МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1985

УДК 531.383

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА С МАЛЫМ САМОВОЗБУЖДЕНИЕМ

ПИВОВАРОВ М. Л.

Гироскопом с самовозбуждением называют свободное твердое тело [1], на которое действует момент, известный в системе координат, связанной с телом. Ряд таких задач рассмотрен в [2, 3].

Предположение о малости возмущающего момента, с одной стороны, естественно с точки зрения многих приложений, а с другой – позволяет с помощью асимптотических методов подробно изучить эволюцию вращения. Так, в работах [4, 5] рассмотрен случай постоянного в связанных осях возмущающего момента. Эта задача возникает, например, при учете травления в газореактивной системе ориентации космических аппаратов [5]. В работах [6, 7] исследуется влияние возмущений, линейно-зависящих от угловой скорости.

В данной работе исследуется эволюция вращения в случае, когда возмущающий момент содержит слагаемые, квадратично зависящие от угловой скорости. В качестве приложений можно назвать задачу о поддержании угловой скорости гироскопа с помощью момента, пропорционального разности квадратов фактической и требуемой угловой скорости [2, 3, 8], когда величина момента мала по сравнению с кинетической энергией вращения.

1. Рассмотрим систему уравнений, описывающих движение твердого тела под действием определенной системы моментов

$$Adp/dt+(C-B)qr=M_1$$
$$Bdq/dt+(A-C)rp=M_2 \tag{1.1}$$
$$Cdr/dt+(B-A)pq=M_3-L_3r^2$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции тела, p, q, r – проекции мгновенной угловой скорости на главные оси, M_1, M_2, M_3, L_3 – постоянные, $L_3>0$.

Предположим, что правые части (1.1) малы по сравнению с кинетической энергией вращения. Будем изучать эволюцию вращения, предполагая, что невозмущенное движение происходит в той области пространства $\{p, q, r\}$, где проекция r сохраняет знак и положительна (т. е. в невозмущенном движении полодии охватывают ось C).

Замечание. Весь последующий анализ эволюционных уравнений полностью сохраняется, если возмущающий момент имеет вид $\{M_1-L_1p^2, M_2-L_2q^2, M_3-L_3r^2\}$.

Как известно, невозмущенная система допускает два интеграла: кинетической энергии $2T=Ap^2+Bq^2+Cr^2$ и момента количества движения $G^2=A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2$.

Изменение этих величин в возмущенном движении, очевидно, описывается уравнениями

$$dT/dt=M_1p+M_2q+M_3r-L_3r^3$$
$$dG^2/dt=2(AM_1p+BM_2q+CM_3r-CL_3r^3) \tag{1.2}$$

Для исследования эволюции этих переменных осредним правые части (1.2) вдоль невозмущенного движения – вращения Эйлера – Пуансо. Предположим, для определенности, что $C>B>A$, тогда в рассматриваемой области невозмущенного движения $G^2>2BT$, а решение задачи Эйлера — Пуансо дается формулами [9]:

$$p(t)=\sqrt{\frac{2CT-G^2}{A(C-A)}}\,\mathrm{cn}(\tau,\ k),\quad q(t)=\sqrt{\frac{2CT-G^2}{B(C-B)}}\,\mathrm{sn}(\tau,\ k)$$

$$r(t)=\sqrt{\frac{G^2-2AT}{C(C-A)}}\,\mathrm{dn}(\tau,\ k),\quad \tau=t\sqrt{\frac{(C-B)(G^2-2AT)}{ABC}} \tag{1.3}$$

$$k^2=\frac{(B-A)(2CT-G^2)}{(C-B)(G^2-2AT)} \tag{1.4}$$

в которых k — модуль эллиптических функций Якоби cn, sn, dn. В (1.3) принято, что в начальный момент времени $q=0$, $q^{\cdot}>0$, что, очевидно, несущественно при осреднении.

Осредняя правые части (1.2) вдоль решения (1.3), получим

$$\begin{gathered} dT/dt=M_3\langle r\rangle-L_3\langle r^3\rangle \\ dG^2/dt=2C(M_3\langle r\rangle-L_3\langle r^3\rangle) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь и далее

$$\langle f\rangle=\frac{1}{2K}\int\limits_0^{2K} f(\tau)\,d\tau,$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода, $2K$ — период функций (1.3).

