

УДК 531.383

РАСКРУТКА НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

КУДИН С. Ф., МАРТЫНЕНКО Ю. Г.

Анализ движения твердого тела в сопротивляющейся среде проводился в [1-3]. В публикуемой статье рассматривается движение относительно центра масс симметричного твердого тела при наличии сопротивляющейся среды и активного вращающего момента, обеспечивающего постоянство угловой скорости вращения ротора. Момент сил сопротивления предполагается линейной функцией угловой скорости тела, а активный момент возникает в результате действия на проводник однородного вращающегося магнитного поля, создаваемого системой раскрутки ротора гироскопа, аналогично статору асинхронного электродвигателя.

Исследуются линейные уравнения малых колебаний оси динамической симметрии ротора вблизи оси вращения поля. Получены условия устойчивости стационарных вращений гироскопа как в нерезонансном случае, так и в случае резонанса, когда путационная частота ротора равна угловой скорости вращения поля.

В случае быстрых вращений анализируется упрощенная система уравнений для медленных движений, полученная после осреднения по движению Эйлера — Пуансо.

1. Рассмотрим гироскоп с неконтактным подвесом, ротор которого представляет собой динамически симметричное твердое тело, и предположим, что движение центра масс ротора не влияет на его угловое движение.

Введем правые ортогональные трехгранники $\xi_1\xi_2\xi_3$ и $x_1x_2x_3$ с началом в центре масс ротора O . Оси трехгранника ξ движутся поступательно, а оси x_i ($i=1, 2, 3$) направлены по главным осям инерции ротора, причем ось x_3 является осью динамической симметрии ротора.

Следуя [1], считаем, что момент сил сопротивления пропорционален угловой скорости ротора

$$N_x = -B\Omega_x \quad (1.1)$$

Здесь Ω — вектор абсолютной угловой скорости ротора, $B = \text{diag}\{\beta_1', \beta_1', \beta_3'\}$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят положительные числа β_i ($i=1, 3$), постоянные в трехграннике x ; нижний индекс $x, \xi \dots$ у вектора a означает, что данный вектор записан в проекциях на оси соответствующего трехгранника.

Гироскоп, вращающийся в сопротивляющейся среде, частью увлекает ее за собой, его кинетическая энергия непрерывно рассеивается и угловая скорость убывает. Для поддержания постоянства угловой скорости вращения ротора момент сопротивления должен уравниваться активным вращающим моментом, получаемым от системы раскрутки.

Предположим, что магнитное поле, создаваемое обмотками системы раскрутки, является однородным и направим ось ξ_3 коллинеарно оси вращения магнитного поля. Тогда проекции H_{ξ_i} ($i=1, 2, 3$) вектора напряженности магнитного поля на оси трехгранника ξ имеют вид $H_{\xi_1} = H \sin \delta \cos \omega_0 t$, $H_{\xi_2} = H \sin \delta \sin \omega_0 t$, $H_{\xi_3} = H \cos \delta$. Здесь H — модуль вектора напряженности, δ — угол между вектором H и осью ξ_3 вращения поля, ω_0 — частота вращения поля, t — время.

В случае, когда материал ротора имеет магнитную проницаемость, равную единице, а глубина проникновения поля в проводник много больше

размеров ротора, выражение для момента сил, возникающих при взаимодействии вихревых токов, индуцированных в теле, с внешним магнитным полем, определяется формулой [4]:

$$\mathbf{M}_x = -(A d\mathbf{H}_x/dt) \times \mathbf{H}_x \quad (1.2)$$

Здесь A — симметричный, положительно-определенный тензор поляризуемости, зависящий от формы ротора.

Как показано в [4], тензор поляризуемости может быть вычислен как разность между тензором инерции тела и тензором присоединенных моментов инерции. Если материал ротора однороден, то согласно [4] в главных осях тензора инерции тензор поляризуемости диагонален. Тогда в (1.2) $A = \text{diag}\{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\}$, α_i' и α_3' — коэффициенты поляризуемости относительно осей x_1 , x_2 и x_3 соответственно.

