

УДК 539.376

О ФОРМИРОВАНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ, РАСТУЩИХ В УСЛОВИЯХ ФРОНТАЛЬНОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ

МЕТЛОВ В. В., ТУРУСОВ Р. А.

Технология изготовления ряда материалов и изделий включает стадию получения твердого тела из газовой, жидкой или твердой фазы с существенно другими физико-механическими характеристиками. Примерами подобных процессов служат рост кристаллов из раствора, кристаллизация в твердых аморфных полимерах, промерзание жидкости, затвердевание металла в изложнице, отверждение изделий из полимерных и композиционных материалов, получение высокопрочных волокон и покрытий осаждением веществ (бора, углерода, кремния и др.) из газовой фазы при высокой температуре. В процессе роста твердого тела возникают напряжения, обусловленные неоднородным температурным полем, структурными изменениями и другими физическими факторами. В [1, 2], по-видимому, впервые исследованы технологические остаточные напряжения, вызванные изменением удельного объема (усадкой) в процессе фронтального отверждения жидкого тела. Процесс представляется в виде последовательного отверждения и усадки конечного числа слоев с последующим переходом в полученном решении к пределу при толщине слоев, стремящейся к нулю. Ввиду значительных трудностей, возникающих при применении подобного подхода для тел с достаточно сложной геометрией и реологией, представляло интерес получить адекватную постановку краевой задачи о формировании напряжений при непрерывном движении фронта отверждения. Решению этой проблемы посвящена публикуемая работа.

Из-за скачка плотности массы и механических свойств фронт отверждения является поверхностью сильного разрыва. Необходимый для замыкания краевой задачи комплекс условий для скачков вектора скорости и тензоров напряжений и деформаций на фронте получен предельным переходом в дискретной схеме отверждения и в модели размытого фронта. Для области отвержденного материала используются определяющие уравнения непрерывно нарастающего твердого тела [3]. Приведены решения задач об отверждении первоначально упругих, вязких и вязкоупругих тел.

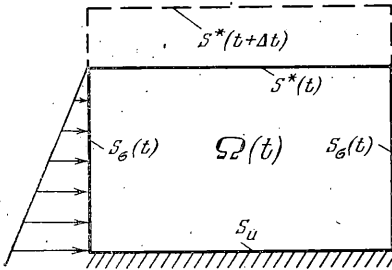
1. Краевая задача для растущего твердого тела при малых деформациях сформулирована в [4, 5]. Дополнена постановка краевой задачи в [6, 7], где введено понятие поверхности роста и рассмотрены специфические условия на ней.

Нарастаемым (растущим) телом называем твердое тело, масса которого непрерывно увеличивается вследствие присоединения новых элементов к части его поверхности, именуемой поверхностью роста (фигура). Здесь, считая компоненты градиента перемещения много меньшими единицы, как обычно, не различаем начальных и текущих координат материальных точек и пренебрегаем изменением области, занимаемой телом, вследствие деформации, а также изменением плотности массы в уравнении равновесия. Полагаем также, что материальная скорость пренебрежимо мала по сравнению со скоростью s_n движения поверхности роста по нормали. Тогда, начиная с момента $t=0$, в который имеется, вообще говоря, непустая начальная область тела $\Omega_0 = \Omega(0)$, считаем заданным закон движения поверхности роста $S^*(t)$ и, тем самым, закон изменения области тела $\Omega(t)$. Введем функцию $\tau^*(x)$, равную моменту присоединения точки x к поверхности роста. Тогда имеем

$$S^*(t) = \{x : \tau^*(x) = t\}, \quad s_n = |\nabla \tau^*|^{-1}, \quad \mathbf{n} = s_n \nabla \tau^* \quad (1.1)$$

где s_n — скорость движения поверхности $S^*(t)$ по нормали, $\nabla\tau^*$ — градиент функции $\tau^*(x)$, n — единичная внешняя нормаль к S^* . При $x \in \Omega_0$ положим $\tau^*(x) = 0$.

Основная особенность растущего тела состоит в том, что какой-либо его элемент в окрестности точки $x \in \Omega_1(t) = \Omega(t) \setminus \Omega_0$ деформируется



совместно с другими элементами лишь начиная с момента $\tau^*(x)$. Существуя до этого момента независимо от растущего тела, он мог быть приведен, вообще говоря, в произвольное напряженно-деформированное состояние. В некоторый момент времени $t > 0$ рассмотрим произвольную внутреннюю точку $x \in \Omega(t)$. На отрезке времени $[\tau, t]$, где $\tau > \tau^*(x)$, растущее тело содержит точку x вместе с некоторой ее окрестностью, стягивающейся в точку x при $\tau \rightarrow$

$\tau^*(x) + 0$. Тензор деформации $\eta(t, \tau, x)$, характеризующий переход окрестности точки x из конфигурации в момент $\tau > \tau^*(x)$ в конфигурацию в момент t , равен

$$\eta(t, \tau, x) = \text{def } w(t, \tau, x) = \text{def } \int_{\tau}^t u^{\cdot}(s, x) ds = \int_{\tau}^t \varepsilon^{\cdot}(s, x) ds \quad (1.2)$$

$$\varepsilon^{\cdot}(t, x) = \text{def } u^{\cdot}(t, x)$$

где $w(t, \tau, x) = u(t, x) - u(\tau, x)$ — перемещение точек на отрезке $[\tau, t]$, $u(t, x)$ — перемещение точек, отсчитываемое от момента присоединения, т. е. на отрезке $[\tau^*(x), t]$; $\text{def } w$ означает взятие симметричной части градиента вектора w , т. е. $\text{def } w = \frac{1}{2}(\nabla w + (\nabla w)^T)$.

Основное предположение, принимаемое в теории растущего тела, состоит в том, что предел $\eta(t, \tau, x)$ при $\tau \rightarrow \tau^*(x)$, есть тензор деформации, характеризующий переход бесконечно малого элемента в окрестности точки x из конфигурации в момент присоединения, называемой начальной, в актуальную. Начальное состояние не обязательно является натуральным (ненапряженным). В задаче для растущего тела считается заданной предыстория тензора деформации ($\varepsilon^{\cdot}(\tau, x)$, $\tau \leq \tau^*(x)$) его элементов вплоть до момента присоединения.

Краевая задача для определения поля перемещений $u(t, x)$, тензора деформации $\varepsilon(t, x)$ и тензора напряжения $\sigma(t, x)$ при $t > \tau^*(x)$ включает уравнение квазистатического равновесия и граничные условия в напряжениях и смещениях

$$(\text{div } \sigma + \rho f)|_{\Omega(t)} = 0, \quad \sigma n|_{S_{\sigma}(t)} = p, \quad u|_{S_u(t)} = u^{\circ} \quad (1.3)$$

где $f(t, x)$ — заданный в $\Omega(t)$ вектор плотности массовой силы, ρ — постоянная заданная плотность массы, $p(t, x)$ — заданный на части $S_{\sigma}(t)$ поверхности тела $\Omega(t)$ вектор напряжения, $u^{\circ}(t, x)$ — заданный на $S_u(t)$ вектор смещения. Тензоры трактуем как линейные отображения, а результат действия тензора σ на вектор n обозначаем σn , композицию (матричное произведение) тензоров σ_1 и σ_2 обозначим $\sigma_1 \sigma_2$.

В краевой задаче имеем геометрические соотношения

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon^*(x) + \int_{\tau^*(x)}^t \varepsilon^{\cdot}(\tau, x) d\tau, \quad \varepsilon^{\cdot}(t, x) = \text{def } u^{\cdot}(t, x) \quad (x \in \Omega(t)) \quad (1.4)$$

определяющее уравнение (уравнение связи), которое всякой истории тен-

зора деформации ставит в соответствие тензор напряжения

$$\sigma(t, x) = F(\varepsilon(\tau, x), \tau \leq t) \quad (x \in \Omega(t)) \quad (1.5)$$

и начальные условия в виде заданной предыстории ε° тензора деформации

$$\varepsilon(\tau, x) = \varepsilon^\circ(\tau, x) \quad (\tau \leq \tau^*(x)), \quad \varepsilon^*(x) \equiv \varepsilon^\circ(\tau^*(x), x) \quad (x \in \Omega(t)) \quad (1.6)$$

Начальные условия (1.6), рассматриваемые в момент t для точек на поверхности роста $S^*(t)$, образуют граничные условия на $S^*(t)$, где в силу (1.5) (1.6) задан, в частности, тензор напряжения $\sigma^*(x) \equiv \sigma(\tau^*(x), x) = F(\varepsilon^\circ(\tau, x), \tau \leq \tau^*(x))$.

Обратно, поскольку к моменту времени t поверхность роста S^* при своем движении прошла все точки выросшей части тела $\Omega_1(t)$, то по заданному в каждый момент времени $\tau \leq t$ граничному условию на поверхности роста $S^*(\tau)$:

$$\varepsilon(s, x) = \varepsilon^\circ(s, x), \quad s \leq \tau, \quad x \in S^*(\tau) \quad (1.7)$$

определяются и начальные условия (1.6) в $\Omega_1(t)$, т. е. для $x \in \Omega_1(t)$ (1.6) и (1.7) эквивалентны.

