

УДК 539.375

## РАЗРУШЕНИЕ ХРУПКИХ ТЕЛ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ДЕФОРМАЦИЙ

ВОСТРОВ В. К.

На основе введения структурного параметра  $\Delta$  и принципа равнопрочности [1] обобщается механика разрушения хрупких тел в неоднородном поле деформаций для случая, когда возникновение и распространение трещин происходит путем отрыва. Определяется влияние двухосности нагружения на разрушение неограниченного хрупкого тела с прямолинейной трещиной (плоская деформация). На примере растяжения хрупкого тела с луночным отверстием определяются разрушающие напряжения для нетрещиновидных концентраторов напряжений. Проводится сопоставление с решениями, основанными на известных критериях разрушения [2-9], и определяются границы применимости этих решений. Обобщение механики хрупкого разрушения на случай, когда трещинообразование происходит путем сдвига, приведено в [10].

**1. Исходные положения.** Считается [1], что все объемы, заключенные внутри сферы некоторого диаметра  $\Delta$ , равнопрочны, если максимальное ( $\varepsilon_1$ ) и минимальное ( $\varepsilon_3$ ) относительные удлинения диаметров этих сфер одинаковы и одинаковы относительные изменения объема ( $\varepsilon$ ) внутри них. Основными макронапряжениями называются величины [1]

$$\begin{aligned}\sigma_k &= 2G[\varepsilon_k + \nu\varepsilon/(1-2\nu)] \quad (k=1, 3) \\ \sigma_2 &= 2G[(1+\nu)\varepsilon/(1-2\nu) - \varepsilon_1 - \varepsilon_3]\end{aligned}\quad (1.1)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В случае однородного напряженного состояния макронапряжения (1.1) не зависят от параметра  $\Delta$  и совпадают с общепринятым понятием напряжений в точке. При этом  $\sigma_1$  представляет собой максимальное главное напряжение, а  $\sigma_2, \sigma_3$  — ортогональные к нему главные напряжения.

Считается [1], что в хрупком теле образуются трещины отрыва, если нарушается условие прочности

$$\sigma_1 + \frac{S_0}{S_*}(|\sigma_2| + |\sigma_3|) < S_0 \quad (1.2)$$

где  $S_0$  — сопротивление отрыву,  $S_*$  — абсолютная величина напряжения, при котором происходит хрупкое разрушение одноосно сжатого стержня. Если компоненты  $\varepsilon, \varepsilon_{1,2}$  одного порядка, то при  $S_0/S_* \ll 1$  условие разрушения микрообъема диаметром  $\Delta$  — достижение наибольшим напряжением сопротивления отрыву.

**2. Двухосное нагружение неограниченного тела с трещиной.** Пусть неограниченное хрупкое тело, содержащее плоскую трещину (фиг. 1), испытывает деформацию, однородную на бесконечности. Тело находится в состоянии плоской деформации, и берега трещины не взаимодействуют между собой. Функции Колосова в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{i}(\sigma_x^\circ + \sigma_y^\circ)z + \frac{1}{2}Q_S(\sqrt{z^2 - l^2} - z) \\ \psi(z) &= \frac{1}{2}(\sigma_y^\circ - \sigma_x^\circ + 2i\tau_{xy}^\circ)z + i\tau_{xy}^\circ(\sqrt{z^2 - l^2} - z) - \\ &\quad - \frac{1}{2}l^2 Q_S/\sqrt{z^2 - l^2}, \quad Q_S = \sigma_y^\circ - i\tau_{xy}^\circ\end{aligned}\quad (2.1)$$

где  $l$  — полудлина трещины,  $z$  — комплексная координата. Компоненты перемещений  $u_x, u_y$  определяются известной формулой

$$2G(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad (2.2)$$

Вводя полярные координаты с началом в вершине трещины ( $z = l + re^{i\theta}$ ) и полагая  $r \ll l$ , получаем асимптотические выражения