Из теоремы об изменении кинетического момента ротора с учетом (1.1) и (1.2) имеем

$$d\mathbf{L}_x/dt + \mathbf{\Omega}_x \sim \mathbf{L}_x = -(A d\mathbf{H}_x/dt) \times \mathbf{H}_x - B \mathbf{\Omega}_x \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{L}$ — вектор кинетического момента ротора. Если $\mathbf{a} = \|a_1, a_2, a_3\|$, то

$$\mathbf{a} \sim = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & -a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Уравнение (1.3) в проекциях на оси трехгранника ξ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}_\xi}{d\tau} = & \alpha_1 \Gamma^T h \sim h \sim \Gamma \left[\frac{\mathbf{l}_\xi}{I_1} + \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) \gamma \gamma^T \mathbf{l}_\xi - \xi_3 \right] + \\ & + (\alpha_3 - \alpha_1) \Gamma^T h \sim \Gamma \gamma \gamma^T \Gamma^T h \sim \Gamma \left(\frac{\mathbf{l}_\xi}{I_1} - \xi_3 \right) - \frac{\beta_1}{I_1} \mathbf{l}_\xi + \left(\frac{\beta_1}{I_1} - \frac{\beta_3}{I_3} \right) \gamma \gamma^T \mathbf{l}_\xi \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{vmatrix} \sin \delta \\ 0 \\ \cos \delta \end{vmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$$

γ_i — косинус угла между осью симметрии тела и осью ξ_i , $\mathbf{l}_\xi = \mathbf{L}_\xi/\omega_0$, $\tau = \omega_0 t$, I_1 — момент инерции ротора относительно экваториальных осей x_1 , x_2 , I_3 — момент инерции тела относительно оси симметрии x_3 . Через α_i и β_i обозначены, соответственно, величины $\alpha_i' H^2/\omega_0$ и β_i'/ω_0 . Индекс T означает транспонирование.

Вектор γ удовлетворяет кинематическому уравнению Пуассона

$$d\gamma/d\tau = (1/I_1) \mathbf{l}_\xi \sim \gamma \quad (1.5)$$

Таким образом, при сделанных допущениях движение ротора гироскопа описывается замкнутой системой уравнений (1.4), (1.5). Чтобы исключить время из правых частей неавтономного уравнения (1.4), перейдем во вращающуюся вместе с полем систему координат при помощи замены

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Pi} \mathbf{l}_\xi, \quad \mathbf{y} = \mathbf{\Gamma} \gamma \quad (1.6)$$

После подстановки (1.6) в (1.4), (1.5) и соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{z}/d\tau = & -\xi_3 \sim \mathbf{z} + \alpha_1 h \sim h \sim [\mathbf{z}/I_1 + (1/I_3 - 1/I_1) \mathbf{y} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \xi_3] + \\ & + (\alpha_3 - \alpha_1) h \sim \mathbf{y} \mathbf{y}^T h \sim (\mathbf{z}/I_1 - \xi_3) - (\beta_1/I_1) \mathbf{z} + (\beta_1/I_1 - \beta_3/I_3) \mathbf{y} \mathbf{y}^T \mathbf{z} \quad (1.7) \end{aligned}$$

$$d\mathbf{y}/d\tau = -\xi_3 \sim \mathbf{y} + \mathbf{z} \sim \mathbf{y}/I_1 \quad (1.8)$$

Здесь $\mathbf{z} = \|z_1, z_2, z_3\|^T$, $\mathbf{y} = \|y_1, y_2, y_3\|$; z_i , y_i — проекции, соответственно, векторов кинетического момента гироскопа и единичного вектора γ на оси вращающейся вместе с магнитным полем системы координат.

2. Будем искать частное решение уравнений (1.7), (1.8), вида

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = z_0, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad y_3 = 1 \quad (2.1)$$

которое соответствует стационарному вращению ротора вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с осью ξ_3 .

После подстановки указанного частного решения в уравнения (1.7), (1.8) получим

$$\delta = \pi/2, \quad z_0 = I_3 \alpha_1 / (\alpha_1 + \beta_3) \quad (2.2)$$

т. е. рассматриваемый стационарный режим возможен только в чисто вращающемся магнитном поле, когда постоянная компонента поля по оси ξ_3 отсутствует.