Можно показать, используя, например, [10], что

$$\langle r\rangle=\frac{\pi}{2K}\sqrt{\frac{G^2-2AT}{C(C-A)}},\quad \langle r^3\rangle=\frac{\pi(2-k^2)}{4K}\left\{\frac{G^2-2AT}{C(C-A)}\right\}^{3/2} \tag{1.6}$$

Легко видеть, что уравнения (1.5) имеют интеграл

$$H=2CT-G^2 \tag{1.7}$$

и, следовательно, интегрируемы в квадратурах.

Найдем особые точки системы (1.5). При $M_3<0$ особых точек, очевидно, нет. Рассмотрим случай $M_3>0$. Уравнение особой кривой имеет вид $\langle r^3\rangle/\langle r\rangle=M_3/L_3$. Используя (1.6), (1.4), нетрудно получить, что особая линия — прямая

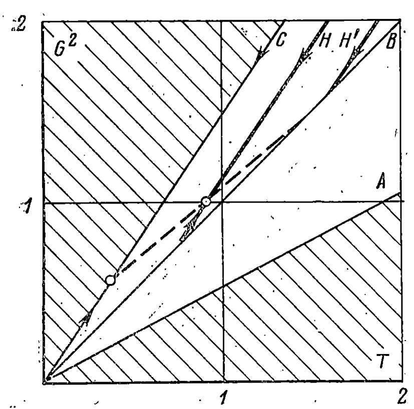
$$G^2=2DT+d \tag{1.8}$$

$$D=\frac{AC+BC-2AB}{2C-A-B},\quad d=2\frac{M_3C(C-A)(C-B)}{L_3(2C-A-B)}$$

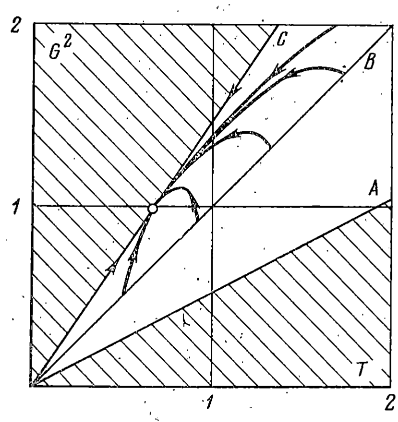
Отметим, что $A<D<B$, $d>0$ и D не зависит от величины возмущений.

На фиг. 1 представлен фазовый портрет системы (1.5). Буквами A, B, C обозначены лучи, отвечающие осевым вращениям вокруг соответствующей оси; H, H' — лучи (1.7) для двух различных значений постоянной интеграла. Пунктиром нанесена особая прямая (1.8) при некотором значении параметра M_3/L_3. Рассматриваемой области невозмущенного движения отвечает часть плоскости, заключенная между лучами B и C. В силу неравенств $2AT\leqslant G^2\leqslant 2CT$ заштрихованной части плоскости не соответствуют никакие G^2, T.

Из (1.8), используя (1.7), легко получить, что если $2M_3C(C-A)(C-B)/(L_3H(B-A))>1$, то на луче H имеется единственное положение равновесия системы (1.5). В противном случае (луч H') на луче особых точек нет. Направления движения фазовых точек показаны на фиг. 1 стрелками.



Фиг. 1



Фиг. 2

Вдоль лучей H и C фазовая точка стремится к положению равновесия, а вдоль луча H' выходит на сепаратрису невозмущенной задачи.

Фиг. 1 и все последующие получены при значениях моментов инерции $A=0{,}26$ кг·м^2, $B=0{,}5$ кг·м^2, $C=0{,}74$ кг·м^2, $M_3=1\cdot10^{-4}$ Н·м, $L_3=1\cdot10^{-4}$ Н·м·с.

2. Пусть возмущающий момент содержит также и диссипативные члены, линейно-зависящие от угловой скорости (в реальной системе такие возмущения естественны). Возьмем уравнения движения в виде

$$A\,dp/dt+(C-B)\,qr=M_1-N_1p,\quad B\,dq/dt+(A-C)\,rp=M_2-N_2q \tag{2.1}$$
$$C\,dr/dt+(B-A)\,pq=M_3-N_3r-L_3r^2$$

в которых постоянные N_1, N_2, N_3 положительны.

