

УДК 533.6.013.42

ДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ, ЗАПОЛНЕННУЮ ЖИДКОСТЬЮ

ПИНЧУКОВА Н. И.

Исследуется нестационарная реакция упругой цилиндрической оболочки, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью, на действие плоской ступенчатой волны давления, распространяющейся во внешней акустической среде. Предполагается, что оболочка бесконечно длинная, и фронт падающей волны параллелен ее оси.

Эта задача не имеет аналитического решения в замкнутой форме, что вынуждало первых исследователей использовать для расчета гидродинамических сил различные приближенные подходы. Обзор методов решения, полученных результатов и библиографию можно найти в [1, 2]. Наиболее изученным является вопрос о поведении возмущений в цилиндрической оболочке без заполнителя при воздействии на нее плоской акустической волны давления. В постановке, свободной от упрощающих гипотез при оценке гидродинамических сил, решение этой задачи получено в [2, 3], где применяется разложение в ряд Фурье по угловой координате и преобразование Лапласа по времени. Обращение изображений в [2, 3] сводится к численному решению интегральных уравнений Вольтерра II рода. В [3] проведен детальный анализ напряженно-деформированного состояния оболочки на всем этапе взаимодействия акустической волны с оболочкой; для больших значений времени получены асимптотики.

Наличие жидкости внутри оболочки усложняет проблему получения точных решений. Существуют единичные работы, в которых учитывается влияние внутренней среды. В [2] решение получено для несжимаемой жидкости, заполняющей оболочку. В [4] изучался лишь начальный этап взаимодействия, причем изображения по Лапласу обращались приближенно. В [5] получены значения переходных функций, связывающих потенциал падающей и преломленной во внутреннюю область волн, на основании точного обращения преобразования Лапласа.

В публикуемой работе используется разложение в ряд Фурье по собственным формам колебаний и конечные разности по радиальной координате и времени. Аналогично [3] исследуется асимптотическое поведение возмущений при $t \rightarrow \infty$ (t — время). Комплексный подход позволяет получить достоверную и довольно полную информацию об основных физических закономерностях нестационарного деформирования цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью, на всем интервале воздействия внешней акустической волны на систему.

1. Введем обозначения: v , w — перемещения оболочки в тангенциальном (θ) и радиальном (r) направлениях, R , δ — ее радиус и толщина, ρ — плотность материала оболочки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, φ_n — потенциал скоростей идеальной сжимаемой жидкости со скоростью звука c_n и плотностью ρ_n ($n=1$ соответствует внутренней среде, $n=2$ — внешней).

Движение оболочки будем описывать линейными уравнениями классической теории Кирхгофа — Лява, возмущения в жидкости — волновым уравнением для потенциала скорости

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\delta^2}{12} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -w - \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\delta^2}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) + \frac{P_{\Sigma}(1 - \nu^2)}{E\delta}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \theta^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad P_\Sigma = (P_0 - P_1 + P_2)_{r=1}, \quad P_n = -\rho_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \quad (n=1, 2)$$

Здесь P_Σ — суммарное давление, действующее на оболочку, $P_0 = -\rho_2 \dot{\varphi}_0$ — давление в падающей волне, которое считается известным, P_1 — давление во внутренней среде, вызванное движением оболочки, P_2 — давление отраженных волн и волн, излученных оболочкой во внешнюю среду. Прогиб, направленный от центра, считается положительным. За единицы измерения приняты R , c_2 , ρ_2 .

Начальные условия нулевые. На поверхности оболочки ($r=1$) выполняются условия равенства радиальных скоростей оболочки и жидкости

$$\partial \varphi_1 / \partial r = w^*, \quad \partial \varphi_2 / \partial r + V_2 = w^*, \quad V_r = \partial \varphi_0 / \partial r \quad (1.2)$$

Во внутренней области ($r < 1$) потенциал φ_1 ограничен, потенциал φ_2 отличен от нуля в расширяющейся области $r \leq t+1$.

Давление в падающей волне описывается выражением

$$P_0 = P_* H_0(t-1+r \cos \theta) \quad (1.3)$$

где P_* — амплитуда давления на фронте волны, H_0 — ступенчатая функция Хевисайда.

В плоской волне скорость частиц жидкости пропорциональна давлению, ее нормальная составляющая к поверхности оболочки определяется по формуле $V_r = -P_0 \cos \theta$.