Выпишем уравнения (1.7), (1.8) в скалярной форме при $\delta = \pi/2$:

$$\begin{aligned} z_1 \dot{} &= -\frac{\beta_1}{I_1} z_1 + z_2 + \left(\frac{\beta_1}{I_1} - \frac{\beta_3}{I_3} \right) y_1 \sum_{k=1}^3 z_k y_k \\ z_2 \dot{} &= -z_1 - \frac{\alpha_1}{I_1} z_2 - \left(\frac{\alpha_1}{I_3} - \frac{\alpha_1}{I_1} \right) y_2 \sum_{k=1}^3 z_k y_k + \\ &+ (\alpha_3 - \alpha_1) \left(\frac{z_3 y_2 - z_2 y_3}{I_1} - y_2 \right) y_3 - \frac{\beta_1}{I_1} z_2 + \left(\frac{\beta_1}{I_1} - \frac{\beta_3}{I_3} \right) y_2 \sum_{k=1}^3 z_k y_k \quad (2.3) \\ z_3 \dot{} &= -\frac{\alpha_1}{I_1} z_3 - \left(\frac{\alpha_1}{I_3} - \frac{\alpha_1}{I_1} \right) y_3 \sum_{k=1}^3 z_k y_k + \\ &+ \alpha_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) \left(\frac{z_3 y_2 - z_2 y_3}{I_1} + y_2 \right) y_2 - \frac{\beta_1}{I_1} z_3 + \left(\frac{\beta_1}{I_1} - \frac{\beta_3}{I_3} \right) y_3 \sum_{k=1}^3 z_k y_k \\ y_1 \dot{} &= y_2 + (z_2 y_3 - z_3 y_2) / I_1 \\ y_2 \dot{} &= -y_1 + (z_3 y_1 - z_1 y_3) / I_1 \\ y_3 \dot{} &= (z_1 y_2 - z_2 y_1) / I_1 \end{aligned}$$

Для изучения вопроса об устойчивости решения (2.1) воспользуемся уравнениями первого приближения.

Оставляя за возмущениями по переменным z_i , y_i обозначения, принятые для самих переменных, и исключая при помощи тривиального интеграла $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ из системы (2.3) переменную y_3 , получим уравнения в вариациях в окрестности стационарного решения (2.1):

$$\begin{aligned} z_1 \dot{} &= -\frac{\beta_1}{I_1} z_1 + z_2 + z_0 \left(\frac{\beta_1}{I_1} - \frac{\beta_3}{I_3} \right) y_1, \quad z_2 \dot{} = -z_1 - \frac{\alpha_3 + \beta_1}{I_1} z_2 + \\ &+ \left[\left(\frac{\alpha_3 + \beta_1}{I_1} - \frac{\alpha_1 + \beta_3}{I_3} \right) z_0 + (\alpha_1 - \alpha_3) \right] y_2, \quad z_3 \dot{} = -\frac{\alpha_1 + \beta_3}{I_3} z_3 \\ \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 &= 0 \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\omega = 1 - z_0 / I_1 = 1 - \nu / \omega_0 = 1 - I_3 \Omega / (I_1 \omega_0)$$

Здесь ω — относительная расстройка между частотой ν нутационных колебаний ротора и частотой ω_0 вращения поля, $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$.

Третье уравнение системы (2.4) интегрируется независимо от остальных уравнений, поэтому задача об устойчивости сводится к исследованию корней алгебраического уравнения четвертой степени

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\alpha_3}{I_1} + 2 \frac{\beta_1}{I_1}, \quad a_2 = 1 + \omega^2 + \frac{\beta_1(\alpha_3 + \beta_1)}{I_1^2} \\
a_3 &= a_1 \omega^2 + (P + Q)(\omega + 1), \quad a_4 = \left[\frac{\beta_1(\alpha_3 + \beta_1)}{I_1^2} + 1 \right] \omega^2 + \\
&+ \left(\frac{\beta_1}{I_1} Q + \frac{\alpha_3 + \beta_1}{I_1} P \right) + PQ, \quad P = \frac{z_0}{I_1} \left(\frac{\beta_1}{I_1} - \frac{\beta_3}{I_3} \right) \\
Q &= \frac{z_0}{I_1} \left(\frac{\alpha_3 + \beta_1}{I_1} - \frac{\alpha_1 + \beta_3}{I_3} \right) + \frac{\alpha_1}{I_1} - \frac{\alpha_3}{I_1}
\end{aligned} \quad (2.6)$$

В случае отсутствия сопротивления среды ($\beta_1 = \beta_3 = 0$) уравнение (2.5) принимает вид

$$\lambda^4 + \frac{\alpha_3}{I_1} \lambda^3 + (1 + \omega^2) \lambda^2 - \frac{\alpha_3}{I_1} \omega \lambda + \omega^2 = 0 \quad (2.7)$$

Здесь $\omega = 1 - I_3/I_1$. Угловая скорость ротора при этом равна частоте вращения поля. Условие устойчивости в данном случае имеет вид $\omega < 0$, т. е. эллипсоид инерции тела должен быть сплюснутым. Отметим, что с точностью до обозначений уравнение (2.7) совпадает с уравнением (3.7) работы [5], где исследовалось движение в однородном магнитном поле симметричного твердого тела с шаровым тензором поляризуемости. После замены $z = \lambda - \omega/\lambda$ уравнение (2.7) приводится к квадратному уравнению, что позволяет найти корни (2.7) в явном виде [5].

