МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1985

УДК 539.376

НАРАЩИВАНИЕ СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

АРУТЮНЯН Н. Х., ДРОЗДОВ А. Д.

Исследуется напряженно-деформированное состояние в растущих вязкоупругих телах, подверженных старению, при фазовом переходе первого рода твердое тело – жидкость. Характерной особенностью задач наращивания в условиях фазового перехода является то, что элементы растущего твердого тела не добавляются извне, а зарождаются из жидкого агрегатного состояния. Решены задачи наращивания линейных и нелинейных несжимаемых вязкоупругих тел при заданном законе смещения фазовой границы. Изучена связанная задача наращивания, в которой закон смещения границы раздела фаз заранее не задан, а определяется величиной переданной телу тепловой энергии.

1. Постановка задачи. Пусть T_0 – температура фазового перехода при отсутствии напряжений. До деформации тело D находится в естественном состоянии [1] при температуре T_0 и занимает область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Материал тела может находиться в двух агрегатных состояниях – твердом и жидком. Для определенности примем, что в недеформированном состоянии вещество находится в жидкой фазе. В момент времени $t=0$ к телу прикладываются внешние усилия. Часть материала переходит в твердое агрегатное состояние. В момент времени $t>0$ вещество в твердой фазе занимает область $\Omega_1(t)$, а в жидкой фазе – область $\Omega_2(t)=\Omega\backslash\Omega_1(t)$. Области $\Omega_l(t)$ связны и разделены кусочно-гладкой границей $\Gamma(t)$, которая не пересекается с $\partial\Omega$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в теле D.

Предполагается, что деформации тела D малы, а внешняя нагрузка изменяется достаточно медленно, так что силами инерции можно пренебречь.

При исследовании задачи возможны два подхода. Согласно первому из них, положение границы раздела фаз Γ и температура T заданы в любой момент времени $t>0$, а неизвестными являются только напряжения и деформации в теле D. При втором подходе поверхность Γ заранее неизвестна и определяется в ходе решения задачи при заданном внешнем притоке тепловой энергии к телу. Ниже будут рассмотрены оба подхода.

2. Определяющие соотношения. Введем в области Ω систему координат $\xi_1\xi_2\xi_3$. Обозначим через g_i° базисные векторы лагранжевой системы координат, а через g_{ij}° – компоненты метрического тензора в недеформированном состоянии. Базисные векторы и компоненты метрического тензора в естественном состоянии вещества в твердой и жидкой фазах при температуре T обозначим $g_i^{1*}(T)$, $g_i^{2*}(T)$, $g_{ij}^{1*}(T)$, $g_{ij}^{2*}(T)$. Положим $g_i^{l\circ}=g_i^{l*}(T_0)$, $g_{ij}^{l\circ}=g_{ij}^{l*}(T_0)$. Если в недеформированном состоянии вещество находится в жидкой фазе, то $g_i^{2\circ}=g_i^\circ$, $g_{ij}^{2\circ}=g_{ij}^\circ$.

В изотропном материале при малых отклонениях температуры от значения T_0 справедливы равенства $g_i^{l*}=[1+\alpha_l(T-T_0)]g_i^{l\circ}$, $g_{ij}^{l*}=[1+2\alpha_l\times\times(T-T_0)]g_{ij}^{l\circ}$, где α_1, α_2 – линейные коэффициенты теплового расширения. При фазовом переходе первого рода в момент фазового превращения происходит скачок плотности вещества. Для изотропного фазового перехода положим $g_i^{10}=(1+\lambda)g_i^{20}$, $g_{ij}^{10}=(1+2\lambda)g_{ij}^{20}$, где λ — коэффициент линейного удлинения при переходе из жидкого агрегатного состояния в твердое. В общем случае величину λ можно считать функцией давления в жидкости в момент фазового перехода.

Обозначим через u_i компоненты вектора перемещения, а через ε_{ij} — компоненты тензора деформаций в базисе недеформированной конфигурации

$$\varepsilon_{ij}=(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i)/2 \tag{2.1}$$

где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования в базисе g_i°.