$$\begin{aligned} 2Gu_x = & \frac{1}{2}\sqrt{(1/2)r \cdot \pi^{-1}} [K_I((2\kappa - 1)\cos^2 \theta - \\ & - \cos^3 \theta) + K_{II}((2\kappa + 3)\sin^2 \theta + \sin^3 \theta)] - \\ & - \frac{1}{2}(\kappa + 1) [\frac{1}{2}(\sigma_y^\circ - \sigma_x^\circ)(l + r \cos \theta) + \tau_{xy}^\circ r \sin \theta] \\ 2Gu_y = & \frac{1}{2}\sqrt{(1/2)r \cdot \pi^{-1}} [K_I((2\kappa + 1)\sin^2 \theta - \\ & - \sin^3 \theta) - K_{II}((2\kappa - 3)\cos^2 \theta + \cos^3 \theta)] + \\ & + \frac{1}{2}(\kappa + 1)\tau_{xy}^\circ(l + r \cos \theta) - \frac{1}{4}(\kappa - 3)(\sigma_y^\circ - \sigma_x^\circ)r \sin \theta \\ K_I = & \sigma_y^\circ \sqrt{\pi l}, \quad K_{II} = \tau_{xy}^\circ \sqrt{\pi l} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выражение для объемной деформации  $\varepsilon$  имеет вид

$$2G\varepsilon = (\kappa - 1) [1/\sqrt{2\pi r} (K_I \cos^2 \theta - K_{II} \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}(\sigma_x^\circ - \sigma_y^\circ)] \quad (2.4)$$

Различные варианты формул (2.3)–(2.4) были получены в работах [8–12]. Относительное удлинение  $\varepsilon_n$  сферы диаметра  $\Delta$  в произвольном направлении  $n$  на плоскости  $x, y$  вычисляется по формуле [13]

$$\varepsilon_n = \Delta^{-1} [(u_x(r_1, \theta_1) - u_x(r_2, \theta_2)) \cos \varphi + (u_y(r_1, \theta_1) - u_y(r_2, \theta_2)) \sin \varphi] \quad (2.5)$$

где  $r_0, \theta_0$  — полярные координаты центра сферы,  $\varphi$  — угол, составляемый направлением  $n$  с положительным направлением оси  $x$ ,  $r_1, \theta_1$  и  $r_2, \theta_2$  — полярные координаты точек пересечения сферы (диаметра  $\Delta$ ) с прямой, проходящей через центр сферы в направлении  $n$

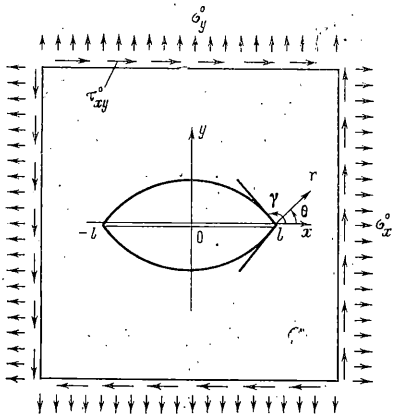
$$\begin{aligned} r_{1,2}^2 = & r_0^2 \pm \Delta r_0 \cos(\theta_0 - \varphi) + (\Delta/2)^2 \\ \operatorname{tg} \theta_{1,2} = & (2r_0 \sin \theta_0 \pm \Delta \sin \varphi) / (2r_0 \cos \theta_0 \pm \Delta \cos \varphi) \end{aligned}$$

Макродеформации  $\varepsilon_{1,3}$  представляют максимальное и минимальное значения относительного удлинения  $\varepsilon_n$  при изменении угла  $\varphi$  в интервале  $0 \leq \varphi < \pi$ .

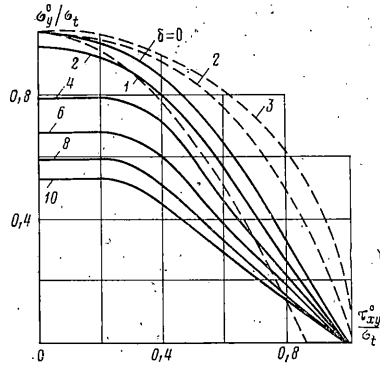
При известных макродеформациях определение макронапряжений не представляет трудностей, поскольку относительное изменение объема любой сферы равно объемному расширению в центре этой сферы.

Максимальные макронапряжения около конца макротрещины ( $\Delta \ll l$ ) достигаются на направлении, составляющем некоторый угол  $\beta$  с направлением трещины. Эти напряжения практически не изменяются (с точностью до нескольких процентов) при изменении угла  $\beta$  примерно на  $\pm 15^\circ$  и при удалении от вершины трещины на величину структурного параметра.