Пусть $\beta_1 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$. Рассмотрим случай $\omega = 0$, который отвечает резонансу 1:1 между частотой нутационных колебаний ротора $\nu = I_3 \Omega/I_1$ и частотой вращения поля ω_0 . Отметим, что рассматриваемый резонанс может существовать только для роторов со сплюснутым эллипсоидом инерции, так как $I_3/I_1 = (\alpha_1 + \beta_3)/\alpha_1 = 1 + \beta_3/\alpha_1 > 1$.

Учитывая, что при $\omega = 0$ справедливо равенство $\alpha_1/I_1 = \alpha_1/I_3 + \beta_3/I_3$, характеристическое уравнение (2.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 + (\alpha_3/I_1 + 2\beta_1/I_1) \lambda^3 + [1 + \beta_1(\alpha_3 + \beta_1)/I_1^2] \lambda^2 + \\
&+ (\beta_1/I_1 + P) \lambda + \beta_1 P/I_1 = 0
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Применив к уравнению (2.8) критерий Гурвица, получим, что для того, чтобы корни (2.8) лежали в левой полуплоскости, необходимо и достаточно выполнения условия $P > 0$.

Таким образом, условие устойчивости стационарного вращения в резонансном случае имеет вид

$$\beta_1/I_1 > \beta_3/I_3 \quad (2.9)$$

Неравенство (2.9) с точностью до обозначений совпадает с известным условием, полученным в [1], для устойчивого вращения гироскопа в сопротивляющейся среде.

Наконец, рассмотрим случай $\omega \neq 0$. Ограничимся малыми возмущениями, когда α_i/I , $\beta_i/I \sim \varepsilon$ ($I = \max\{I_1, I_3\}$). Тогда с точностью до величин порядка ε^2 корни уравнения (2.5) равны (i — мнимая единица)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1(\omega - 1) + P + Q}{2(\omega - 1)} \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \frac{P + Q}{2(\omega - 1)} \pm i\omega \quad (2.10)$$

Так как $a_1(\omega - 1) + P + Q < 0$, то корни λ_1 и λ_2 всегда лежат в левой полуплоскости. Поэтому, чтобы числа (2.10) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$P + Q > 0 \quad (2.11)$$

Подставляя в неравенство (2.14) вместо P и Q их выражения из (2.6), после преобразований приведем (2.11) к виду

$$[\alpha_1\alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_3)\beta_3]/[\alpha_1(\alpha_3 + 2\beta_1)] < I_3/I_1 \quad (2.12)$$

Следовательно, при достаточно малых ε и $\omega \neq 0$ условием устойчивости стационарного решения (2.1) будет неравенство (2.12).

Сравним условие (2.12) с условием устойчивости на резонансе (2.9). В резонансном случае $I_3/I_1 = 1 + \beta_3/\alpha_1$ и (2.9) эквивалентно условию $1 + \beta_3/\alpha_1 > \beta_3/\beta_1$. Неравенство (2.12) после соответствующих преобразований приводится к виду $1 + \beta_3/\alpha_1 > 1/2(\beta_3/\beta_1)$. Последнее условие слабее условия Булгакова (2.9), т. е. при резонансе магнитное поле «исчезает» из условий устойчивости и демпфирование колебаний оси гироскопа происходит только за счет сопротивления среды, в которой он находится.

Конечно, сказанное относится к резонансу или режимам, близким к резонансному. В противном случае магнитное поле может оказывать дестабилизирующее воздействие и приводить к потере устойчивости. Действительно, для гироскопа с параметрами $\alpha_1=1$, $\alpha_3=2$, $\beta_1=\beta_3=1$ условие устойчивости (2.9) принимает вид $I_3/I_1 > 1$, а неравенство (2.12) сводится к требованию $I_3/I_1 > 1,25$. Следовательно, гироскопы, для которых выполняется соотношение $1 < I_3/I_1 < 1,25$, будут устойчивы в сопротивляющейся среде, но при внесении в магнитное поле определенной напряженности потеряют устойчивость.