Краевая задача (1.3)–(1.6) математически эквивалентна краевой задаче для скоростей напряжений, деформаций и перемещений со стандартным силовым условием на $S^*(t)$ [6, 7]:

$$(\operatorname{div} \sigma^* + \rho f^*)|_{\Omega_1(t)} = 0, \quad \sigma^* n|_{S^*(t)} = p^*, \quad u^*|_{S^*(t)} = u^\circ$$

$$\varepsilon^* = \operatorname{def} u^*, \quad \sigma^*(t, x) = F_1[(\varepsilon^*(\tau, x), \tau^*(x) \leq \tau \leq t), (\varepsilon^\circ(\tau, x), \tau \leq \tau^*(x))] \quad (1.8)$$

$$(x \in \Omega(t)), \quad \sigma^* n|_{S^*(t)} = (\rho f + \operatorname{div} \sigma^*) s_n$$

Точка означает частную производную по времени. Функционал F_1 вычисляется дифференцированием по t соотношения (1.5) и подстановкой в правую часть полученного (1.4). Под граничным значением функции, как обычно, понимаем предел, взятый внутри области. Применительно к условию на S^* это означает, что в (1.8) граничное значение σ^* есть правосторонняя производная по времени от $\sigma(t, x)$ в момент $t = \tau^*(x)$, которая, вообще говоря, отличается от левосторонней производной, определяемой по заданной предыстории тензора деформации.

Ввиду того что в области Ω_0 $\tau^*(x) \equiv 0$, геометрические соотношения (1.4) в Ω_0 приводятся к виду $\varepsilon(t, x) = \varepsilon^*(x) + \operatorname{def} u(t, x)$, т. е. деформации перехода тела Ω_0 из начального состояния в актуальное удовлетворяют соотношениям Коши. В отличие от деформаций фиксированного тела Ω_0 деформации (1.4) в $\Omega_1(t)$, как правило, несовместны. Действительно, в силу (1.2) или (1.4):

$$\varepsilon(t, x) = \operatorname{def} u(t, x) - (\operatorname{def} u(\tau, x))|_{\tau=\tau^*(x)} + \varepsilon^*(x) \quad (1.9)$$

Отсюда заключаем, что для совместности деформаций в $\Omega_1(t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\varepsilon^*(x) - (\operatorname{def} u(\tau, x))|_{\tau=\tau^*(x)} = \operatorname{def} v(x) \quad (1.10)$$

где $v(x)$ — произвольный вектор. Таким образом, для того, чтобы компоненты деформации в $\Omega_1(t)$ удовлетворяли соотношениям Коши (и уравнениям совместности), начальное состояние должно зависеть от решения $u(t, x)$ посредством (1.10). Для упругого тела непосредственной подстановкой в уравнения и граничные условия можно убедиться, что если начальное состояние совпадает с состоянием поверхности фиксированного тела той же конфигурации при тех же нагрузках (в том числе действующих и на поверхность роста), то деформации (1.9) совместны, а решение задачи для растущего тела совпадает с решением для фиксированного тела и, следовательно, не зависит от истории наращивания и нагружения.

Существенной качественной особенностью решения задачи для растущего упругого тела при независимом от внешних воздействий p, f, u^0 задании начального состояния σ^* присоединяемых элементов (в частности, ненапряженного $\sigma^*=0$) является зависимость решения от всей истории наращивания и последовательности приложения нагрузки и, в силу этого, наличие остаточных напряжений при снятии воздействий p, f, u^0 .

2. Механическая модель фронтального отверждения и условия сильного разрыва на фронте. Пусть имеется фиксированное однородное тело Ω , конечное или бесконечное, находящееся в первоначальном состоянии 1 . Данное состояние характеризуется величиной плотности массы ρ_1 и механическими свойствами, выраженными в форме уравнения связи (определяющего уравнения). Под воздействием тех или иных физико-химических факторов тело Ω может совершить переход в новое состояние 2 со значением плотности массы ρ_2 и новыми механическими свойствами. В дальнейшем состояние 2 считается твердым, а переход из состояния 1 в состояние 2 именуется отверждением. Здесь изучается влияние квазистатического процесса отверждения тела на изменение его напряженного состояния. Обратным влиянием напряженного состояния на ход процесса отверждения пренебрегаем.

Пусть при отверждении произвольного элемента тела Ω он проходит ряд состояний, которые пометим параметром $\alpha \in [1, 2]$, так что значение $\alpha=1$ соответствует состоянию 1 , а $\alpha=2$ — состоянию 2 . Однородным отверждением тела назовем такое отверждение, при котором частицы тела проходят всякое состояние с $\alpha \in [1, 2]$ одновременно. Однородным переходом тела назовем процесс однородного отверждения, протекающий при отсутствии внешних механических воздействий и связей. Допустим, что для процессов однородного перехода все более малых элементов в окрестности какой-либо точки x существует предельный процесс, который назовем процессом однородного перехода бесконечно малого элемента. Полагаем, что в процессе однородного перехода бесконечно малого элемента в этом элементе не возникают напряжения, а тензор деформации $e_1(\alpha)$, характеризующий переход из состояния 1 в состояние α , удовлетворяет условию малых деформаций $\sup_{\alpha, x} \|e_1(\alpha, x)\| \ll 1$, $e_1(\alpha, x) = de_1/d\alpha$. Здесь норма $\|e\| = (e \cdot e)^{1/2}$ тензора второго ранга порождается скалярным произведением $(A \cdot B) = \text{tr}(A^T B)$, $\text{tr} C$ — след (первый инвариант) тензора C . При отверждении тела Ω в нем могут возникнуть напряжения, обусловленные неоднородной усадкой различных его элементов. При этом неоднородность может быть вызвана двумя факторами — явной зависимостью от x тензора усадки $e = e(\alpha, x)$ (что характерно, например, для намоточных композитов) и неоднородностью отверждения, т. е. зависимостью α от x . Далее рассматривается предельный случай неоднородного отверждения — фронтальное отверждение. При таком способе отверждения имеется достаточно четкая граница — поверхность $S^*(t)$, разделяющая тело Ω на две области — $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t) = \Omega \setminus \Omega_1(t)$, находящиеся, соответственно, в состояниях 1 и 2 . Граница раздела $S^*(t)$ движется по материальным точкам внутри области Ω_1 , так, что частицы при прохождении через них поверхности S^* переходят из состояния 1 в состояние 2 , а область $\Omega_2(t)$ растет за счет уменьшения области $\Omega_1(t)$. Из-за скачка плотности на границе $S^*(t)$ она является поверхностью сильного разрыва. В силу общих законов механики — закона сохранения массы и закона изменения количества движения — на S^* должны выполняться условия для разрыва нормальной компоненты скорости и условие непрерывности вектора напряжения (см., например, [8, 9]):

$$[\rho(v_n - s_n)]_2^1 = 0, \quad [\sigma n]_2^1 = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $[\varphi]_2^1$ — скачок функции $\varphi(x)$ при переходе через S^* из Ω_2 и Ω_1 (т. е. разность предельных значений φ на S^* в Ω_1 и Ω_2 : $\varphi^{*(1)} - \varphi^{*(2)}$), v_n — нормальная к S^* составляющая материальной скорости v , ρ — плотность

массы, s_n — скорость движения поверхности S^* по нормали. Второе из условий (2.1) справедливо в принимаемом здесь предположении о квазистатическом деформировании тела Ω (т. е. при пренебрежении силами инерции в уравнении равновесия).

Соотношений (2.1) на $S^*(t)$ заведомо недостаточно для формулирования краевой задачи. Полный комплекс условий сильного разрыва на S^* получим при помощи процедуры предельного перехода в моделях, учитывающих конкретный механизм отверждения. При этом рассмотрим две модели: размытый фронт отверждения и дискретную схему отверждения. Модель размытого фронта адекватна реальному протеканию фронтального отверждения, а дискретная схема отверждения соответствует модели дискретного наращивания тела Ω_2 , переходящей в пределе в модель непрерывно наращиваемого тела, рассмотренную в п. 1. Обе модели приводят к одним и тем же соотношениям на разрыве, что дает основание для использования модели растущего тела (п. 1) применительно к области Ω_2 .

Рассмотрим вначале более простую для анализа дискретную схему отверждения. Пусть задано непрерывное движение поверхности $S^*(t)$, $t \geq 0$. Всюду в дальнейшем S^* — гладкая поверхность. Если фронт отверждения S^* своим краем выходит на поверхность $\partial\Omega$ тела Ω , то возникает особая линия пересечения S^* и $\partial\Omega$. Подобные ситуации здесь не рассматриваются.

Пусть Ω^T — часть тела Ω , отверждаемая за время T . Разобьем ее на конечное число слоев N последовательными положениями поверхности $S^*(t)$ в моменты $0 = t_0^N < t_1^N < t_2^N < \dots < t_{N-1}^N < t_N^N = T$. Слой, заключенный между $S^*(t_{i-1}^N)$ и $S^*(t_i^N)$, обозначим $\Omega^N(i)$. На интервале (t_{i-1}^N, t_i^N) происходит отверждение i -го слоя, однородное по его объему; при этом все слои с номерами, меньшими i , находятся в состоянии 2, а слои с номерами, большими i , — в состоянии 1. Рассмотренная дискретная схема отверждения допускает переход к пределу при $\max_i(t_i^N - t_{i-1}^N) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$).