Замечание. Так же как и в п. 1, все результаты остаются в силе, если первые два уравнения (2.1) содержат в правых частях возмущения $-L_1p^2$, $-L_2q^2$.

Эволюционные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} dT/dt&=-N_1\langle p^2\rangle-N_2\langle q^2\rangle+M_3\langle r\rangle-N_3\langle r^2\rangle-L_3\langle r^3\rangle\\ dG^2/dt&=-2AN_1\langle p^2\rangle-2BN_2\langle q^2\rangle+2C(M_3\langle r\rangle-N_3\langle r^2\rangle-L_3\langle r^3\rangle)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Можно показать, что

$$\langle p^2\rangle=\frac{(E-Kk'^2)(G^2-2AT)(C-B)}{KA(C-A)(B-A)}$$
$$\langle q^2\rangle=\frac{(K-E)(G^2-2AT)}{KB(B-A)},\qquad \langle r^2\rangle=\frac{E(G^2-2AT)}{KC(C-A)} \tag{2.3}$$

В (2.2) значения $\langle r\rangle$, $\langle r^3\rangle$ приведены в (1.6); E — полный эллиптический интеграл второго рода; $k'^2=1-k^2$.

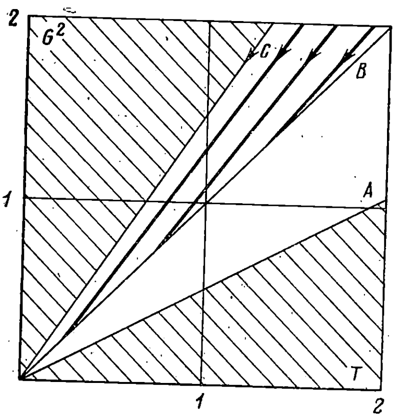
Найдем положения равновесия системы (2.2). Рассмотрим функцию $H=G^2-2CT$. (При отсутствии линейных диссипативных членов H — интеграл.) В силу уравнений (2.2): $dH/dt=2(C-A)N_1\langle p^2\rangle+2(C-B)N_2\langle q^2\rangle$.

Пусть $N_1^2+N_2^2\neq0$, тогда $(dH/dt)>0$ вне луча C. Поэтому особые точки могут лежать только на луче C, а значение r в особой точке должно удовлетворять уравнению

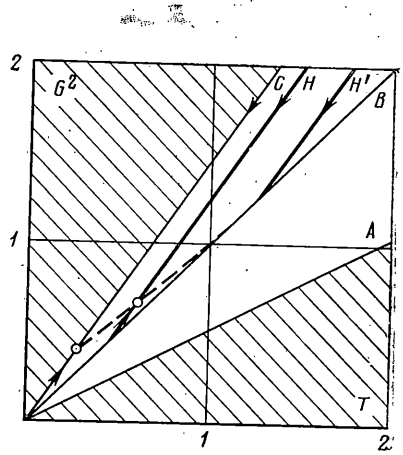
$$M_3\langle r\rangle-N_3\langle r^2\rangle-L_3\langle r^3\rangle=0 \tag{2.4}$$

из которого имеем

$$M_3-N_3r-L_3r^2=0 \tag{2.5}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Если $M_3>0$, то уравнение (2.5) имеет единственное положительное решение, а система (2.2) – единственное положение равновесия (фиг. 2). При $M_3<0$ особых точек нет, все фазовые кривые выходят на сепаратрису (фиг. 3).

Фиг. 2, 3 построены при следующих значениях параметров возмущающего момента: $M_3=\pm 9\cdot 10^{-4}$ Н·м, $N_1=2\cdot 10^{-4}$ Н·м·с, $N_2=1\cdot 10^{-4}$ Н·м·с, $N_3=3\cdot 10^{-4}$ Н·м·с, $L_3=3\cdot 10^{-4}$ Н·м·с^2.