В заключение заметим, что при $\alpha_1=1$, $\alpha_3=2$ и $\beta_1=\beta_3=1$ рассмотренный выше резонанс не может быть реализован, так как отношение $I_3/I_1 = 1 + \beta_3/\alpha_1$ в этом случае оказывается равным двум, что невозможно для реальных тел.

3. Перейдем к построению и исследованию осредненных уравнений, описывающих эволюцию медленных переменных задачи в случае быстрых вращений гироскопа, когда кинетическая энергия ротора велика по сравнению с моментом сопротивления и активным вращающим моментом, которые предполагаются величинами одного порядка малости ε . Для реальных конструкций $\varepsilon \sim 10^{-4} - 10^{-6}$.

Пусть $\eta_1\eta_2\eta_3$ — правый ортогональный трехгранник с началом в точке O . Ось η_3 направим по вектору кинетического момента ротора, ось η_2 лежит в плоскости $\xi_1\xi_2$. Пусть ρ — угол между осями ξ_3 и η_3 , σ — угол между плоскостями $\xi_1\xi_3$ и $\eta_1\xi_3$, $l=L/(I_1\omega_0)$ — нормализованный кинетический момент ротора. Углы ψ и θ суть углы Эйлера, определяющие ориентацию трехгранника η относительно трехгранника ξ .

Невозмущенное движение, когда момент внешних сил отсутствует, является регулярной прецессией в случае Эйлера — Пуансо $\rho=\rho^0$, $\sigma=\sigma^0$, $l=l^0$, $\theta=\theta^0$, $\psi=l^0\tau+\psi^0$.

Осреднение уравнений для медленных переменных проведем по быстрой переменной ψ и времени τ вдоль траекторий невозмущенного движения.

Используя процедуру общей схемы осреднения [6] и сохраняя для медленных осредненных переменных их прежние обозначения, после соответствующих вычислений получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & - \left\{ \left(1 - \frac{3}{2}s \right) \left(\frac{\alpha_1}{I_3} \cos^2 \theta + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2I_1} \sin^2 \theta \right) \cos \rho + \right. \\ & \left. + (1/2) \omega_0 s / L [\alpha_1 + \alpha_3 + 1/2(\alpha_1 - \alpha_3) \sin^2 \theta] \right\} \sin \rho \\ L = & - L \left(\frac{\alpha_1}{I_3} \cos^2 \theta + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2I_1} \sin^2 \theta \right) \left[\frac{s}{2} (1 + \cos^2 \rho) + (1-s) \sin^2 \rho \right] + \\ & + (\alpha_1 + \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_3 \sin^2 \theta) \frac{\omega_0 s}{2} \cos \rho - L \left(\frac{\beta_1}{I_1} \sin^2 \theta + \frac{\beta_3}{I_3} \cos^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\theta' = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{I_3} - \frac{\alpha_3}{I_1} \right) + \left(\frac{\alpha_1}{I_3} + \frac{\alpha_3}{I_1} - 2 \frac{\alpha_1}{I_1} \right) \left[\frac{s}{2} \sin^2 \rho + (1-s) \cos^2 \rho \right] + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{L} \omega_0 s \cos \rho \right\} - (\beta_1/I_1 - \beta_3/I_3) \sin \theta \cos \theta$$

Здесь $s = \sin^2 \delta$; точкой обозначено дифференцирование по t . Как показано в [6], в нерезонансном случае решение осредненных уравнений (3.1) отличается от точного решения полной системы уравнений на величины порядка ε на временах порядка $1/\varepsilon$.

Отметим также, что в первом приближении уравнение для переменной σ имеет вид $\sigma = \text{const}$. Это означает, что вектор кинетического момента совершает движение в плоскости, проведенной через ось вращения поля и начальное положение вектора кинетического момента.

Будем искать особые точки системы (3.1) при условии, что вектор кинетического момента совмещен с осью вращения магнитного поля ($\rho = 0$).