Фиксируем момент времени t^* и рассмотрим такую последовательность разбиений $\{(t_i^N), 0 \leq i \leq N, 2 \leq N < \infty\}$, отрезка $[0, T]$, что для каждого N имеется такой номер i_N , что $t_{i_N-1}^N = t^*$. Введем локальное время $\tau = t - t_{i_N-1}^N$ и безразмерное время $s = \tau / \Delta t(N)$, $\Delta t(N) = t_{i_N}^N - t_{i_N-1}^N$. Проведем внутри слоя семейство координатных линий z , ортогональных к поверхностям $S^*(t)$. Пусть $\Delta(N)$ — толщина слоя в некоторой точке его поверхности, отсчитываемая вдоль координатной линии z , и $y = z / \Delta(N)$ — безразмерная координата внутри слоя, $y \in (0, 1)$. Фиксируем интервал безразмерного времени $[s, s + \delta s]$. Пусть последовательность отверждения задана функцией $\varphi(s)$, т. е. $\alpha = \varphi(s)$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 2$, $\delta\alpha = \varphi'(s) \delta s + o(\delta s)$, $\varphi'(s) = d\varphi/ds$. Приращение тензоров напряжения, деформаций и градиента смещения в Ω на интервале $[s, s + \delta s]$ обозначим $\delta\sigma^N$, $\delta\varepsilon^N$, δH^N . На поверхности разрыва $S^*(t^*)$ выполняются условия

$$[\delta\sigma^N \mathbf{n}] = 0, \quad [\delta H^N] = \delta \mathbf{a}^N \otimes \mathbf{n} \quad (2.2)$$

где $\delta \mathbf{a}^N$ — вектор, зависящий от t^* , N , s , δs и точки на поверхности $S^*(t^*)$; $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ означает тензорное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} [10]. Второе условие (2.2) вытекает из требования непрерывности смещений на $S^*(t^*)$ и теоремы Максвелла [10]. Докажем, что $\delta\sigma^N$, $\delta\varepsilon^N$ и δH^N стремятся к нулю в $\Omega_2(t^*) \setminus S^*(t^*)$ при $N \rightarrow \infty$.

Полагая процесс деформирования квазистатическим, будем иметь

$$\int_{\Omega^N(i_N)} (\delta\sigma^N \cdot \delta\varepsilon^N) dV + \int_{\Omega \setminus \Omega^N(i_N)} (\delta\sigma^N \cdot \delta\varepsilon^N) dV = \int_{\partial\Omega} (\delta p^N \cdot \delta \mathbf{u}^N) d\Sigma + \int_{\Omega} (\delta f^N \cdot \delta \mathbf{u}^N) dV \quad (2.3)$$

где $\delta \mathbf{u}^N$, δf^N , δp^N — приращения векторов смещения, плотности объемных

сил и вектора напряжения на границе $\partial\Omega$ на рассматриваемом интервале времени $[s, s+\delta s]$. При $N \rightarrow \infty$ имеем $\Delta t(N) \rightarrow 0$ и $\delta\tau(N) = \delta s \Delta t(N) \rightarrow 0$. Тогда при непрерывных во времени внешних воздействиях $(\delta p^N|_{s\sigma} \rightarrow 0, \delta u^N|_{s_u} \rightarrow 0, \delta f^N|_{\Omega} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$) правая часть в (2.3) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Пусть $\delta\sigma^\infty, \delta\varepsilon^\infty, \delta\mathbf{H}^\infty$ — предел $\delta\sigma^N, \delta\varepsilon^N, \delta\mathbf{H}^N$ при $N \rightarrow \infty$ ($\mathbf{x} \in \Omega \setminus S^*(t^*)$), поскольку $\Omega^N(i_N)$ стягивается к $S^*(t^*)$. Положим, что поверхность $S^*(t^*)$ имеет конечную площадь. Тогда объем слоя $\Omega^N(i_N)$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, и, переходя к пределу $N \rightarrow \infty$ в (2.3), будем иметь

$$\int_{\Omega \setminus S^*(t^*)} (\delta\sigma^\infty \cdot \delta\varepsilon^\infty) dV = 0 \quad (2.4)$$

Величины $\delta\sigma^\infty$ и $\delta\varepsilon^\infty$ связаны определяющим уравнением для мгновенного деформирования. Полагаем, что мгновенная реакция при всех $\alpha \in [1, 2]$ линейно упруга с тензором упругих модулей $\mathbf{A}(\alpha)$. Тензор упругомгновенных модулей считаем удовлетворяющим условию неотрицательности упругого потенциала в $\Omega_2(t)$ ($(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}) \geq 0$ для любого $\boldsymbol{\varepsilon}$) и положительности потенциала в $\Omega_2(t)$: $(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$ при $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| > 0$. Тогда из (2.4) получим $\delta\varepsilon^\infty|_{\Omega_2(t^*)} = 0$, $\delta\sigma^\infty|_{\Omega_2(t^*)} = 0$ и в силу условия $\delta u^\infty|_{s_u} = 0$ будет $\delta\mathbf{H}^\infty|_{\Omega_2(t^*)} = 0$.

Обозначим $\delta\sigma_N, \delta\varepsilon_N, \delta\mathbf{H}_N$ — функции, получаемые из $\delta\sigma^N, \delta\varepsilon^N, \delta\mathbf{H}^N$ в $\Omega^N(i_N)$ заменой переменной $z = y\Delta(N)$; а $\delta\sigma, \delta\varepsilon, \delta\mathbf{H}$ — предел $\delta\sigma_N, \delta\varepsilon_N, \delta\mathbf{H}_N$ при $N \rightarrow \infty$. В силу непрерывности $\delta\sigma^N, \delta\mathbf{H}^N$ в $\Omega^N(i_N)$ и (2.2) будем иметь

$$(\delta\sigma)\mathbf{n} = 0, \quad \delta\mathbf{H} = \delta\mathbf{a} \otimes \mathbf{n} \quad (2.5)$$

где $\delta\mathbf{a} = \lim \delta\mathbf{a}^N$ при $N \rightarrow \infty$. Обозначим $\mathbf{a} = \lim(\delta\sigma/\delta\alpha)$, $\boldsymbol{\sigma}' = \lim(\delta\sigma/\delta\alpha)$, $\mathbf{H}' = \lim(\delta\mathbf{H}/\delta\alpha)$, $\boldsymbol{\varepsilon}' = \lim(\delta\varepsilon/\delta\alpha)$ при $\delta s \rightarrow 0$. Полагая как обычно, что при мгновенном деформировании полная деформация есть сумма упругомгновенной и деформации усадки, будем иметь

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A}(\alpha)[\boldsymbol{\varepsilon}' - \mathbf{e}(\alpha)], \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = 1/2(\mathbf{H}' + \mathbf{H}'^T), \quad \mathbf{H}' = \mathbf{a} \otimes \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}'\mathbf{n} = 0 \quad (2.6)$$

Из (2.6) получим уравнение для определения вектора $\mathbf{a}(\alpha)$:

$$\{\mathbf{A}(\alpha)[1/2(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{e}(\alpha)]\mathbf{n}\} = 0 \quad (2.7)$$

Полные изменения тензоров деформации и напряжения в слое $\Omega^N(i_N)$ за время $\Delta t(N)$ в пределе $N \rightarrow \infty$ равны

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \int_1^2 \boldsymbol{\varepsilon}'(\alpha) d\alpha, \quad \Delta\boldsymbol{\sigma} = \int_1^2 \boldsymbol{\sigma}'(\alpha) d\alpha, \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{a}), \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}' - \mathbf{e}) \quad (2.8)$$

Оставляя лишь исчезающие при $N \rightarrow \infty$ члены, найдем относительное смещение $\Delta\mathbf{w}(N)$ противоположащих элементов поверхностей $S^*(t_{i_N}^N)$ и $S^*(t^*)$, ограничивающих слой, за время его отверждения $\Delta t(N)$:

$$\Delta\mathbf{w}(N) = \int_1^2 \mathbf{H}'(\alpha) \mathbf{n} \Delta(N) d\alpha \quad (2.9)$$

Изменение материальной скорости при переходе через слой в пределе $N \rightarrow \infty$ равно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta\mathbf{w}(N)}{\Delta t(N)} = s_n \int_1^2 \mathbf{a}(\alpha) d\alpha \quad (2.10)$$

где $s_n(t^*, \mathbf{x}) = \lim_N \Delta(N)/\Delta t(N)$ — скорость непрерывного движения S^* в данной точке по нормали \mathbf{n} .

