1.1) имеют шесть различных периодических решений, являющихся постоянными вращениями. Как показано в [14], эти решения невырождены в силу предположения о несимметричности эллипсоида инерции. Следовательно, по теореме Пуанкаре при малых значениях ε на тех же интегральных поверхностях возмущенные уравнения будут также иметь шесть различных периодических решений, причем их траектории на сфере Пуассона — несамопересекающиеся замкнутые кривые. Этот результат не исчерпывает всех возможностей метода малого параметра Пуанкаре. Существование других невырожденных периодических решений на интегральных поверхностях $M_{h,c}$ можно установить следующим образом (ср. с [14], гл. 4).

При $\varepsilon=0$ поверхность $M_{h,c}$ расслоена на двумерные инвариантные торы интегрируемой задачи Эйлера — Пуансо. При добавлении возмущения разрушаются бесконечно много резонансных торов, накапливающихся у сепаратрис неустойчивых постоянных вращений твердого тела вокруг средней оси эллипсоида инерции. Из семейств вырожденных периодических решений невозмущенной задачи, заполняющих эти торы, рождаются пары невырожденных решений. Одно из решений каждой пары имеет гиперболический тип (следовательно, оно орбитально неустойчиво), а другое — эллиптический тип. Эти решения можно представить в виде рядов по степеням ε, сходящихся при малых значениях ε. Их радиусы сходимости уменьшаются до нуля, когда соответствующие порождающие решения (при $\varepsilon=0$) неограниченно приближаются к сепаратрисам. Поэтому при каждом малом фиксированном значении $\varepsilon\neq0$ можно гарантировать существование большого (но конечного) числа невырожденных периодических решений. Их число неограниченно увеличивается, когда $\varepsilon\to0$. Используя результаты КАМ-теории и геометрическую теорему Пуанкаре, можно доказать существование бесконечного числа различных периодических траекторий на $M_{h,c}$ при малых фиксированных значениях ε ([15]).

Можно показать, что рождение такого большого числа невырожденных периодических решений (тесно связанное с расщеплением сепаратрис) несовместимо с интегрируемостью возмущенных уравнений [14].

5. Новый случай интегрируемости. В общем случае, когда магнитный момент связан с угловой скоростью соотношением $\mathbf{B}=\Lambda\boldsymbol{\omega}$, уравнения движения имеют два интеграла $F_2=(I\boldsymbol{\omega},\mathbf{e})$ и $F_3=(\mathbf{e},\mathbf{e})=1$ и их фазовый поток сохраняет стандартную меру в $\mathbb{R}^6=\{\boldsymbol{\omega},\mathbf{e}\}$. Следовательно, по теории интегрирующего множителя Эйлера — Якоби для их полной интегрируемости недостает двух независимых интегралов. Легко указать случаи наличия одного (но не двух) дополнительного интеграла. Рассмотрим пример: если $\Lambda=\delta I$, то сохраняется $F_1=(I\boldsymbol{\omega},I\boldsymbol{\omega})$. Пусть $\Lambda=\mathrm{diag}(\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3)$. В [10] установлена интегрируемость уравнений движения при выполнении двух условий: $I_1=I_2$ и $\Lambda_1=\Lambda_2$. Этот результат справедлив и при выполнении двух других условий $I_1=I_2=I_3$. Уравнения движения имеют вид

$$\boldsymbol{\omega}^{\cdot}=A\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e},\quad \mathbf{e}^{\cdot}=\mathbf{e}\times\boldsymbol{\omega}\quad (A=\Lambda/I_1) \tag{5.1}$$

Полный набор интегралов составляют функции

$$F_1={}^1/_2(A\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}),\ F_2=(\boldsymbol{\omega},\mathbf{e}),\ F_3=(\mathbf{e},\mathbf{e})=1 \tag{5.2}$$

$$F_4={}^1/_2(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})-(A\boldsymbol{\omega},\mathbf{e})+{}^1/_2(A^{-1}\mathbf{e},\mathbf{e})\det A$$

Если собственные значения оператора A (или Λ) различны, то интегралы (5.2) независимы. В противном случае выполнены условия [10].