Подставляя $\rho = 0$ в уравнения (3.1), получим

$$L' = -AL - BL \sin^2 \theta + C \sin^2 \theta + D$$

$$\theta' = \sin \theta \cos \theta (E + C/L) \quad (3.2)$$

$$A = \frac{\alpha_1 s}{I_3} + \frac{\beta_3}{I_3} > 0, \quad C = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} s \omega_0$$

$$D = \alpha_1 s \omega_0, \quad B = \left(\frac{\beta_1}{I_1} - \frac{\beta_3}{I_3} \right) + s \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2I_1} + \frac{\alpha_1}{I_3} \right)$$

$$E = \left(\frac{\alpha_1}{I_3} - \frac{\alpha_1}{I_1} \right) + \left(\frac{\beta_3}{I_3} - \frac{\beta_1}{I_1} \right) + \left(\frac{\alpha_1}{I_1} - \frac{\alpha_1}{2I_3} - \frac{\alpha_3}{2I_1} \right) s \quad (3.3)$$

Приравняв правые части (3.2) нулю, найдем следующие особые точки:

$$\sin \theta_0 = 0, \quad L_0 = D/A \quad (3.4)$$

$$\sin^2 \theta_0 = -(AC + DE)/(C(B + E)) < 1, \quad L_0 = -C/E \quad (3.5)$$

$$\cos \theta_0 = 0, \quad L_0 = (C + D)/(A + B) \quad (3.6)$$

Соответствующие движения тела, в зависимости от положения его оси симметрии, назовем в случае (3.4) вращением вокруг полярной оси, в случае (3.6) — вращением вокруг экваториальной оси, в случае (3.5) — регулярной прецессией.

В отличие от решений (3.4), (3.6) решение (3.5) не всегда существует. Для его существования требуется выполнение условий

$$0 < -(AC + DE)/(C(B + E)), \quad -C/E > 0 \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что $C \neq 0$. Значит, в случае $C = 0$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2$ или $s = 0$, регулярная прецессия неосуществима.

Второе из неравенств (3.7) вытекает из первого, в чем легко убедиться рассмотрев случаи $C < 0$, $C > 0$. Следовательно, условие существования регулярной прецессии определяется соотношением $0 < -(AC + DE)/(C(B + E)) < 1$, которое, в свою очередь, эквивалентно совокупности двух систем неравенств

$$AC + DE > 0, \quad AC + DE + EC + BC < 0 \quad (3.8)$$

$$AC + DE < 0, \quad AC + DE + BC + EC > 0 \quad (3.9)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости полученных стационарных движений ротора, соответствующих найденным особым точкам, по отноше-

нию к переменным ρ , L , θ . За возмущениями сохраним те же обозначения.

Система в вариациях, отвечающая вращению вокруг полярной оси (3.4), имеет вид

$$\dot{\rho} = - \left[\left(1 - \frac{3}{2} s \right) \frac{\alpha_1}{I_3} + \frac{\omega_0 s (\alpha_1 + \alpha_3)}{2L_0} \right] \rho \quad (3.10)$$

$$L' = -AL, \quad \theta' = (E + C/L_0)\theta$$

Условия отрицательности действительных частей корней характеристического многочлена для системы (3.10) сводятся к неравенствам

$$(1 - \frac{3}{2}s)\alpha_1/I_3 + (\frac{1}{2}\omega_0 s/L_0)(\alpha_1 + \alpha_3) > 0 \quad (3.11)$$

$$E + C/L_0 < 0 \quad (3.12)$$

Непосредственной подстановкой в (3.11) выражений для L_0 , A , D из (3.3), (3.4) можно установить, что неравенство (3.11) выполняется тождественно.

Подставляя в (3.12) вместо L_0 выражение D/A , получим $AC + DE < 0$ или в развернутом виде

$$\frac{\alpha_1 [\alpha_3 s + 2(1-s)\alpha_1] + (\alpha_3 + \alpha_1)\beta_3}{\alpha_1 [\alpha_3 s + 2(1-s)\alpha_1] + 2\alpha_1\beta_1} < \frac{I_3}{I_1} \quad (3.13)$$

Неравенство (3.13) является условием устойчивости вращения вокруг полярной оси. В частности, если положить $s=1$, т. е. $\delta=\pi/2$, то из (3.13) вытекает неравенство (2.12), полученное в качестве условия устойчивости вращения вокруг оси симметрии ротора в нерезонансном случае.