Таким образом, дискретная схема отверждения приводит к следующим условиям сильного разрыва на фронте отверждения $S^*(t)$:

$$[v]_2^1 = s_n b, \quad b = \int_1^2 a(\alpha) d\alpha \quad (2.11)$$

$$[\varepsilon]_1^2 = \Delta \varepsilon(x) = 1/2 (b \otimes n + n \otimes b), \quad [\sigma]_1^2 = \Delta \sigma(x) = \int_1^2 \sigma'(\alpha) d\alpha$$

$$\sigma'(\alpha) = A(\alpha) [1/2 (a(\alpha) \otimes n + n \otimes a(\alpha)) - e(\alpha)], \quad \sigma'(\alpha) n = 0$$

Здесь $\Delta \varphi(x)$ означает величину мгновенного приращения функции $\varphi(t, x)$ в точке x в момент времени $\tau^*(x)$ прохождения фронта S^* через точку x : $\Delta \varphi(x) = \varphi(\tau^*(x) + 0, x) - \varphi(\tau^*(x) - 0, x)$. Совпадение пространственного $[\varphi]_1^2$ и временного скачка $\Delta \varphi(x)$ имеет место для функций $\varphi(t, x)$ непрерывных по t при $t < \tau^*(x)$, $t > \tau^*(x)$ и по $x \in \Omega \setminus S^*(t)$. Обозначим в этом случае $\varphi^{*(i)}(x) = \varphi(\tau^*(x) \mp 0, x) = \lim_y \varphi(\tau^*, y)$ при $y \rightarrow x \in S^*(t^*)$, $y \in \Omega_i(t^*)$, $t^* = \tau^*(x)$ ($i=1, 2$), где для $i=1$ имеет место знак минус, для $i=2$ — знак плюс.

Полученные соотношения (2.11), очевидно, содержат условие непрерывности вектора напряжения. Для вывода из (2.11) первого из условий (2.1) преобразуем его. Введем параметр относительного изменения удельного объема при отверждении $\theta = (\rho_1 - \rho_2) / \rho_2$ и перепишем (2.1)₁ в виде $(1 + \theta) v_n^{*(1)} - v_n^{*(2)} = \theta s_n$. При малом относительном изменении удельного объема $\theta \ll 1$ (2.1) имеет вид

$$[v_n]_2^1 = \theta s_n \quad (2.12)$$

Из (2.11) имеем

$$\theta \equiv \text{tr} \Delta \varepsilon = (b \cdot n) \quad (2.13)$$

Умножая (2.11) скалярно на n с учетом (2.13), получим (2.12).

Рассмотрим модель размытого фронта отверждения. Пусть задано непрерывное движение поверхности фронта $S^*(t)$ при $t > 0$. Рассмотрим последовательность временных промежутков $\Delta t(N) \rightarrow 0$ (при $N \rightarrow \infty$). Для каждого N рассмотрим размытый фронт отверждения, представляющий собой движущийся слой $\Omega^N(t)$, заключенный между поверхностями $S^*(t)$ и $S^*(t + \Delta t(N))$. В окрестности некоторой точки x и момента времени $t^* = \tau^*(x)$ проведем семейство координатных линий, ортогональных к поверхностям $S^*(t)$. Длину, отсчитываемую в направлении движения S^* вдоль такой координатной линии, обозначим z . Пусть $z = z_0(t)$ — закон движения некоторой точки на S^* , $\Delta_N(t) = z_0(t + \Delta t(N)) - z_0(t)$ — ширина фронта. Параметр отверждения α при переходе от $S^*(t + \Delta t(N))$ к $S^*(t)$ непрерывно изменяется от 1 до 2. Закон изменения α в зависимости от t, z запишем в виде

$$\alpha_N(t, z) = \psi[(z - z_0(t)) / \Delta_N(t)] \quad (2.14)$$

где $\psi(y)$, $y \in [0, 1]$ — монотонная гладкая функция $\psi(0) = 2$, $\psi(1) = 1$. В момент t^* рассмотрим приращение времени $\delta t(N, \varepsilon) = \varepsilon \Delta t(N)$, где параметр $\varepsilon \ll 1$. Приращения тензоров напряжения σ , деформации ε , градиента смещений H и параметра α на отрезке $[t^*, t^* + \delta t(N, \varepsilon)]$ обозначим $\delta \sigma^N$, $\delta \varepsilon^N$, δH^N , $\delta \alpha^N$.

Запишем по теореме работ

$$\int_{\Omega_\varepsilon^N(t^*)} (\delta \sigma^N \cdot \delta \varepsilon^N) dV + \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon^N(t^*)} (\delta \sigma^N \cdot \delta \varepsilon^N) dV = \int_{\partial \Omega} (\delta p^N \cdot \delta u^N) d\Sigma + \int_{\Omega} (\delta f^N \cdot \delta u^N) dV \quad (2.15)$$

Здесь $\Omega_\varepsilon^N(t^*)$ — объединение слоя $\Omega^N(t^*)$ и слоя, между $S^*(t^* + \Delta t(N))$ и $S^*(t^* + \Delta t(N) + \delta t(N, \varepsilon))$; δu^N , δf^N , δp^N — приращение на интервале

$[t^*, t^* + \delta t(N, \varepsilon)]$ векторов смещения, плотности объемной силы и вектора напряжения на границе $\partial\Omega$ области Ω . При тех же предположениях относительно внешних воздействий $f|_{\Omega}$, $p|_{S^*}$, $u^0|_{S^*}$, поверхности S^* и упругомгновенных свойств тела Ω , что и в дискретной модели отверждения, из (2.15) будем иметь

$$\lim_N \delta\sigma^N = \delta\sigma^\infty = 0, \quad \lim_N \delta H^N = \delta H^\infty = 0 \quad (x \in \Omega \setminus S^*(t^*)) \quad (2.16)$$

Обозначим через $\delta\sigma_N$, $\delta\varepsilon_N$, δH_N , $\delta\alpha_N$ функции в $\Omega^N(t^*)$, получаемые из $\delta\sigma^N$, $\delta\varepsilon^N$, δH^N , $\delta\alpha^N$ заменой переменной $y = (z - z_0(t^*)) / \Delta_N(t^*)$, символом $O(N)$ — такие функции, что $\lim O(N) = 0$ при $N \rightarrow \infty$; n — нормаль к $S^*(t^*)$. Тогда имеем

$$\delta\sigma_N n = O(N), \quad \delta H_N = \delta a_N \otimes n + O(N) \quad (2.17)$$

Для доказательства (2.17) аппроксимируем сколь угодно точно непрерывно-неоднородную усадку, действующую в слое $\Omega^N(t^*)$, дискретно-неоднородной усадкой, постоянной (в пространстве) в пределах каждого подслоя, на которые разбивается слой $\Omega^N(t^*)$. Тогда на каждой границе раздела слоев S_k (в том числе и $S^*(t^*)$) будем иметь условие непрерывности $\delta\sigma^N n$ и условие скачка $[\delta H^N]|_{S_k} = \delta a_k \otimes n|_{S_k}$. В силу непрерывности $\delta\sigma^N$ и δH^N в пределах каждого подслоя, соотношений (2.16) и $\lim \Delta_N(t^*) = 0$ при $N \rightarrow \infty$ получим (2.17).

Обозначим $(\delta\sigma, \delta H, \delta\varepsilon, \delta\alpha, \delta a)$ (t^*, y, ε) предел $(\delta\sigma_N, \delta H_N, \delta\varepsilon_N, \delta\alpha_N, \delta a_N)$ (t^*, y, ε) при $N \rightarrow \infty$; $\sigma' = \lim(\delta\sigma/\delta\alpha)$, $H' = \lim(\delta H/\delta\alpha)$, $\varepsilon' = \lim(\delta\varepsilon/\delta\alpha)$, $a = \lim(\delta a/\delta\alpha)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\delta\alpha = -\psi'(y)\varepsilon + o(\varepsilon)$). Полагая, что мгновенное приращение деформации $\delta\varepsilon$ равно сумме упругой деформации и деформации усадки $e(\alpha)\delta\alpha + o(\delta\alpha)$, запишем $\delta\sigma = A(\alpha)(\delta\varepsilon - e(\alpha)\delta\alpha + o(\delta\alpha))$, где $A(\alpha)$ — тензор упругомгновенных модулей в состоянии α . Отсюда и из (2.17) получим соотношения (2.6), (2.7) для определения $a(\alpha)$, $\sigma'(\alpha)$, $\varepsilon'(\alpha)$, $H'(\alpha)$.

Изменение градиента смещения при прохождении фронта через некоторую точку z (за время $\Delta t(N)$) в пределе $N \rightarrow \infty$ равно $\Delta H = \lim_N \int (\partial H^N / \partial t) dt$, где $t_0(z)$ — обратная функция к $z_0(t)$, а интеграл взят на отрезке $[t_0(z), t_0(z) + \Delta t(N)]$. При фиксированном z перейдем от переменной t к переменной α при помощи (2.14) и заметим, что $\lim_N (\partial H^N / \partial \alpha) = H'(\alpha) = -a(\alpha) \otimes n$. Тогда имеем

$$\Delta H = \lim_N \int_1^2 (\partial H^N / \partial \alpha) d\alpha = \int_1^2 H'(\alpha) d\alpha$$

Аналогично получим соотношения (2.8) для $\Delta\varepsilon$, $\Delta\sigma$. Для относительного смещения $\delta w(N, \varepsilon)$, противоположащих элементов поверхностей $S^*(t^* + \Delta t(N))$ и $S^*(t^*)$, ограничивающих фронт, за время $\delta t(N, \varepsilon)$ будем иметь

$$\delta w(N, \varepsilon) = \int_{z_0(t^*)}^{z_0^\Delta(t^*)} \delta H^N(t^*, z, \varepsilon) n dz = \int_0^1 \delta H_N(t^*, y, \varepsilon) n \Delta_N(t^*) dy$$

$$z_0^\Delta(t^*) = z_0(t^*) + \Delta_N(t^*) \quad (2.18)$$

Изменение материальной скорости при переходе через фронт в пределе равно

$$[v]_2^1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta w(N, \varepsilon)}{\delta t(N, \varepsilon)}$$