При одноосном растяжении в направлении, ортогональном трещине,  $\beta \approx \pm 77^\circ$  и максимальное макронапряжение превосходит на 25% (в зависимости от коэффициента Пуассона) соответствующее макронапряжение на продолжении трещины [1]. По мере удаления от вершины трещины (на одинаковое расстояние) наиболее напряженные микрообъемы сближаются с продолжением трещины. При удалении на величину структурного параметра углы, которые составляют такие микрообъемы с продолжением трещины, равны примерно  $\pm 45^\circ$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Пользуясь условием прочности (1.2), получаем нагрузку трещинообразования ( $\sigma_y^\circ$ ). Зависимость этой нагрузки от параметра двухосности нагружения  $\delta = \sigma_x^\circ / \sigma_y^\circ$  показана на фиг. 2, где  $\sigma_t$  — нагрузка трещинообразования при одноосном растяжении, ортогональном трещине. В расчетах принято  $\nu = 0,25$ ;  $S_0/S^* = 0$ ;  $\Delta/2l = 0,01$ , а для напряжения  $\sigma$ , имеет место приближенная формула [1]

$$\sigma_t \approx S_0 \sqrt{\Delta/2l} \quad (2.6)$$

Направления распространения макротрещины при достижении нагрузок трещинообразования чувствительны к структурным неоднородностям в силу того, что макронапряжения у конца трещины почти постоянны в некоторой области. В силу сказанного этих направлений может быть несколько (ветвление трещины) и сама трещина может распространяться путем появления микротрещины изнутри тела с последующим разрывом перемычки между ней и макротрещиной. С этой точки зрения возможно (в некотором интервале) любое направление распространения, для которого длина трещины имеет реальное значение. По-видимому, наиболее вероятными будут те направления, для которых длина возникающей микротрещины будет наибольшей. При этом искомая длина определяется тем, что макронапряжения на ее конце удовлетворяют условию (1.2), в котором знак неравенства переходит в равенство.

При одноосном растяжении, ортогональном трещине, наиболее вероятным будет развитие трещины в ее первоначальном направлении, несмотря на то, что максимальные макроудлинения в предшествующей фазе направлены под углом к трещине.

Интересно отметить, что роль пластичности (всегда сопровождающей деформацию у вершины трещины) состоит, по-видимому, в удалении наиболее напряженных микрообъемов внутрь тела, так что макротрещина распространяется путем устойчивого возникновения микротрещины изнутри тела с последующим дорывом пластичной перемычки.

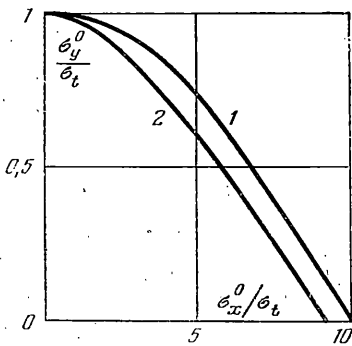
Если разрушающая нагрузка  $\sigma_t^\circ$  известна из эксперимента при одноосном растяжении, то с помощью формулы (2.6) можно определить величину структурного параметра

$$\Delta \approx 2l (\sigma_t^\circ / S_0)^2 \quad (2.7)$$

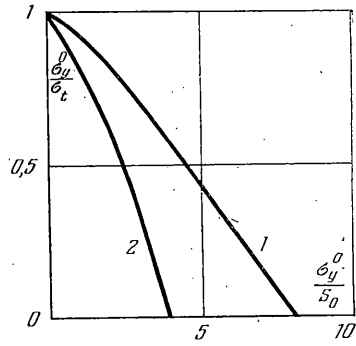
Но тем не менее для сопоставления с нагрузками трещинообразования, рассчитанными с помощью известных (классических) критериев [2–7], будем пользоваться формулой [1]

$$\Delta \approx \sqrt[4]{3ET/S_0^2}$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $T$  — плотность поверхностной энергии. Эта формула



Фиг. 3



Фиг. 4

получается из (2.6) подстановкой вместо экспериментальной величины  $\sigma_x^0$  разрушающей по Гриффитсу нагрузки.