Система в вариациях в случае регулярной прецессии (3.5) имеет вид $\dot{\rho} = -F\rho$, $L' = -(A + B \sin^2 \theta_0)L + [C - L_0 B \sin 2\theta_0]\theta$, $\theta' = -\frac{1}{2}C \sin 2\theta_0 L/L_0^2$ (3.14)

$$F = \left(1 - \frac{3}{2} s \right) \left(\frac{\alpha_1}{I_3} \cos^2 \theta_0 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2I_1} \sin^2 \theta_0 \right) + \frac{\omega_0 s}{2L_0} \left[\alpha_1 + \alpha_3 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)}{2} \sin^2 \theta_0 \right]$$

Выписывая характеристическое уравнение для (3.14), получим

$$(\lambda + F) [\lambda^2 + (A + B \sin^2 \theta_0)\lambda + (C(C - L_0 B)/L_0^2) \sin^2 2\theta_0] = 0 \quad (3.15)$$

Корни уравнения (3.15) будут иметь отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда выполнены требования

$$F > 0, \quad A + B \sin^2 \theta_0 > 0, \quad (C(C - L_0 B)/L_0^2) \sin^2 2\theta_0 > 0 \quad (3.16)$$

Можно показать, что два последних из неравенств (3.16) эквивалентны системе неравенств (3.8) и из неравенств (3.8) как следствие вытекает неравенство $F > 0$.

Условия устойчивости (3.8) являются, в частности, и условиями существования регулярной прецессии. Обратное, вообще говоря, неверно, так как режим регулярной прецессии может осуществляться и при выполнении (3.9), но движение в этом случае будет неустойчивым.

Систему (3.8) можно представить в виде двойного неравенства

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1} \frac{\alpha_1(2-s) + 2\beta_3}{(\alpha_1 + \alpha_3)(2-s) + 4\beta_1} < \frac{I_3}{I_1} < \frac{\alpha_1 [\alpha_3 s + 2(1-s)\alpha_1] + (\alpha_1 + \alpha_3)\beta^3}{\alpha_1 [\alpha_3 s + 2(1-s)\alpha_1] + 2\alpha_1\beta_1} \quad (3.17)$$

Наконец, выпишем систему в вариациях в окрестности особой точки (3.6), соответствующей вращению вокруг экваториальной оси

$$\rho' = - \left[\left(1 - \frac{3}{2} s \right) \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2I_1} + \frac{\omega_0 s (\alpha_3 + 3\alpha_1)}{4L_0} \right] \rho \quad (3.18)$$

$$L' = -(A+B)L, \quad \theta' = -(E+C/L_0)\theta$$

Неравенства

$$\left(1 - \frac{3}{2} s \right) \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2I_1} + \frac{\omega_0 s}{4L_0} (\alpha_3 + 3\alpha_1) > 0 \quad (3.19)$$

$$E+C/L_0 > 0$$

являются условиями устойчивости стационарного вращения вокруг экваториальной оси ротора гироскопа.

Подставив в первое неравенство (3.19) выражения для L_0 , A , B , C , D из (3.6), (3.3), можно убедиться, что оно всегда выполняется.

С учетом того, что $L_0 = (C+D)/(A+B)$, второе неравенство (3.19) можно записать в следующей форме: $AC+DE+BC+EC > 0$.

После подстановки в это неравенство вместо A , B , C , D , E их выражений из (3.3) получим следующий окончательный вид условия устойчивости вращения ротора вокруг экваториальной оси:

$$\frac{I_3}{I_1} < \frac{\alpha_3 + \alpha_1}{\alpha_1} \frac{\alpha_1 (2-s) + 2\beta_3}{(\alpha_3 + \alpha_1)(2-s) + 4\beta_1}$$

4. Пусть, внешняя поверхность ротора представляет собой сферу ($\beta_1 = \beta_3 = \beta$). Представим выражение (3.17) в виде

$$\frac{px + (1-3/2s)p}{x + (1-3/2s)p} < \frac{I_3}{I_1} < \frac{px + [(1-3/2s) + ps]}{x + [(1-3/2s) + ps]} \quad (4.1)$$

Здесь $x = \beta/\alpha_1$, $p = 1/2(\alpha_3/\alpha_1 + 1)$, $p \neq 1$ (так как $\alpha_1 \neq \alpha_3$).

Введем на плоскости параметров x , I_3/I_1 прямоугольную систему координат (фиг. 1-3). На этой плоскости графики зависимостей

$$I(x) = \frac{px + (1-3/2s)p}{x + (1-3/2s)p}, \quad J(x) = \frac{px + [(1-3/2s) + ps]}{x + [(1-3/2s) + ps]}$$

суть гиперболы.

Для реальных систем $x > 0$. Поскольку при $x=0$ имеем $I(0)=J(0)=1$, то для совместности (4.1) в области $x > 0$ кривая $I(x)$ должна располагаться ниже кривой $J(x)$.