2. Искомые функции разложим в ряд Фурье по углу θ . Уравнения движения (1.1) для m -й формы колебаний примут вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} = -m^2 v_m - m w_m - \frac{\delta^2 m^2}{12} (v_m + m w_m) \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} = -w_m - m v_m - \frac{\delta^2 m^3}{12} (m w_m + v_m) + \frac{P_{\Sigma, m} (1-\nu^2)}{E \delta}$$

$$\frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_{n, m}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_{n, m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{n, m}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \varphi_{n, m} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

Вид начальных и граничных условий не изменится. Коэффициенты ряда Фурье для давления и скорости частиц жидкости в падающей волне определяются по формулам

$$P_{0,0} = P_* \theta_0 / \pi, \quad P_{0,m} = 2P_* \sin m \theta_0 / (\pi m) \quad (m \neq 0) \quad (2.2)$$

$$V_{r,m} = P_* \varepsilon_m (\sin(1+m)\theta_0 / (1+m) + B_m) / \pi$$

$$\varepsilon_0 = 0,5, \quad \varepsilon_m = 1 \quad (m \neq 0)$$

$$B_1 = \theta_0, \quad B_m = \sin(1-m)\theta_0 / (1-m) \quad (m \neq 1)$$

$$\theta_0 = \arccos(1-t) \quad (0 \leq t \leq 2), \quad \theta_0 = \pi \quad (t > 2)$$

Определим условия, которым должен удовлетворять потенциал φ_1 в точке $r=0$, где волновое уравнение имеет особенность. Решение в изображении по Лапласу (параметр p , значок L) с учетом ограниченности φ_1 имеет вид [6]:

$$\varphi_{1,m}^L = A I_m(rp/c_1) \quad (2.3)$$

где I_m — модифицированные функции Бесселя первого рода.

Пусть $m \neq 0$. Используя разложение функции Бесселя в степенной ряд, обратим $\varphi_{1,m}^L$. Устремляя затем $r \rightarrow 0$, получим

$$\varphi_{1,m} = 0 \quad (r=0, m \neq 0) \quad (2.4)$$

Продифференцируем соотношение (2.3) по r . При $m=0$ получим $\partial \varphi_{1,0}^L / \partial r = A p / c_1 I_1(rp/c_1)$. Отсюда при $r \rightarrow 0$ будем иметь $\partial \varphi_{1,0} / \partial r = 0$. Используя правило Лопиталя, найдем предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1,0}}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi_{1,0}}{\partial r^2}$$

Таким образом, при $m=0$ и $r=0$ потенциал φ_1 удовлетворяет следующим условиям:

$$\partial^2 \varphi_{1,0} / \partial t^2 = 2c_1^2 \partial^2 \varphi_{1,0} / \partial r^2, \quad \partial \varphi_{1,0} / \partial r = 0 \quad (2.5)$$

3. Используем вначале асимптотическое поведение возмущений при $t \rightarrow \infty$. Решение в изображениях по Лапласу для прогиба имеет вид (K_m — функции Макдональда).

$$w_m^L = -P_* \exp(p) / (p K_m'(p) c^2 \rho \delta L(p, m)) \quad (3.1)$$

$$L(p, m) = \frac{p^2}{c^2} + 1 + \delta_0 m^4 - \frac{m^2(1 + \delta_0 m^2)^2}{p^2/c^2 + m^2(1 + \delta_0)} + \\ + \frac{p}{c^2 \rho \delta} \left[\frac{\rho_1 I_m(p/c_1)}{I_m'(p/c_1)} - \frac{K_m(p)}{K_m'(p)} \right], \quad \delta_0 = \frac{\delta^2}{12}$$

$$I_m'(p) = \partial I_m(rp) / \partial r|_{r=1}, \quad K_m'(p) = \partial K_m(rp) / \partial r|_{r=1}$$