Некритические интегральные поверхности уравнений (5.1) являются двумерными торами, поскольку на них нет положений равновесия [14]. Действительно, если в некоторой точке этой поверхности $\mathbf{e}\times\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ и $A\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}=\mathbf{0}$, то $\boldsymbol{\omega}=\lambda\mathbf{e}$ и вектор $\boldsymbol{\omega}$ является собственным вектором оператора A. Но тогда в этой точке фазового пространства функции F_1 и F_2 зависимы, что противоречит предположению о независимости интегралов (5.2).

Согласно теореме А. Н. Колмогорова о динамических системах с инвариантной мерой на торе [16], на некритических интегральных поверхностях можно подобрать угловые переменные u, $v \bmod 2\pi$ так, чтобы уравнения (5.1) приняли следующий вид:

$$u^{\cdot}=\lambda/F(u,v),\quad v^{\cdot}=\mu/F(u,v) \tag{5.3}$$

Постоянные λ, μ и 2π-периодическая функция $F>0$ зависят от констант интегралов F_1, F_2 и F_4. Интересно осуществить явное приведение уравнений (5.1) к виду (5.3) и выяснить возможность их интегрирования в ϑ-функциях времени.

6. Некоторые частные решения. Поскольку система уравнений вращения твердого тела в общем случае

$$I\boldsymbol{\omega}^{\cdot}=I\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}+\Lambda\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e},\quad \mathbf{e}^{\cdot}=\mathbf{e}\times\boldsymbol{\omega} \tag{6.1}$$

далека от интегрируемой, то полезно иметь набор ее точных решений. Укажем некоторые из них.

Положим $I_2=2I_1$, $\Lambda_1=\Lambda_3=0$. В этом случае система (6.1) имеет семейство частных решений: $\omega_1=-(\Lambda_2/I_1)e_1$, $\omega_2=\omega_2^\circ=\mathrm{const}$, $\omega_3=0$, $(\Lambda_2/I_1)e_1^2-2\omega_2^\circ e_2=\mathrm{const}$. Переменная e_3 выражается через e_1; функция $e_1(t)$ находится из уравнения Пуассона $e_1^{\cdot\cdot}=-\omega_2^\circ e_3$. В итоге получаем периодические решения уравнений (6.1), выражаемые через эллиптические функции. Эти решения вполне аналогичны известным решениям Бобылева — Стеклова классической задачи о вращении твердого тела с неподвижной точкой [5].

Положим $\Lambda=\delta I$ и пусть $\boldsymbol{\omega}(t)$ — решение уравнений Эйлера (когда $\Lambda\equiv 0$). Тогда $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\mathbf{e}(t)=I\boldsymbol{\omega}/(I\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})^{1/2}$ — решение уравнений (6.1). В этом случае кинетический момент тела направлен вдоль магнитной линии и тело совершает движение по Пуансо.

Автор благодарен В. Ф. Журавлеву и В. А. Самсонову, обратившим его внимание на задачу, а также С. В. Болотину, сделавшему ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Физматгиз, 1963. 696 с.
2. *Егармин И. Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела.— В кн.: Аэрофизика и геокосмические исследования. М., Моск. физ.-техн. ин-т, 1983, с. 95—96.
3. *Татаринов Я. В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.— Вестн. МГУ. Математика, механика, 1974, № 6, с. 99—105.
4. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des equations de la mechanique.— C. r. Acad. sci. Paris, 1901, v. 132, p. 369—371.
5. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
6. *Četaev N.* Sur les equations de Poincaré.— C. r. Acad. sci. Paris, 1927, v. 185, p. 1577—1578.
7. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
8. *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника-Шнирельмана-Морса (ЛШМ). I — Функциональный анализ и его приложения, 1981, т. 15, вып. 3, с. 54—66.
9. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1298—1300.
10. *Самсонов В. А.* О вращении тела в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 32—34.
11. *Биркгоф Г.* Динамические системы. М.— Л.: Гостехиздат, 1941, с. 320.
12. *Новиков С. П.* Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II. — Функциональный анализ и его приложения, 1981, т. 15, вып. 4, с. 37—52.
13. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов.— Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 1, с. 26—28.
14. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
15. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
16. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе.— Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 5, с. 763—766.

Москва

Поступила в редакцию 29.IV.1985