Изменяя здесь порядок вычисления пределов, получим

$$[v]_2^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_N(t^*)}{\Delta t(N)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \delta H_N(t^*, y, \varepsilon) n dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s_n}{\varepsilon} \int_0^1 \delta \mathbf{H}(t^*, y, \varepsilon) \mathbf{n} dy, \quad s_n = \frac{dz_0}{dt} = \frac{\lim_N \Delta_N(t^*)}{\Delta t(N)}$$

Делая замену переменной $\alpha = \psi(y)$, будем иметь

$$[v]_2^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_n \int_2^1 \frac{\delta \mathbf{H}(t^*, y(\alpha), \varepsilon) \mathbf{n}}{\psi'(y(\alpha)) \varepsilon} d\alpha = s_n \int_1^2 \mathbf{H}'(\alpha) \mathbf{n} d\alpha = s_n \int_1^2 \mathbf{a}(\alpha) d\alpha$$

Таким образом, получаем систему соотношений (2.11) на сильном разрыве. Требование разрешимости уравнения (2.7) относительно вектора \mathbf{a} приводит к ограничениям на возможный вид тензора $\mathbf{A}(\alpha)$, т. е. на упругомгновенные свойства каждого из состояний с $\alpha \in (1, 2)$. Несуществование решения уравнения (2.7) для некоторого \mathbf{n} эквивалентно тому, что существует такой ненулевой вектор \mathbf{c} , что

$$(\mathbf{A}\varepsilon)\mathbf{n} = 0, \quad \varepsilon = 1/2(\mathbf{c} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{c}) \quad (2.19)$$

Условие (2.19) означает, что при осуществлении деформации с тензором ε вектор напряжения на площадке, перпендикулярной к \mathbf{n} , равен нулю. Здесь возможны два случая: \mathbf{c} параллелен \mathbf{n} и \mathbf{c} не параллелен \mathbf{n} . В первом случае деформация ε есть растяжение вдоль \mathbf{n} , во втором ε — суперпозиция растяжения вдоль \mathbf{n} и сдвига в плоскости векторов \mathbf{c} и \mathbf{n} . В соответствии с этим формулируем два свойства: существует такое направление \mathbf{n} , вдоль которого можно осуществить одноосное растяжение при нулевых напряжениях на площадке, перпендикулярной к \mathbf{n} ; существуют такие направления \mathbf{n} и \mathbf{c} , что можно осуществить суперпозицию (2.19) сдвига в плоскости \mathbf{n} и \mathbf{c} и одноосного растяжения в направлении \mathbf{n} , при нулевых напряжениях на площадке, перпендикулярной к \mathbf{n} . Условие существования решений уравнения (2.7) эквивалентно отсутствию у материала этих свойств.

Рассмотрим ортонормированный базис (\mathbf{h}_i) ($i=1, 2, 3$), у которого третий орт совпадает с нормалью \mathbf{n} к S^* . В данном базисе компоненты ε_{ij}' тензора ε' будут $\varepsilon_{33}' = a_3$, $\varepsilon_{31}' = 1/2 a_1$, $\varepsilon_{32}' = 1/2 a_2$, $\varepsilon_{11}' = \varepsilon_{12}' = \varepsilon_{22}' = 0$, где a_i — компоненты \mathbf{a} . Таким образом, при упругомгновенном переходе слоя из состояния 1 в состояние 2 в нем не возникает деформаций в касательной плоскости к $S^*(t)$. Для изотропной усадки $\mathbf{e}(\alpha) = e(\alpha)\mathbf{I}$ (\mathbf{I} — единичный тензор) и изотропного материала с модулем Юнга $E(\alpha)$ и коэффициентом Пуассона $\nu(\alpha)$ решение уравнения (2.7) будет

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = e(1+\nu)/(1-\nu) \\ \sigma_{22}' = \sigma_{11}' = -Ee/(1-\nu), \quad \sigma_{12}' = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Наряду с непрерывным спектром состояний $\alpha \in [1, 2]$ можно рассмотреть конечный набор состояний, отвечающих значениям параметра отверждения $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = 2$. Размытый фронт в этом случае представляет собой слой, состоящий из k слоев, находящихся в состояниях α_i ($i=1, 2, \dots, k$), в которых одновременно действуют усадки $e(i)$. По окончании действия этих усадок каждый слой без изменения напряженного состояния мгновенно переходит в следующее состояние с параметром α_{i+1} , при этом k -й слой покидает фронт, переходя в Ω_2 и к фронту присоединяется новый слой из Ω_1 . Данная модель является по существу схемой дискретного наращивания области Ω . Условия на разрыве, вытекающие из данной модели, формально содержатся в полученных ранее (2.11), если положить

$$\mathbf{e}(\alpha) = \sum_{i=1}^k \mathbf{e}(i) \delta(\alpha - \alpha_i)$$

где $\delta(\alpha - \alpha_i)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке α_i . При этом будем иметь

$$[v]_2^1 = s_n b, \quad b = \sum_{i=1}^k a(i) \quad (2.21)$$

$$[\varepsilon]_1^2 = \Delta \varepsilon = 1/2 (b \otimes n + n \otimes b), \quad [\sigma]_1^2 = \Delta \sigma = \sum_{i=1}^k \sigma'(i)$$

$$\sigma_i' = A(\alpha_i) \{ 1/2 (a(i) \otimes n + n \otimes a(i)) - e(i) \}, \quad \sigma_i' n = 0$$

Простейшей моделью фронта является модель, рассматривающая лишь начальное и конечное состояния с $i=1, 2$ [4, 2].

Выше предполагалось, что тензор усадки e не зависит от напряженного состояния σ , при котором протекает отверждение. Процедура (2.11) нахождения скачков напряжений, деформаций и материальной скорости очевидным образом изменяется при $e=e(\alpha, \sigma)$. В этом случае решение уравнения (2.7) обозначим $a(\alpha, \sigma)$ и положим $\varepsilon'(\alpha, \sigma) = 1/2 (a(\alpha, \sigma) \otimes n + n \otimes a(\alpha, \sigma))$. Пусть $\sigma_0(\alpha)$, $\alpha \in [1, 2]$ есть решение дифференциального уравнения $d\sigma_0/d\alpha = A(\alpha) \{ \varepsilon'(\alpha, \sigma_0) - e(\alpha, \sigma_0) \}$ с начальным условием $\sigma_0(1) = \sigma^{*(1)}(x) = \sigma(\tau^*(x) - 0, x)$. Тогда вместо (2.11) будем иметь

$$[\sigma]_1^2 \equiv \Delta \sigma = \sigma_0(\alpha)|_1^2, \quad [v]_2^1 = s_n b, \quad b = \int_1^2 a(\alpha, \sigma_0(\alpha)) d\alpha$$

$$[\varepsilon]_1^2 \equiv \Delta \varepsilon(x) = \int_1^2 \varepsilon'(\alpha, \sigma_0(\alpha)) d\alpha = \frac{1}{2} (b \otimes n + n \otimes b)$$

3. Рассмотрим краевую задачу о фронтальном отверждении. В области Ω считается заданным движение поверхности фронта отверждения $S^*(t)$ ($t > 0$), разделяющей Ω на две части — растущую область $\Omega_2(t)$ и уменьшаемую область $\Omega_1(t)$, причем $S^*(t)$ является поверхностью роста области $\Omega_2(t)$. В $\Omega_2(t)$ принимаем геометрические соотношения (1.4) для наращиваемого тела

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{*(2)}(x) + \int_{\tau^*(x)}^t \varepsilon^*(\tau, x) d\tau, \quad \varepsilon^*(t, x) = \text{def } u^*(t, x) \quad (t > \tau^*(x)) \quad (3.1)$$

Здесь $\tau^*(x)$ — момент времени отверждения частицы x , совпадающий с моментом присоединения ее к области Ω_2 и моментом прохождения через нее поверхности раздела S^* , при этом имеет место (1.1) и $\Omega_1(t) = \{x: x \in \Omega, \tau^*(x) > t\}$, $\Omega_2(t) = \{x: x \in \Omega, \tau^*(x) < t\}$.

Тензор $\varepsilon^{*(2)}(x)$ определяется предысторией деформирования частицы x , при $t \in (-\infty, \tau^*(x)]$, т. е. движением ее в состоянии I в составе тела Ω_1 при $t \in (-\infty, \tau^*)$ и мгновенным деформированием в момент перехода $\tau^*(x)$, определяемым по (2.11): $\varepsilon^{*(2)}(x) \equiv \varepsilon(\tau^*(x) + 0, x) = \varepsilon^{*(1)}(x) + \Delta \varepsilon(x)$, $\varepsilon^{*(1)}(x) = \varepsilon(\tau^*(x) - 0, x)$.