Устремляя $p \rightarrow 0$, что соответствует $t \rightarrow \infty$, получим из (3.1) следующие асимптотические выражения:

$$w_0 \sim \frac{P_* (1 - \nu^2)}{E \delta (1 + \gamma)}, \quad w_1 \sim w_1^* t, \quad w_m \sim 0 \quad (m \geq 2) \quad (3.2)$$

$$w_0^* \sim 0, \quad w_1^* \sim \frac{2P_*}{2\rho\delta + \rho_1 + 1}, \quad w_m^* \sim 0 \quad (m \geq 2)$$

$$\sigma_{0,0} \sim \frac{P_*}{\delta(1+\gamma)}, \quad \sigma_{0,m} \sim 0 \quad (m \geq 1), \quad \sigma_{1,m} \sim 0 \quad (m \geq 0)$$

$$P_{\Sigma,0} \sim \frac{P_*}{1+\gamma}, \quad P_{\Sigma,m} \sim 0 \quad (m \geq 1), \quad \gamma = \frac{2\rho_1 c_1^2}{\rho c^2 \delta}$$

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_1 = \frac{E \delta}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

Здесь $\sigma_{0,m}$, $\sigma_{1,m}$ — члены ряда Фурье цепных и изгибных напряжений, γ — отношение радиальных жесткостей внутренней среды и оболочки.

Полагая в формулах (3.2) $\rho_1 c_1 = 0$ (внутри оболочки вакуум), получим известный результат [3]. Из формул (3.2) видно, что основной вклад в асимптотику радиальной скорости вносит первая форма, в прогиб и цепные напряжения — нулевая форма.

Отметим следующее обстоятельство. Если в формуле (3.1) положить $\delta = 0$ и устремить $p \rightarrow 0$, то получим асимптотику, соответствующую решению безмоментных уравнений. Эта асимптотика отличается от (3.2) второй формой прогиба и изгибных напряжений:

$$w_2 \sim P_* / ({}^5/2 \rho \delta + \rho_1 + 1), \quad \sigma_{1,2} \sim {}^3/2 E \delta w_2 / (1 - \nu^2) \quad (3.3)$$

Как будет показано, асимптотика (3.3) совпадает с численным решением при больших, но конечных временах с начала действия нагрузки, когда вклад изгибных волн еще не успевает проявиться.

4. Исследование особенностей нестационарного процесса на конечных интервалах времени и определение области применимости асимптотик (3.2); (3.3) проводится численно. Система одномерных волновых уравнений (2.1) и граничные условия (1.2) переписываются в конечно-разностном виде. Используется явная схема типа «крест». Численная дисперсия, появляющаяся в районе фронтовых разрывов в результате дискретизации пространства и времени, минимизируется соответствующей аппроксимацией уравнений (2.1) и граничных условий (1.2) и оптимальным выбором параметров разностной сетки¹.

В уравнении для φ_2 применяется трехточечная аппроксимация члена с нулевой производной $(m^2/r^2)\varphi_2(t=k\tau, r=1+jh_2) \simeq (1/4m^2/r^2)(\varphi_{2,j+1}^k + 2\varphi_{2,j}^k + \varphi_{2,j-1}^k)$, где $\varphi_{2,j}^k$ — значения функции φ_2 в узлах сетки, τ, h_2 — шаги сетки по времени и пространству. При такой аппроксимации паразитное влияние численной дисперсии исключается полностью, если шаги разностной сетки удовлетворяют условию $\tau=h_2 < 2/m$.

Во внутренней области ($r < 1$) используется одноточечная аппроксимация $\varphi_1(k\tau, jh_1) \sim \varphi_{1,j}^k$. В этом случае минимум численной дисперсии достигается при условии $c_1\tau = h_1(1+m^2/4)^{-1/2}$, где h_1 — шаг по r при $r < 1$.

Граничные условия на поверхности оболочки и давление жидкости аппроксимируются центральными разностями. При этом условие устойчивости схемы в граничной точке не нарушает условий бездисперсионности. счета уравнений для φ_n ($n=1, 2$).

Узел, соответствующий оси $r=0$, сдвигается на малую величину ε ($0 < \varepsilon \ll h_1$), что позволяет использовать для расчета $\varphi_{1,0}$ уравнение (2.1) вместо (2.5), которое налагает более жесткие условия на отношения шагов разностной сетки. На границе $r=\varepsilon$ ставятся следующие условия: $\partial\varphi_{1,0}/\partial r=0$, $\varphi_{1,m}=0$ ($m \neq 0$), где производная аппроксимируется центральной разностью.

Для ограничения числа узлов разностной сетки вводится фиктивная граница во внешней среде. Возмущения, отраженные от этой границы, за время, в течение которого рассчитывается процесс, поверхности оболочки не достигают. В граничном узле можно задавать любые однородные условия, например, $\varphi_2=0$. Расчет приведенных ниже вариантов потребовал менее 2 мин на ЭВМ БЭСМ-6.