Нагрузки трещинообразования при растяжении неограниченного тела с трещиной по традиционным представлениям ( $\nu=0,25$ ) приведены на фиг. 2 пунктирными кривыми 1-3 (1 - критерий максимальных растягивающих напряжений [2-5], 2 - критерий минимума плотности энергии деформации [6], 3 - критерий [7]). В отличие от [6-8], где определяющей величиной является параметр  $\kappa$ , нагрузки трещинообразования, определенные критерием прочности (1.2), слабо зависят от изменения коэффициента Пуассона.

Недостаток известных [2-6] (классических) и вновь предлагаемых [14, 15] способов расчета в том, что нагрузки трещинообразования не зависят от растягивающих (сжимающих) напряжений в направлении трещины ( $\sigma_x^0$ ) и допускается неограниченная прочность тел с трещинами [2-8, 14, 15]. Использование понятия макронапряжений и условия прочности (1.2) устраняет указанные недостатки и позволяет оценить влияние составляющей напряжения на бесконечности параллельной линии трещины на величину разрушающей нагрузки. Это влияние показано на фиг. 3 для двух значений отношения  $S_0/S_*$ . В расчетах принято  $\nu=0,25$ . Из приведенных графиков следует, что двухосность растяжения не оказывает влияния на нагрузку трещинообразования ( $\sigma_y^0$ ), если  $|\sigma_x^0| < |\sigma_y^0|$ . При этом наличие растяжения в направлении трещины, в отличие от [7, 8], всегда уменьшает нагрузку трещинообразования ( $0 < \nu < 1/2$ ). Этот вывод находит экспериментальное подтверждение при испытании образцов из модифицированного чугуна [47] и полиметилметакрилата (ПММА) [18, 19]. На фиг. 4 показано влияние сжимающего напряжения, параллельного линии трещины, на нагрузку трещинообразования при  $\nu=0,25$ ,  $S_0/S_* = 0,1; 0,2$  (кривые 1, 2). Как и в случае растяжения, происходит понижение

Рассмотрим теперь случай  $l \geq \Delta$  при двухосном нагружении. Из (2.1), (2.2) имеем

$$2Gu_x = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\pi l R R_2} \right) \{ K_I [ (\kappa - 1) R R_2 \cos \omega_1 - 2R_1^2 \sin \Lambda_1 \sin \omega_2 ] + K_{II} [ (\kappa + 1) R R_2 \sin \omega_1 + 2R_1^2 \sin \Lambda_1 \cos \omega_2 ] \}^{-1/4} (\kappa + 1) [ (\sigma_y^0 - \sigma_x^0) x + \tau_{xy}^0 y ] \quad (2.8)$$

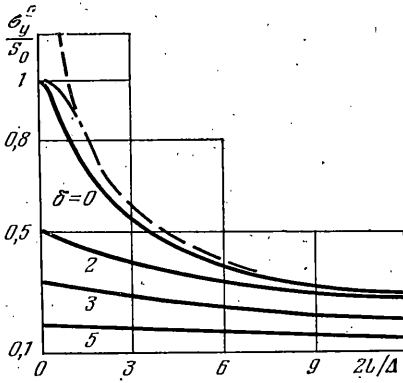
$$2Gu_y = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\pi l R R_2} \right) \{ K_I [ (\kappa + 1) R R_2 \sin \omega_1 - 2R_1^2 \sin \Lambda_1 \cos \omega_2 ] - K_{II} [ (\kappa - 1) R R_2 \cos \omega_1 + 2R_1^2 \sin \Lambda_1 \sin \omega_2 ] \} + \frac{1}{2} (\kappa + 1) \tau_{xy}^0 x^{-1/4} (\kappa - 3) (\sigma_y^0 - \sigma_x^0) y$$

$$R_1^2 = x^2 + y^2, \quad R^2 = (x - l)^2 + y^2, \quad R_2^2 = (x + l)^2 + y^2$$

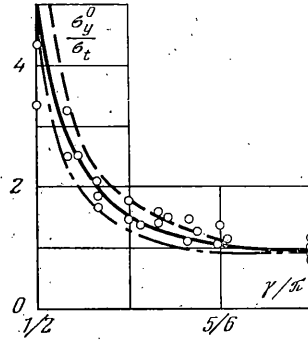
$$\omega_1 = \frac{1}{2} (\Lambda + \Lambda_2), \quad \omega_2 = \Lambda_1 - \frac{1}{2} (\Lambda + \Lambda_2)$$

$$\Lambda_1 = \arctg y/x, \quad \Lambda = \arctg [y/(x - l)], \quad \Lambda_2 = \arctg [y/(x + l)]$$

$$2G\varepsilon = (\kappa - 1) [ (R_1 / \sqrt{\pi l R R_2}) (K_I \cos \omega_2 + K_{II} \sin \omega_2) + \frac{1}{2} (\sigma_x^0 - \sigma_y^0) ] \quad (2.9)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Эти формулы в другой системе координат получены в работе [20]. При  $R \ll l$  из них следуют асимптотические выражения (2.3) – (2.4).