Отличие от краевой задачи п. 1 состоит в том, что предыстория движения частицы x до момента $\tau^*(x)$ не может быть найдена независимо от деформации растущего тела Ω_2 , а определяется из рассмотрения совместного деформирования тел Ω_1 и Ω_2 , которое должно удовлетворять условиям разрыва материальной скорости (2.14) на поверхности раздела S^* . Рассмотрим вначале вязкоупругий материал, обладающий линейной упруго-мгновенной реакцией и затухающей памятью [10] как в отвержденном, так и в исходном состоянии. Пусть $u(t, x)$, $t \in (-\infty, \tau^*(x))$ — перемещение точки x при переходе тела Ω_1 из естественного (ненапряженного) состояния в актуальное. Отметим, что состояние тела Ω в момент начала отверж-

дения $t=0$, вообще говоря, является напряженным. Запишем общий вид определяющего соотношения для исходного состояния ($\mathbf{x} \in \Omega_1(t)$)

$$\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{L}_1(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x})) + \mathbf{N}_1(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x})), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{x}) = \text{def } \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \quad (t < \tau^*(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{L}_1(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x})) = \int_{-\infty}^t \mathbf{K}_1(t, \tau, \mathbf{x}) d_\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\tau, \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{L}_1(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}))$ — линейный оператор с ядром \mathbf{K}_1 (тензор четвертого ранга) от предыстории $\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\varepsilon}^t(s, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t-s, \mathbf{x}), s \in [0, \infty))$, $\mathbf{N}_1(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}))$ — нелинейный оператор, не обладающий мгновенной реакцией, и такой, что $\mathbf{N}_1(0) = 0$. Общий вид определяющего соотношения в отверженном состоянии ($\mathbf{x} \in \Omega_2(t)$), совместимого с условиями на разрыве напряжений (2.11), будет

$$\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{L}_2(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x})) + \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x})) + \Delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{L}_2(\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x})) = \int_{(-\infty, t] \setminus \{\tau^*(\mathbf{x})\}} \mathbf{K}_2(t, \tau, \mathbf{x}) d_\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\tau, \mathbf{x}) \quad (t > \tau^*(\mathbf{x})) \quad (3.3)$$

Здесь \mathbf{L}_2 — линейный оператор, \mathbf{N}_2 — нелинейный оператор ($\mathbf{N}_2(0) = 0$), не обладающий мгновенной реакцией; $\Delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{*(2)}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}^{*(1)}(\mathbf{x})$ — величина разрыва тензора $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})$, определяемая по (2.11); $f(t, \mathbf{x})$ — функция релаксации скачка напряжения $\Delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, $f(\tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 1$.

Отметим, что принцип материальной независимости [10] требует, чтобы различные временные параметры $(t_i)_{i=1, 2, \dots}$ (в том числе и текущее время t) входили в определяющее соотношение в виде разностей $(t_i - t_j)$, $i \neq j$. Следовательно, если свойства материала в отверженном состоянии нестабильны, то ядро \mathbf{K}_2 в (3.3) с необходимостью имеет вид $\mathbf{K}_2(t, \tau, \mathbf{x}) = \mathbf{K}_2^*(t - \tau^*(\mathbf{x}), \tau - \tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x})$, принятый в теории неоднородно-стареющих сред [11]. Соотношения (3.2), (3.3) — лишь сокращенная форма записи определяющих уравнений, нестабильных неоднородных сред.

Постановка задачи замыкается условиями (2.11) на $S^*(t)$, а также стандартным уравнением квазистатического равновесия и граничными условиями в напряжениях и смещениях

$$(\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f})|_{\Omega \setminus S^*(t)} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{S_\sigma} = \mathbf{p}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}), \quad \partial \Omega = \dot{S}_\sigma \cup S_u \quad (3.4)$$

Напомним основные допущения, при которых получены соотношения на разрыве (2.11). Поверхность $S^*(t)$ — гладкая, имеет конечную площадь и не образует линий пересечения с границей $\partial \Omega$ тела Ω . Мгновенная реакция материала линейно упруга во всех состояниях с $\alpha \in [1, 2]$, причем работа мгновенной деформации в исходном состоянии неотрицательна, а в отверженном состоянии — положительна. Внешние воздействия \mathbf{f} в Ω , \mathbf{p} на S_σ и \mathbf{u} на S_u непрерывны во времени. Ширина фронта отвержения достаточно мала, чтобы можно было аппроксимировать его поверхностью разрыва. При этом время отвержения все же достаточно велико, так что можно пренебречь силами инерции в отверженном слое.

Подобно п. 1, переход к скоростям \mathbf{u}^* , $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ приводит к эквивалентной краевой задаче с векторными условиями сопряжения на $S^*(t)$ и стандартными геометрическими соотношениями в $\Omega_2(t)$. Для вывода условий в напряжениях на S^* подействуем оператором дивергенции на тождества $\boldsymbol{\sigma}(\tau^*(\mathbf{x}) \mp 0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{*(i)}(\mathbf{x})$ ($i=1, 2$):

$$\boldsymbol{\sigma}^{*(i)} \nabla \tau^* + \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\tau, \mathbf{x}) = \text{div } \boldsymbol{\sigma}^{*(i)}(\mathbf{x}), \quad \tau = \tau^*(\mathbf{x}) \mp 0$$

Отсюда, используя уравнение равновесия (3.4) и (4.1), окончательно получим

$$[\boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{n}]_2^1 = (\text{div } [\boldsymbol{\sigma}^*]_2^1 + [\rho]_2^1 \mathbf{f}^*) s_n \quad (3.5)$$

Решение исходной задачи будет

$$\sigma(t, x) = \sigma(0, x) + \int_0^t \sigma^*(\tau, x) d\tau \quad (t < \tau^*(x)) \quad (3.6)$$

$$\sigma(t, x) = \sigma(\tau^*(x) - 0, x) + \Delta\sigma(x) + \int_{\tau^*(x)}^t \sigma^*(\tau, x) d\tau \quad (t > \tau^*(x))$$

Если пренебречь эффектами памяти и учитывать лишь упругие свойства в обоих состояниях, то описанный прием сводит решение исходной краевой задачи к решению задач теории упругости для составного тела $\Omega = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$ с заданными скачками векторов u^* («смещения») и σ^* («напряжения») на границе S^* контакта тел Ω_1 и Ω_2 .

Пример 1. Пусть изотропный упругий полый шар $\Omega = \{a \leq r \leq b\}$ с модулем Юнга E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 отверждается фронтом, движущимся от внешней поверхности к внутренней по закону $r = r_*(t)$, $r_*(0) = b$. В результате отверждения упругие константы становятся равными E_2, ν_2 . Изменение удельного объема при отверждении происходит в результате изотропной усадки $e(\alpha) = e(\alpha)I$. Рассмотрим сферически-симметричную деформацию шара, когда частицы смещаются лишь в радиальном направлении. Величина разрыва окружного напряжения σ_ϕ и радиальной скорости u^* равны по (2.11), (2.20)

$$[\sigma_\phi]_1^2 = - \int_1^2 \frac{E(\alpha)e(\alpha)}{1-\nu(\alpha)} d\alpha, \quad [u^*]_2^1 = \theta r_*^*, \quad \theta = [\varepsilon_r]_1^2 = \int_1^2 \frac{e(\alpha)(1+\nu(\alpha))}{(1-\nu(\alpha))} d\alpha. \quad (3.7)$$

Используя общее решение для сферически-симметричной деформации шара, запишем

$$\sigma_r^{(i)} = C_1^{(i)} + C_2^{(i)}/r^3, \quad \sigma_\phi^{(i)} = C_1^{(i)} - 1/2 C_2^{(i)}/r^3 \quad (3.8)$$

$$u^{*(i)} = r \varepsilon_\phi^{(i)} = r E_i^{-1} \{ (1-2\nu_i) C_1^{(i)} - 1/2 C_2^{(i)} (1+\nu_i) / r^3 \} \quad (r \in \Omega_i(t), i=1, 2)$$

Условие (3.5) быстрее всего выводится дифференцированием по t равенства $\sigma_r^{(1)}(t, r_*(t)) = \sigma_r^{(2)}(t, r_*(t))$ с использованием уравнения равновесия $\partial \sigma_r^{(i)} / \partial r = 2(\sigma_\phi^{(i)} - \sigma_r^{(i)})/r$. При этом будем иметь

$$[\sigma_r^*]_1^2 = -2[\sigma_\phi]_1^2 r_*^* / r_* \quad (3.9)$$

Задача замыкается какими-либо стандартными условиями на внутренней и внешней поверхностях шара. Пусть, например, заданы внутреннее и внешнее давление:

$$\sigma_r^{(1)}|_{r=a} = -p_i^*(t), \quad \sigma_r^{(2)}|_{r=b} = -p_e^*(t) \quad (3.10)$$