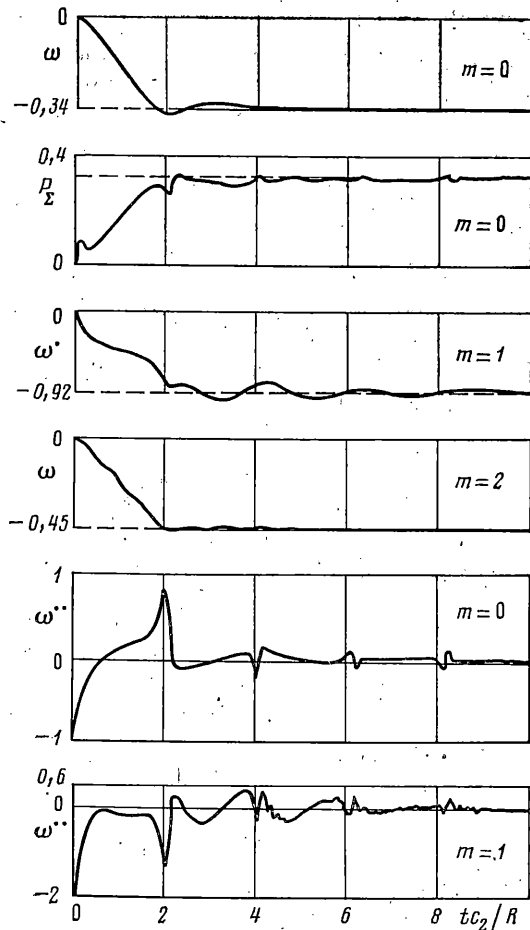
На фиг. 1 представлены осциллограммы $w_0, w_0^*, P_{z,0}, w_1, w_1^*, w_2$ ($\omega = \omega r_2 c_2^2 / (R P_*)$, $\omega^* = \omega^* r_2 c_2^2 / P_*$, $\omega^{**} = \omega^{**} R \rho_2 / P_*$); штриховые линии соответствуют асимптотике (3.2) на кривых для $w_0, P_{z,0}, w_1$ и асимптотике (3.3) на кривой для w_2 . Расчет проводился при $\tau=0,03$ и следующих параметрах оболочки и среды: $c_1=r_1=1, c^2=11,1, \rho=7,85, \nu=0,3, \delta=0,01$. Расчеты показали, что при $\tau \leq 0,03$ результаты практически не различаются между собой.

При $t \geq 2$ асимптотика описывает основную часть возмущений (фиг. 1). В интервале времени $0 \leq t \leq 10$ вклад изгибных волн в процесс деформирования оболочки еще мал и вторая форма прогиба соответствует асимптотике (3.3). Для того чтобы решение вышло на асимптотику (3.2), необходимо существенно большее время. С ростом δ вклад изгибных волн проявляется раньше. Всплески возмущений, которые наиболее заметны на кривых ускорений, соответствуют приходу акустических волн, отраженных от внутренней поверхности оболочки.

Видно, что при $m=0$ численная дисперсия отсутствует полностью. При $m > 0$ избавиться от нее не удастся: она проявляется в виде высокочастотных колебаний малой амплитуды на осциллограммах ускорения.

Сходимость сумм ряда Фурье к решению при увеличении M (M — номер гармоники, на которой ряд Фурье обрывается) проверялась сравнением результатов, рассчитанных при $M=4, 6, 8$ и следующих параметров системы: $c^2=11,1, \rho=7,85, \nu=0,3, \delta=0,01, \rho_1 c_1=0$. Анализ показал, что при $t \geq 2$ учет высших гармоник практически

¹ Пинчукова Н. И., Степаненко М. В. Действие акустической волны давления на оболочки вращения. Новосибирск, 1981. — 104 с. Деп. в ВИНТИ 6.05.82; № 2287-82.



Фиг. 1

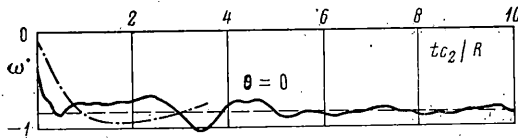
не изменяет поведения кривых. При $t \approx 2$ заметный вклад высших гармоник проявляется на осциллограммах ускорения и давления P_{Σ} . Пиковые значения ускорений в точке $\theta=0$ при $M=4$ и $M=6$ отличаются на 21%, при $M=6$ и $M=8$ — на 9%. Максимальные амплитуды цепных напряжений и радиальных скоростей при возрастании M с 4 до 6 изменились на 0,3%, а при $M=6$ и $M=8$ различия составили менее 0,2%.