Рассмотрим теперь случай $N_1=N_2=0$. Тогда уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{gathered} dT/dt=M_3\langle r\rangle-N_3\langle r^2\rangle-L_3\langle r^3\rangle \\ dG^2/dt=2C(M_3\langle r\rangle-N_3\langle r^2\rangle-L_3\langle r^3\rangle) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Уравнения (2.6) допускают интеграл (1.7) и интегрируются в квадратурах. При $M_3<0$ особых точек нет и вдоль лучей (1.7) фазовые точки выходят на сепаратрису. При $M_3>0$ получаем уравнение особой кривой в виде (2.4) или, используя (1.6), (2.3), в явном виде

$$M_3-N_3\frac{2E}{\pi}\sqrt{\frac{G^2-2AT}{C(C-A)}}-L_3\frac{(2-k^2)(G^2-2AT)}{2C(C-A)}=0 \tag{2.7}$$

Исследуем существование положения равновесия в зависимости от значения постоянной H интеграла (1.7). Из (2.7), используя (1.4), (1.7), получим, что в особой точке

$$M_3k^2-N_3\frac{2kE}{\pi}\sqrt{\frac{(B-A)H}{C(C-A)(C-B)}}-L_3\frac{(2-k^2)(B-A)H}{2C(C-A)(C-B)}=0 \tag{2.8}$$

Введем положительные постоянные

$$\alpha=M_3+L_3\frac{(B-A)H}{2C(C-A)(C-B)}$$

$$\beta=L_3\frac{(B-A)H}{C(C-A)(C-B)},\qquad \gamma=N_3\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(B-A)H}{C(C-A)(C-B)}}$$

Тогда (2.8) примет вид

$$\alpha k^2-\beta=\gamma E(k)k \tag{2.9}$$

Функция $E(k)k$ равна нулю при $k=0$, единице при $k=1$ и, как следует из анализа второй производной, вогнута. Функция в левой части (2.9) отрицательна при $k=0$, принимает значение $\alpha-\beta$ при $k=1$ и выпукла. Таким образом, если

$$\alpha-\beta>\gamma \tag{2.10}$$

то уравнение (2.9) имеет единственное решение и на луче (1.7) есть единственное положение равновесия. Если выполнено противоположное неравенство, положения равновесия нет и фазовая точка выходит вдоль луча (1.7) на сепаратрису. В исходных переменных условие (2.10) принимает вид

$$M_3-N_3\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(B-A)H}{C(C-A)(C-B)}}-L_3\frac{(B-A)H}{2C(C-A)(C-B)}>0$$

Фазовый портрет системы (2.6) при $M_3>0$ представлен на фиг. 4 (особая кривая нанесена пунктиром), которая построена при следующих значениях параметров возмущающего момента: $M_3=1{,}5\cdot10^{-4}$ Н·м, $N_3=1\cdot10^{-4}$ Н·м·с, $L_3=1\cdot10^{-4}$ Н·м·с^2.

Отметим, что представленные на фиг. 1—4 фазовые портреты эволюционных уравнений неотличимы от аналогичных, полученных численным интегрированием исходных уравнений задачи.

Автор благодарен Л. Д. Акуленко и А. И. Нейштадту за полезное обсуждение этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grammel R.* Der selbsterregte unsymmetrische Kreisel. Ing.-Arch., 1954, B. 22, H. 2, S. 73—97.
2. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
3. *Leimanis E.* The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. B.— Heidelberg — N. Y.: Springer, 1965. 337 p.
4. *Белецкий В. В.* Асимптотические методы в динамике твердого тела.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наук. думка, 1977, с. 42—46.
5. *Нейштадт А. И., Пивоваров М. Л.* Об эволюции вращения ИСЗ под действием возмущающего момента, постоянного в связанных осях.— В кн.: Обработка информации, получаемой по программе «Интеркосмос». М.: Наука, 1982, с. 134—138.
6. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 5—13.
7. *Нейштадт А. И.* Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 30—36.
8. *Grammel R.* Drehzahlabhängige Selbsterregung des unsymmetrische Kreisels.— Ing.-Arch., 1960, B. 29, H. 3, S. 153—159.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
10. *Byrd P. F., Friedman M. D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. B.— Gottingen — Heidelberg: Springer, 1954. 355 p.

Москва

Поступила в редакцию
26.VII.1984