Приводя неравенство $I(x) < J(x)$ к виду $(1-3/2s)(p-1)^2 > 0$ и учитывая, что $p \neq 1$, получим условие непротиворечивости неравенства (4.1) $0 < s < 2/3$.

При $s = 2/3$ обе гиперболы сливаются в одну и рассматриваемая механическая система не допускает движений в виде регулярной прецессии. Если $s > 2/3$, то система может допускать только неустойчивую регулярную прецессию.

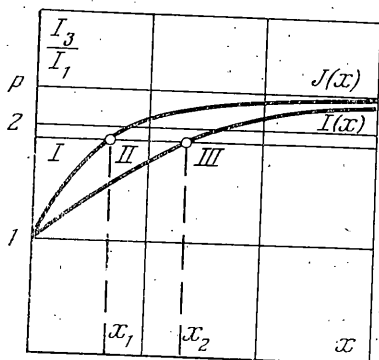
Кривые $J(x)$ и $I(x)$ имеют общую горизонтальную асимптоту $I_3/I_1 = p$. Следовательно, если $p > 1$, то функции $J(x)$ и $I(x)$ возрастают (фиг. 1, 2); если $p < 1$ — убывают (фиг. 3). Условие $I_3/I_1 < 2$, которому удовлетворяет реальное тело, выделяет на плоскости параметров x I_3/I_1 — горизонтальную полосу, которая разбивается гиперболами $J(x)$, $I(x)$ на три области. Причем, область I соответствует устойчивому вращению вокруг полярной оси, область II — устойчивой регулярной прецессии, область III — устойчивому вращению вокруг экваториальной оси.

Если имеет место регулярная прецессия, то угол θ_0 между осями ξ_3 и x_3 находится из равенства

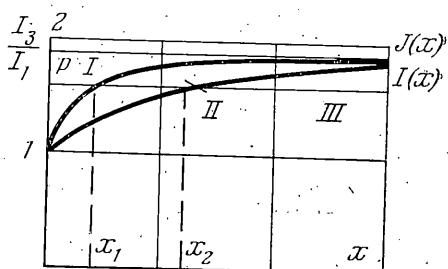
$$\sin^2 \theta_0 = \frac{1}{(p-1)(1-2/3s)} \left\{ \frac{I_1 p - I_3}{I_3 - I_1} x - \left[\left(1 - \frac{3}{2} s \right) + ps \right] \right\} \quad (4.2)$$

Здесь x удовлетворяет неравенству $x_1 < x < x_2$ (фиг. 1-3), причем для граничных значений $x = x_1$ и $x = x_2$ формула (4.2) дает: при $x = x_1$ угол θ_0 равен 0 или π ; при $x = x_2 - \pi/2$.

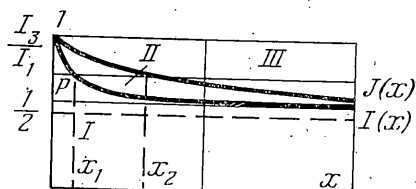
В заключение отметим, что так как $x = \beta/\alpha_1$, то с ростом H значения x убывают, а с уменьшением H — возрастают. Поэтому выбором величины H напряженности магнитного поля при постоянных значениях остальных параметров всегда можно



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

добиться того, чтобы для x выполнялось условие $x_1 < x < x_2$ и, следовательно, существовала регулярная прецессия.

Пусть, например, отношение моментов инерции ротора $I_3/I_1 = s/3$, коэффициенты поляризуемости удовлетворяют соотношению $1/3\alpha_3 = \alpha_1$ и $\delta = \pi/4$, т. е. $s = 1/2$. Тогда имеет место ситуация, изображенная на фиг. 2 ($p=2$). При этом $x_1 = 2,5$, $x_2 = 3$. Устойчивая регулярная прецессия осуществима для таких значений H , при которых справедливо неравенство $2,5 < x < 3$. Если значение x лежит в этом промежутке, то угол θ_0 отклонения оси симметрии ротора от направления оси ξ_3 найдется из равенства $\sin^2 \theta_0 = 2x - 5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков В. В. Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 401 с.
2. Лещенко Д. Д. О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо-сопротивляющейся среде. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 3, с. 89–94.
3. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 5–13.
4. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г. Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 5, с. 1070–1073.
5. Мартыненко Ю. Г. Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5, с. 35–40.
6. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию:
13.IV.1984