На фиг. 2 представлено конечно-разностное решение ($M=10$) — сплошная кривая и результаты работы [4] — штрихпунктирная кривая, полученные для стальной оболочки ($\nu=0,3$; $c^2=11,1$; $\rho=7,85$) толщины $\delta=0,0232$, заполненной водой ($c_1=\rho_1=1$), штриховая линия соответствует асимптотике ω_1^* (3.2).

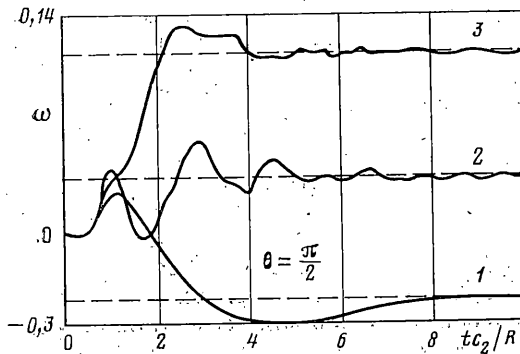
В [4] использовался метод двукратных интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Обращение асимптотики изображений ($p \rightarrow \infty$) проводилось при помощи метода наискорейшего спуска. Полученное в [4] приближенное решение, описывающее поведение возмущений во «фронтальной» области ($\theta \leq \pi/2$), должно быть пригодным для малых значений времени. Однако, как видно из фиг. 2, характер поведения кривых при малых t существенно различается. Максимум амплитуды скорости в [4] достигается при $t \sim 1,5$, что не соответствует ни первому локальному максимуму ($t \sim 0,4$), ни основному максимуму ($t \sim 3,4$). Отметим, что максимальная амплитуда скорости [4] близка к численному решению и асимптотике. Проведенный анализ показывает, что решение [4] не имеет преимуществ по сравнению с асимптотикой (3.2).

Сравнение конечно-разностного решения и результатов работы [3] показало, что кривые, рассчитанные при одних и тех же параметрах (среда внутри оболочки отсутствует), совпадают с точностью до погрешностей построения графиков.

На фиг. 3–5 приведены кривые прогиба, радиальных скоростей и цепных напряжений стальной оболочки толщины $\delta=0,01$, погруженной в воду. Кривая 1 соответствует пустой оболочке ($\rho_1 c_1=0$), 2 — оболочке, заполненной нефтью ($c_1=0,87$, $\rho_1=$



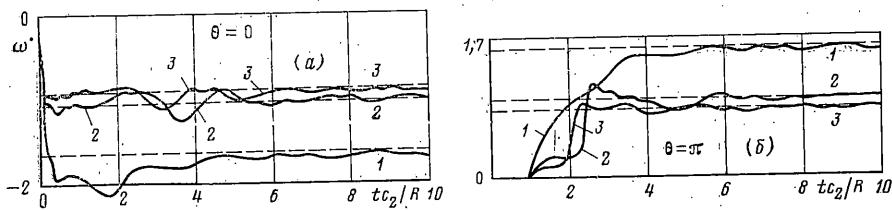
Фиг. 2



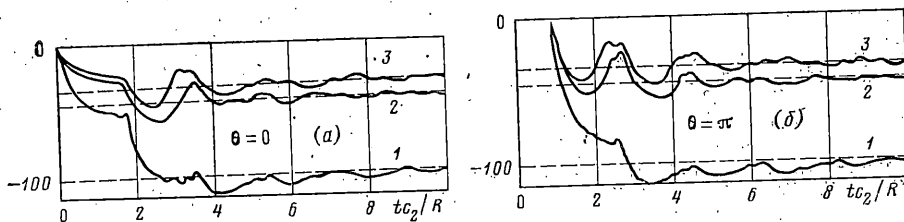
Фиг. 3

$\approx 0,82$), 3 — оболочке, заполненной водой ($c_1 = \rho_1 = 1$), штриховые кривые — асимптотике (3.2), (3.3). В сумме ряда Фурье сохранялось 11 членов ($M=10$).