Подстановка соотношений (3.8) в условие скачка скорости (3.7) и в (3.9), (3.10) приводит к системе четырех линейных уравнений относительно коэффициентов $C_j^{(i)}$ ($i, j=1, 2$). Разрешая ее, найдем

$$C_1^{(1)} = \frac{Q_1}{Q_2}, \quad C_2^{(1)} = -a^3(C_1^{(1)} + p_i^*), \quad C_1^{(2)} = \frac{Q_3}{Q_2}, \quad C_2^{(2)} = -b^3(C_1^{(2)} + p_e^*)$$

$$Q_1 = (b^3 - r_*^3) \{ 2E_1 E_2 \theta r_*^2 r_*^* - E_2 a^3 (1 + \nu_1) p_i^* + E_1 b^3 (1 + \nu_2) p_e^* \} - E_1 \{ (1 - 2\nu_2) 2r_*^3 + b^3 (1 + \nu_2) \} \{ b^3 p_e^* - a^3 p_i^* - 2[\sigma_\phi]_1^2 r_*^2 r_*^* \} \quad (3.11)$$

$$Q_2 = E_2 (b^3 - r_*^3) \{ (1 - 2\nu_1) 2r_*^3 + a^3 (1 + \nu_1) \} + E_1 (r_*^3 - a^3) \{ (1 - 2\nu_2) 2r_*^3 + b^3 (1 + \nu_2) \}, \\ Q_3 = 2[\sigma_\phi]_1^2 r_*^2 r_*^* E_2 \{ (1 - 2\nu_1) 2r_*^3 + a^3 (1 + \nu_1) \} - 2E_1 E_2 \theta r_*^2 r_*^* (r_*^3 - a^3) + 3p_i^* E_2 r_*^3 a^3 (1 - \nu_1) - p_e^* b^3 \{ E_1 (r_*^3 - a^3) (1 + \nu_2) + E_2 \{ (1 - 2\nu_1) 2r_*^3 + a^3 (1 + \nu_1) \} \}$$

Пусть $C_j^{V(i)}$ есть функции $C_j^{(i)}$, в которых опущен сомножитель r_* , а p_i^* , p_e^* заменены на $p_i' = dp_i/dr_*$, $p_e' = dp_e/dr_*$. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} C_j^{(i)}(r_*(t)) dt = \int_{r_*(t_1)}^{r_*(t_2)} C_j^{V(i)}(r_*) dr_* \quad (3.12)$$

Полное изменение напряжений в процессе отверждения получим интегрированием скоростей напряжений по времени (см. (3.6)). Переходя к интегрированию по r_* с помощью замены переменной (3.12), будем иметь для приращений напряжений

$$\sigma_r^{(1)}(t, r) = H_1^{(1)}(t) + \frac{H_2^{(1)}(t)}{r^3}, \quad \sigma_\varphi^{(1)}(t, r) = H_1^{(1)}(t) - \frac{H_2^{(1)}(t)}{2r^3}$$

$$H_i^{(1)}(t) = \int_b^{r_*(t)} C_i^{V(1)}(r_*) dr_* \quad (i=1, 2), \quad (a \leq r < r_*(t)) \quad (3.13)$$

$$\sigma_r^{(2)}(t, r) = H_1^{(1)}(\tau^*(r)) + H_1^{(2)}(t, r) + \frac{H_2^{(1)}(\tau^*(r)) + H_2^{(2)}(t, r)}{r^3}$$

$$\sigma_\varphi^{(2)}(t, r) = H_1^{(1)}(\tau^*(r)) + H_1^{(2)}(t, r) - \frac{H_2^{(1)}(\tau^*(r)) + H_2^{(2)}(t, r)}{2r^3} + [\sigma_\varphi]_1^2$$

$$H_i^{(2)}(t, r) = \int_r^{r_*(t)} C_i^{V(2)}(r_*) dr_* \quad (i=1, 2), \quad (b \geq r > r_*(t))$$

Для сплошного шара $C_2^{(1)} = 0$ и решение можно получить положив в (3.11) $C_1^{(1)} = -p_i^*$ и разрешив полученное уравнение относительно p_i^* — скорости изменения давления в шаре $\{0 \leq r < r_*(t)\}$.

Пример 2. Пусть эффекты затухающей памяти учитываются в линейном приближении. Рассмотрим полый цилиндр $\Omega = \{a \leq r \leq b\}$, изотропный и несжимаемый во всех состояниях с $\alpha \in [1, 2]$, который отверждается фронтом $r_*(t)$, движущимся от внутренней поверхности $r_*(0) = a$ к внешней. Изменение плотности при отверждении происходит в результате упругомгновенной изотропной усадки с $e(\alpha) = e(\alpha)I$. Рассмотрим плоскую деформацию ($\varepsilon_z = 0$). Тогда отлично от нуля лишь радиальное перемещение $u^{(i)}(t, r)$, $r \in \Omega_i(t)$ ($i=1, 2$), $\Omega_1(t) = \{r: r_*(t) < r \leq b\}$, $\Omega_2(t) = \{r: a \leq r < r_*(t)\}$.

Условия на разрыве будут

$$[\sigma_\varphi]_1^2 = -6 \int_1^2 G(\alpha) e(\alpha) d\alpha, \quad [u^*]_2^1 = \theta r_*^*, \quad \theta = [\varepsilon_r]_1^2 = 3 \int_1^2 e(\alpha) d\alpha \quad (3.14)$$

где $G(\alpha)$ — мгновенный модуль сдвига.

Подставляя $\varepsilon_r^{(i)} = \partial u^{(i)}/\partial r$, $\varepsilon_\varphi^{(i)} = u^{(i)}/r$ в условие несжимаемости $\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\varphi^{(i)} = 0$, найдем, что $u^{(i)} = \beta^{(i)}(t)/r$, где $\beta^{(i)}(t)$ — неопределенные функции ($i=1, 2$). Определяющее уравнение будет

$$(\sigma_\varphi^{(1)} - \sigma_r^{(1)})(t, r) = \int_{-\infty}^t \mu_1(t, \tau, r) d\tau (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)(\tau, r) = \frac{2}{r^2} \int_{-\infty}^t \mu_1(t, \tau, r) \beta^{(1)}(\tau) d\tau \quad (t < \tau^*(r))$$

$$(\sigma_\varphi^{(2)} - \sigma_r^{(2)})(t, r) = \frac{2}{r^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\tau^*(r)} \mu_2(t, \tau, r) \beta^{(1)}(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau^*(r)}^t \mu_2(t, \tau, r) \beta^{(2)}(\tau) d\tau \right\} + [\sigma_\varphi]_1^2 f(t, r) \quad (t > \tau^*(r)) \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в уравнения равновесия $\partial \sigma_r^{(i)} / \partial r = (\sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_r^{(i)}) / r$ и интегрируя полученные уравнения по r , будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(t, r_1) &= -p_e(t) - \int_{-\infty}^t d\tau \beta^{(1)}(\tau) \left\{ \int_{r_1}^b \frac{2\mu_1(t, \tau, r)}{r^3} dr \right\} \quad (r_*(t) < r_1 \leq b) \\ \sigma_r^{(2)}(t, r_2) &= -p_i(t) + \int_{-\infty}^t d\tau \beta^{(1)}(\tau) \left\{ \int_{r_*(\tau)}^{r_2} \frac{2\mu_2(t, \tau, r)}{r^3} dr \right\} + \\ &+ \int_0^t d\tau \beta^{(2)}(\tau) \left\{ \int_a^{\kappa(\tau, r_2)} \frac{2\mu_2(t, \tau, r)}{r^3} dr \right\} + [\sigma_\varphi]_1^2 \int_a^{r_2} \frac{f(t, r)}{r} dr, \\ \kappa &= \min(r_2, r_*(\tau)) \quad (a \leq r_2 < r_*(t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $p_i(t)$ и $p_e(t)$ — внутреннее и внешнее давления. Из (3.16), используя условие непрерывности радиального напряжения на фронте и условие разрыва скорости (3.14) $\beta^{(1)}(t) - \beta^{(2)}(t) = \theta r_*(t) r_*'(t)$ ($t > 0$), получим уравнение относительно $\beta^{(2)}(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^t K(t, \tau) \beta^{(2)}(\tau) d\tau &= q(t) \quad (t > 0), \\ K(t, \tau) &= \int_{r_*(\tau)}^b \frac{2\mu_1(t, \tau, r)}{r^3} dr + \int_a^{r_*(\tau)} \frac{2\mu_2(t, \tau, r)}{r^3} dr \quad (t \geq \tau \geq 0) \\ q(t) &= p_i(t) - p_e(t) - \int_{-\infty}^t \beta^{(1)}(\tau) d\tau \left\{ \int_a^b \frac{2\mu_1(t, \tau, r)}{r^3} dr \right\} - \\ &- \theta \int_0^t d\tau r_*(\tau) r_*'(\tau) \left\{ \int_{r_*(\tau)}^b \frac{2\mu_1(t, \tau, r)}{r^3} dr \right\} - [\sigma_\varphi]_1^2 \int_a^{r_*(t)} \frac{f(t, r)}{r} dr \end{aligned} \quad (3.17)$$

Уравнение для определения функции $\beta^{(1)}(t)$ при $t < 0$, определяющей предысторию деформирования до отверждения, будет

$$\int_{-\infty}^t d\tau \beta^{(1)}(\tau) \left\{ \int_a^b \frac{2\mu_1(t, \tau, r)}{r^3} dr \right\} = p_i(t) - p_e(t) \quad (t < 0) \quad (3.18)$$

Определив из (3.17), (3.18) функции $\beta^{(i)}(t)$ ($i=1, 2$), найдем напряжения по (3.15), (3.16). Если сдвиговая жесткость в исходном состоянии равна нулю $\mu_1=0$, что соответствует жидкости или газу, то область $\Omega_1(t)$ передает давление по закону Паскаля на границу $r=r_*(t)$ растущего тела $\Omega_2(t)$. В этом случае на поверхности растущего тела Ω_2 . Если при этом $p_e=0$, то рассмотренная задача математически эквивалентна задаче о силовой намотке с заданным упругомгновенным натягом $\sigma_\varphi^* = -[\sigma_\varphi]_1^2$ [7].