Пользуясь (1.2) и (2.8) – (2.9), получаем нагрузку трещинообразования ( $\sigma_y^0$ ) для случая малых длин трещин. Зависимость этой нагрузки от показателя двухосности  $\delta$  и безразмерной длины  $2l/\Delta$  при двухосном растяжении в направлении координатных осей показана на фиг. 5 для  $\nu=0,25$  и  $S_* \gg S_0$ . Пунктирная линия отвечает критерию Гриффитса, штрихпунктирная – критерию критического раскрытия трещины [9]. Видно, что трещину можно считать макроскопической, если ее длина примерно на порядок превосходит величину структурного параметра  $\Delta$ . При этом влияние растягивающего напряжения  $\sigma_x^0$  на нагрузку трещинообразования ( $\sigma_y^0$ ) более существенно для малых трещин, чем для макроскопических.

При одноосном растяжении угол  $\beta$ , который составляют с продолжением трещины наиболее напряженные микрообъемы, изменяется от  $\pm 90^\circ$  для малых трещин ( $2l \sim \Delta$ ) до примерно  $\pm 77^\circ$  для макротрещин. В случае микроскопических трещин ( $2l \ll \Delta$ ) наиболее напряженные микрообъемы находятся на продолжении трещины.

**3. Растяжение хрупкого тела с луночным отверстием.** Пусть неограниченное хрупкое тело содержит симметричное луночное отверстие, свободное от напряжений (фиг. 1). В условиях плоской деформации при  $\tau_{xy}^0=0$  имеем [21, 22] в биполярных координатах:  $x=l \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$ ,  $y=-l \sin \beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$  ( $l$  – параметр отверстия,  $|\alpha| < \infty$ ,  $|\beta| \leq \gamma$ ).

Выражение для нормальных напряжений  $\sigma_\alpha$  в сечениях, ортогональных контуру отверстия  $\beta=\gamma$

$$\sigma_\alpha = 8\sigma_y^0 \sin \gamma (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \int_0^\infty L(t, \gamma) V^{-1}(t, \gamma) \operatorname{sh} t\gamma \cos t\alpha dt$$

$$L(t, \gamma) = Q_0 + ct(t - \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{cth} t\gamma), \quad V(t, \gamma) = \operatorname{sh} 2t\gamma + t \sin 2\gamma \quad (3.1)$$

$$Q_1 = b + 4c \sin^2 \gamma \int_0^\infty t V^{-1}(t, \gamma) dt, \quad Q_2 = 4 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 t\gamma - t^2 \sin^2 \gamma}{t(1+t^2)V(t, \gamma)} dt, \quad Q_0 = \frac{Q_1}{Q_2}$$

Параметры  $b, c$  определяют напряженное состояние тела на бесконечности. Вычисляя несобственный интеграл (3.1) с помощью теории вычетов, получаем асимптотическую формулу

$$\sigma_\alpha = Q (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) e^{-\lambda\alpha} + o(1), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad Q = Q_* \sigma_y^0 \quad (3.2)$$

Здесь  $\lambda$  – минимальный положительный корень уравнения  $V(i\lambda, \gamma) = 0$  и  $Q_* = -8\lambda \sin \gamma \sin \lambda\gamma [Q_0 - c\lambda(\lambda + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \lambda\gamma)] [2\gamma \cos 2\lambda\gamma + \sin 2\lambda\gamma]^{-1}$ .