Анализ осциллограмм радиальных перемещений в точке $\theta = \pi/2$ (фиг. 3) показывает, что вначале прогиб положителен (оболочка под воздействием волны давления сплющивается). В дальнейшем при малых γ преобладающим оказывается смещение, вызванное всесторонним обжатием (кривая 1), при больших γ основной вклад в смещение определяется инерционными свойствами системы (кривые 2, 3). В точках $\theta \neq \pi/2$ основным оказывается движение по первой форме — смещения.



Фиг. 4



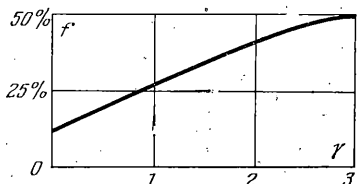
Фиг. 5

растут линейно со временем. Соответствие асимптотики и численного счета достигается тем быстрее, чем больше γ , максимальные отличия при использованных в расчете параметрах составляют $\sim 67\%$ (кривая 2).

В случае, когда среда внутри оболочки отсутствует, хорошо прослеживаются изменения кривизны на осциллограммах w , σ_0 (фиг. 4, 5) в моменты времени $t = (2ln \pm \theta)/c$ (n — целое), вызванные приходом упругих волн, распространяющихся по оболочке в окружном направлении.

В лобовой точке максимум w реализуется в различное время t_m (фиг. 4). В случае, когда внутри оболочки вакуум, пиковое значение w

достигается через время $t_m = 2\pi/c$. При наличии жидкости в оболочке t_m растёт и, как видно из фиг. 4, зависит от скорости звука во внутренней среде. Наибольшие отличия численных результатов от асимптотики w , связанные с нестационарностью нагрузки и проявляющиеся при малых временах ($t \lesssim 4$), достигаются в случае пустой оболочки и не превосходят 30%.



Фиг. 6

В теневой точке первые возмущения вызваны упругими волнами ($t \approx \pi/c$), основные возмущения появляются после прихода внутренней акустической волны ($t \approx 2/c_1$).

Внутренняя среда увеличивает инерционность системы, вследствие чего в оболочке с жидкостью уровень w меньше, чем в оболочке без среды. Как следует из асимптотики, радиальная скорость оболочки совпадает со скоростью частиц в прямой волне, если масса оболочки и заполняющей ее жидкости равна массе жидкости, вытесненной оболочкой (нулевая плавучесть).

Анализ осциллограмм цепных напряжений (фиг. 5) показывает, что их уровень практически одинаков для всех углов θ . Максимальные амплитуды достигаются в лобовой точке, причем их отличие от асимптотики ($\sigma_{0,0}$) зависит от величины γ . Зависимость $f(\gamma) = (\max \sigma_0 - \sigma_{0,0}) / \sigma_{0,0} \times 100\%$ приведена на фиг. 6. Монотонный рост можно объяснить тем, что при увеличении γ уменьшается вклад всестороннего сжатия (нулевая форма).

Таким образом, основной вклад в цепные напряжения вносит нулевая форма, в радиальные смещения и скорости — первая. Асимптотика изгибных напряжений при достаточно больших, но конечных значениях времени определяется второй формой из решения безмоментных уравнений. При $t \rightarrow \infty$ изгибные напряжения исчезают. При $t \geq 4$ асимптотика описывает основную часть возмущений, при $t < 4$ превышение амплитуд возмущений, соответствующих численному решению, над асимптотикой может достигать ~30% для радиальных скоростей и ~50% для цепных напряжений. В оболочке, заполненной жидкостью, максимальные амплитуды цепных напряжений и радиальных скоростей всегда меньше, чем в оболочке без среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г. Взаимодействие ударных волн с деформирующими преградами. — В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1980, с. 105–186.
2. Кубенко В. Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. Киев: Наук. думка, 1979. 182 с.
3. Huang H. An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylindrical elastic shell. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, v. 37, No. 4, p. 1091–1099.
4. Peralta L. A., Raynor S. Initial response of a fluid-filled, elastic, circular, cylindrical shell to a shock wave in acoustic medium. — J. Acoust. Soc. Amer., 1964, v. 36, No. 3, p. 476–488.
5. Гордиенко В. И., Кубенко В. Д. О вычислении переходных функций во внутренних задачах нестационарной гидроупругости цилиндрических и сферических оболочек. — Прикл. механика, 1983, т. 19, № 6, с. 58–62.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
12.XII.1983