Возвращаясь к постановке общей краевой задачи, отметим, что в области $\Omega_1(t)$ можно пренебречь сдвиговой жесткостью и использовать определяющее уравнение вязкой жидкости [8-10]:

$$\sigma = -p(\rho) \mathbf{I} + \Phi(\mathbf{d}, \rho), \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (3.19)$$

где ρ — плотность, $\Phi(\mathbf{d}, \rho)$ — изотропная функция тензора скоростей деформаций \mathbf{d} , $\nabla \mathbf{v}$ — пространственный градиент скорости \mathbf{v} . Действительно, для разрешимости краевой задачи об отверждении нужно, чтобы по заданному в $\Omega_1(t)$ вектору напряжения на $S^*(t)$ можно было найти движение частиц в этой области. Пусть разрешена соответствующая задача в $\Omega_1(t)$, включающая определяющее уравнение (3.23), уравнение равновесия $\text{div } \sigma + \rho \mathbf{f} = 0$, уравнение неразрывности $\partial \rho / \partial t + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$, граничные условия в напряжениях на $S_\sigma \cup S^*(t)$ и смещениях на S_u . Следовательно, по заданному в $\Omega_1(t)$ на $S^*(t)$ вектору напряжения $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ определяется вектор скорости $\mathbf{v}^{*(1)}(\mathbf{x})$ и тензор напряжений $\sigma^{*(1)}(\mathbf{x})$ в $\Omega_1(t)$ на $S^*(t)$. Поскольку в состоя-

нии I память частиц о своем движении инфинитезимальна, то предыстория деформации до момента отверждения входит в определяющее уравнение в состоянии 2 : лишь посредством начальных напряжений $\sigma^{*(1)}(\mathbf{x}) = \sigma(\tau^*(\mathbf{x}) - 0, \mathbf{x})$; $\sigma(t, \mathbf{x}) = \sigma^{*(1)}(\mathbf{x})f_1(t, \mathbf{x}) + \Delta\sigma(\mathbf{x})f_2(t, \mathbf{x}) + L_2(\varepsilon^t(\mathbf{x})) + N_2(\varepsilon^t(\mathbf{x}))$

$$\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \Delta\varepsilon(\mathbf{x}) + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \text{def } \mathbf{u}^*(\tau, \mathbf{x}) d\tau, \quad L_2(\varepsilon^t(\mathbf{x})) = \int_{\tau^*(\mathbf{x})+0}^t K_2(t, \tau, \mathbf{x}) d_\tau \varepsilon(\tau, \mathbf{x}) \quad (3.20)$$

Здесь $f_i(t, \mathbf{x})$ ($i=1, 2$) — функции релаксации начального напряжения $\sigma^{*(1)}$ и скачка $\Delta\sigma(f_i(\tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x})=1, i=1, 2)$, N_2 — нелинейный оператор от предыстории $\varepsilon^s = \varepsilon^s(s, \mathbf{x}) = \varepsilon(t-s, \mathbf{x})$, $s \in [0, \tau^*(\mathbf{x})]$, не обладающий упругомгновенной реакцией, в $N_2(0) = 0$. Так как при заданном $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ известна предыстория деформирования присоединяемых частиц (в частности, $\sigma^{*(1)}(\mathbf{x})$) и $\Delta\sigma(\mathbf{x})$, то определяется и решение краевой задачи в растущей области $\Omega_2(t)$. Таким образом, по заданному в Ω_1 на S^* вектору напряжения определяются векторы скорости $\mathbf{v}^{*(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\tau^*(\mathbf{x}) - 0, \mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^{*(2)}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\tau^*(\mathbf{x}) + 0, \mathbf{x})$. Уравнением для определения вектора $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ служит условие скачка вектора скорости (2.11).

Пример 3. Пусть первоначально жидкий сплошной шар $\Omega = \{r: r \leq a\}$ отверждается сферическим фронтом радиуса $r_*(t)$, $r_*(0) = a$, движущимся внутрь. Жидкая область $\Omega_1(t) = \{r: r < r_*(t)\}$ подчиняется уравнениям Стокса для квазистатического движения линейно-вязкой жидкости [8]:

$$-\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \text{div } \mathbf{v}^{(1)} + \mu \Delta \mathbf{v}^{(1)} = 0, \quad p = p(\rho), \quad \partial \rho / \partial t + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \quad (3.21)$$

Сферически-симметричное решение $v_r^{(1)}(t, r)$ уравнений (3.21) будет

$$\bar{p} = p(t), \quad v_r^{(1)}(t, r) = -1/3(\rho^*/\rho)r \quad (3.22)$$

Пусть усадка изотропна $e(\alpha) = e(\alpha)\mathbf{I}$, материал изотропный во всех состояниях с $\alpha \in [1, 2]$, с мгновенным модулем $E(\alpha)$ и коэффициентом Пуассона $\nu(\alpha)$. В состоянии 2 материал упругий с $E = E(2)$, $\nu = \nu(2)$. Тогда имеем

$$v_r^{(2)}(t, r_*(t)) = D(r_*(t)) \sigma_r^{(2)}(t, r_*(t)), \quad D(r_*) = \frac{r_* \{ (1-2\nu) 2r_*^3 + a^3(1+\nu) \}}{2E(r_*^3 - a^3)} \quad (3.23)$$

где D — податливость твердой зоны.

Давление в Ω_1 обозначим $p_1(t) = p(\rho(t)) + (\lambda + 2/3\mu) \rho^*/\rho = -\sigma_r^{(1)} = -\sigma_\varphi^{(1)}$. Дифференцируя по t равенство $\sigma_r^{(2)}(t, r_*(t)) = -p_1(t)$, будем иметь

$$\sigma_r^{(2)}(t, r_*(t)) = -p_1^*(t) - 2r_*^*(t) \{ \sigma_\varphi^{(2)}(t, r_*(t)) + p_1(t) \} / r_*^*(t) \quad (3.24)$$

Из условий на разрыве (3.7) и (3.22)–(3.24) получим задачу Коши для p_1 и ρ (p_0 — наружное давление):

$$p_1^* + 2r_*^* [\sigma_\varphi]_1^2 / r_* - \rho^* r_*^* / (3\rho D(r_*)) = \theta r_*^* / D(r_*) \quad (3.25)$$

$$p_1 = p(\rho) + (\lambda + 2/3\mu) \rho^*/\rho, \quad p_1(0) = p_0 = p(\rho_0), \quad \rho(0) = \rho_0$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho^* = 0$) из (3.25) получим

$$\frac{dp_1}{dr_*} = \frac{2E\theta(r_*^3 - a^3)}{r_* \{ (1-2\nu) 2r_*^3 + a^3(1+\nu) \}} - \frac{2[\sigma_\varphi]_1^2}{r_*} \quad (3.26)$$

Отсюда будем иметь

$$p_1 = p_0 - 2 \ln \left(\frac{r_*}{a} \right) \left\{ \frac{E\theta}{1+\nu} + [\sigma_\varphi]_1^2 \right\} - \frac{E\theta(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \ln \frac{2r_*^3(1-2\nu) + a^3(1+\nu)}{3a^3(1-\nu)}$$

Рассмотрим для определенности случай уменьшения удельного объема при отверждении ($e(\alpha) < 0$). Коэффициент при $\ln(r_*/a)$ в (3.27) представим по (3.7) в виде

$$-4 \int_1^2 \{ G(2) - G(\alpha) \} \frac{e(\alpha)(1+\nu(\alpha))}{1-\nu(\alpha)} d\alpha, \quad G(\alpha) = \frac{E(\alpha)}{2(1+\nu(\alpha))} \quad (3.28)$$

где $G(\alpha)$ — модуль сдвига. При условии, что состояние 2 обладает большей жесткостью на сдвиг, чем промежуточные состояния с $\alpha \in (1, 2)$, выражение (3.28) положительно, а следовательно, $p_1 \rightarrow -\infty$ при $r_* \rightarrow 0$. Поскольку по (3.26) $dp_1/dt > 0$ при $t=0$, то давление p_1 вначале возрастает, а затем, достигнув максимума, начинает убывать и становится отрицательным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турусов Р. А., Давтян С. П., Шкадинский К. Г., Розенберг Б. А., Андреевская Г. Д., Ениколопян Н. С. Механические явления в условиях распространения фронта отверждения. — Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 97–99.
2. Турусов Р. А., Розенберг Б. А., Ениколопян Н. С. О формировании напряжений и разрывов в процессе фронтального отверждения. — Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 1, с. 90–94.
3. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. Харлаб В. Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела. — Сб. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1966, вып. 49, с. 93–119.
5. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783–789.
6. Тринчер В. К. О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 119–124.
7. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 142–152.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М. Наука, 1983. 528 с.
9. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высш. школа, 1983. 399 с.
10. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
11. Арутюнян Н. Х. К теории ползучести неоднородно-стареющих тел. — Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 5, с. 1077–1079.

Москва

Поступила в редакцию
16.I.1985