Сингулярное решение однородной задачи теории упругости для клина, симметричное относительно его срединной линии, имеет вид

$$\sigma_r = K_\lambda [(3-\lambda)c_-(\theta) + (1+\lambda)c_+(\theta)] c_-(\gamma)/c_+(\gamma)$$

$$\sigma_{\theta} = K_{\lambda}(1+\lambda) [c_{-}(\theta) - c_{+}(\theta)c_{-}(\gamma)/c_{+}(\gamma)] \quad (3.3)$$

$$\tau_{r\theta} = K_{\lambda}(1-\lambda) [s_{-}(\theta) - s_{+}(\theta)s_{-}(\gamma)/s_{+}(\gamma)]$$

$$2Gu_r = K_R[(\lambda-\lambda)c_{-}(\theta) + (1+\lambda)c_{+}(\theta)c_{-}(\gamma)/c_{+}(\gamma)]$$

$$2Gu_{\theta} = -K_R[(\lambda+\lambda)s_{-}(\theta) + (1+\lambda)s_{+}(\theta)c_{-}(\gamma)/c_{+}(\gamma)] \quad (3.4)$$

$$K_{\lambda} = K(2\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda})^{-1}, \quad K_R = Kr^{\lambda}(2\lambda\sqrt{2\pi})^{-1}$$

$$c_{\pm}(\theta) = \cos(1 \pm \lambda)\theta, \quad s_{\pm}(\theta) = \sin(1 \pm \lambda)\theta$$

где  $2\gamma$  — растрор клина,  $r, \theta$  — полярные координаты с центром в вершине клина и полярной осью, совпадающей со срединной линией клина (фиг. 1).

Сопоставление напряжения  $\sigma_r$  при  $\theta = \gamma, r \rightarrow 0$  с напряжением  $\sigma_{\alpha}$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  приводит к выражению для коэффициента интенсивности напряжений в вершине клина<sup>1</sup>

$$K = \sqrt{2\pi}Q(2l)^{1-\lambda} [4 \cos(1-\lambda)\gamma]^{-1} \quad (3.5)$$

При  $\beta = \pi$  ( $\lambda = 1/2, b = 1, c = -1/2$ ) из формулы (3.5) следует известное выражение  $K = \sigma_y \sqrt{\pi l}$  для коэффициента интенсивности напряжений в конце трещины нормального отрыва. В другом предельном случае  $\beta = \pi/2$  ( $\lambda = 1$ ) выражения (3.3)–(3.5) приводят к асимптотическим формулам для напряжений и перемещений при растяжении неограниченной плоскости с круговым отверстием.

Пользуясь (1.2), (3.3)–(3.5), получаем нагрузку трещинообразования для луночного отверстия. Зависимость этой нагрузки от угла  $\gamma$  дана на фиг. 6. Сплошная линия — одноосное растяжение в направлении оси  $y$ , пунктирная — всестороннее растяжение ( $b = 1, c = 0$ ), кружками — экспериментальные значения (отнесенные к величине  $\sigma_1$ ), взятые из [24]. В расчетах принято  $\nu = 0,35; S_0/S_* = 0, \Delta/2l = 0,005$ . Значение отношения структурного параметра к длине трещины найдено с помощью формулы (2.7) по приведенным в [24] экспериментальным данным.

Как и при растяжении тела с трещиной, макронапряжения примерно одинаковы в окрестности угловых точек луночного отверстия для различных микрообъемов в некоторой области. В силу этого направление возникающей микротрещины будем считать случайным, а ее длину определять способом, указанным в п. 2. Наиболее вероятным считается то направление, для которого указанная длина наибольшая.

Для сравнения на фиг. 6 штрихпунктирной линией показана нагрузка трещинообразования при одноосном растяжении плоскости с луночным отверстием, построенная по критерию В. В. Новожилова в форме, использованной Н. Ф. Морозовым [23]. Величина структурного параметра  $d$  в этом случае также определяется формулой (2.7), а нагрузка трещинообразования находится из условия того, что средняя величина напряжения  $\sigma_{\theta}(r, 0)$  на сегменте  $[0, d]$  равна  $S_0$ . Это условие приводит к формуле

$$\sigma_y^0 = S_0 4\lambda \cos(1+\lambda)\gamma \cos(1-\lambda)\gamma [(1+\lambda)Q_* \sin \gamma \sin \lambda \gamma]^{-1} (d/2l)^{1-\lambda} \quad (3.6)$$

Из приведенных графиков видно, что формула (3.6) дает меньшие значения величины  $\sigma_y^0$ , чем условие прочности (1.2) для всех значений угла  $\gamma$ . При этом максимальная разница практически не превосходит 25% от значения разрушающего напряжения  $\sigma_1$  при одноосном растяжении плоскости с трещиной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов М. Я.* Механика деформаций и разрушения. Фрунзе: Илим, 1981. 236 с.
2. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
3. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О хрупких трещинах продольного сдвига. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 1110–1119.
4. *Черепанов Г. П.* Одна задача о вдавливании индентора с образованием трещин. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 150–153.
5. *Erdogan F., Sih G. C.* On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. — Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Engng, 1963, v. 85, N 4, p. 519–527.

<sup>1</sup> Аналогичная формула для коэффициента интенсивности напряжений в вершине клина (полученная ранее другим путем Б. Н. Семеновым) приведена в [23].

6. *Sih G. C.* Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems.— *Internat. J. Fract.*, 1974, v. 10, N 3, p. 305–321.
7. *Swedlow J. L.* On Griffith's theory of fracture.— *Internat. Fract. Mech.*, 1965, v. 1, N 3, p. 210–216.
8. *Eftis J., Jones D. L.* Influence of load biaxiality on the fracture load of center cracked sheets.— *Internat. J. Fract.*, 1982, v. 20, N 4, p. 267–289.
9. *Леонов М. Я., Востров В. К.* Разрушение хрупкого тела с трещиной при двухосном нагружении.— *Пробл. прочности*, 1984, № 9, с. 33–37.
10. *Леонов М. Я., Востров В. К.* К теории сдвига-трещинообразования.— *Докл. АН СССР*, 1980, т. 253, № 4, с. 832–836.
11. *Горшукый В. М., Хромов Д. П.* Влияние температуры испытания на фраттографические характеристики хрупкого разрушения низкоуглеродистых и низколегированных сталей.— *Физика металлов и металловедение*, 1984, т. 58, вып. 1, с. 154–163.
12. *Либовиц Г., Эфтис Дж., Джонс Д.* Некоторые недавние теоретические и экспериментальные исследования по механике разрушения.— В кн.: *Механика разрушения*. М.: Мир, 1980, с. 162–202.
13. *Леонов М. Я., Русинко К. Н.* Макронапряжения упругого тела.— *ПМТФ*, 1963, № 1, с. 104–110.
14. *Fischer K.-F., Goldner H.* On the formulation of a principal strain criterion in crack fracture mechanics.— *Internat. J. Fract.*, 1981, v. 17, N 1, p. R3–R6.
15. *Fischer K.-F., Goldner H., Gunther W., Sorgel W.* On the relationship between notch analysis and crack fracture mechanics.— *Z. angew. Math. und Mech.*, 1982, B. 62, N. 7, S. 345–348.
16. *Востров В. К.* Разрушение хрупких тел с плоскими внутренними и краевыми трещинами.— *ПММ*, 1983, т. 47, вып. 5, с. 852–860.
17. *Arii M., Nakano M., Yanuki T.* Characteristics of brittle fracture under biaxial tension.— *J. Jap. Soc. Strengths and Fract. Mater.*, 1978, v. 13, N 2, p. 56–68.
18. *Leevers P. S., Radon J. C., Culver L. E.* Crack growth in plastic panels under biaxial stress.— *Polimer*, 1976, v. 17, N 7, p. 627–632.
19. *Ueda Y., Ikeda K., Yao T., Aoki M., Yoshie T., Shirakura T.* Brittle fracture initiation characteristics under biaxial loadings.— In: *Adv. Res. Strength and Fracture of Materials. 4th Internat. Conf. Fract. Waterloo*, 1978, v. 2, p. 173–182.
20. *Liebowith H., Lee J. D., Subramonian N.* Criteria for predicting crack extension angle and path in plane crack problems. *Proc. Internat. Conf. Anal. and Exp. Fracture Mech. Rome*, 1980. Alphen aan den Rijn-Rockville, Md, 1981, p. 239–250.
21. *Ling C. B.* On the stresses in a notched plate under tension. *J. Math. and Phys.*, 1947, v. 26, N 4, p. 284.
22. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
23. *Морозов Н. Ф.* Исследование разрушающей нагрузки для области, ослабленной вырезом в виде лунки.— *Докл. АН СССР*, 1980, т. 253, № 6, с. 1336–1338.
24. *Бугаков И. И.* Квазихрупкое разрушение образцов с вырезом в виде лунки.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1983, № 6, с. 177–180.

Москва

Поступила в редакцию  
13.IV.1984