Обозначим через ε_{ij}^1, ε_{ij}^2 компоненты тензора деформаций в твердой и жидкой фазах: $\varepsilon_{ij}^l=(g_{ij}-g_{ij}^{l*}(T))/2$, где g_{ij} — компоненты метрического тензора в актуальной конфигурации. Пусть ε^l, ε — шаровые составляющие тензоров ε_{ij}^l, ε_{ij}, а e_{ij}^l, e_{ij} — компоненты девиаторов этих тензоров

$$\begin{gathered}\varepsilon^1=\varepsilon-3[\lambda+\alpha_1(T-T_0)], \quad \varepsilon^2=\varepsilon-3\alpha_2(T-T_0)\\ e_{ij}^1=e_{ij}^2=e_{ij}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Условие несжимаемости материала в твердой и жидкой фазах имеет вид

$$\varepsilon^1=\varepsilon^2=0 \tag{2.3}$$

При отсутствии массовых сил компоненты тензора напряжений σ^{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\nabla_i\sigma^{ij}=0 \tag{2.4}$$

Обозначим через $\tau_0(\xi)$ момент зарождения материала в твердой фазе в окрестности точки $\xi=(\xi_i)$. Пусть σ — шаровая составляющая, а s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений. Уравнения состояния несжимаемого линейно вязкоупругого материала имеют вид [2]:

$$\sigma=-3p_1, \quad s_{ij}=2G(I-L)e_{ij} \tag{2.5}$$

$$Ie=e(t,\xi), \quad Le=\int\limits_{\tau_0(\xi)}^{t} l(t-\tau_0(\xi),\ \tau-\tau_0(\xi))\,e(\tau,\xi)\,d\tau$$

Здесь G — постоянный модуль сдвига, p_1 — давление, I — единичный оператор, L — оператор релаксации с ядром $l(t,\tau)$.

В несжимаемой жидкости тензор напряжений является шаровым (p_2 — давление в жидкости):

$$\sigma^{ij}=-p_2 g^{\circ ij} \tag{2.6}$$

На границе раздела фаз равны нормальные перемещения и нормальные напряжения:

$$n_i u_1^i|_\Gamma=n_i u_2^i|_\Gamma, \quad n_i\sigma_1^{ij}|_\Gamma=n_i\sigma_2^{ij}|_\Gamma \tag{2.7}$$

где n_i — компоненты вектора единичной нормали в базисе g_i°.

Пусть на части Γ_1 поверхности $\partial\Omega$ отсутствуют смещения точек тела, а на остальной части $\Gamma_2=\partial\Omega\backslash\Gamma_1$ заданы поверхностные усилия

$$u^i|_{\Gamma_1}=0, \quad n_i\sigma^{ij}|_{\Gamma_2}=f^j \tag{2.8}$$

где f^i — компоненты вектора поверхностных усилий в базисе g_i°.

Если положение границы раздела фаз Γ и температура T заданы, то система уравнений (2.1)—(2.6) с граничными условиями (2.7), (2.8) определяет напряженно-деформированное состояние в теле D.

3. Центрально-симметричная деформация растущего тела. Введем в области Ω сферическую систему координат $r\vartheta\varphi$. Координаты $\xi_1=r$, $\xi_2=\vartheta$, $\xi_3=\varphi$ примем за лагранжевы. Обозначим через $u(t,r)$ радиальную составляющую вектора перемещения. Ненулевые компоненты метрического тензора в недеформированной конфигурации равны $g_{11}^{\circ}=1$, $g_{22}^{\circ}=r^2$, $g_{33}^{\circ}=(r\sin\vartheta)^2$. Ненулевые компоненты тензора ε_{ij} определяются по формулам $\varepsilon_{11}=u'$, $\varepsilon_{22}=ru$, $\varepsilon_{33}=ru\sin\vartheta$, где $u'=\partial u/\partial r$. При этом

$$\begin{gathered}\varepsilon=u'+2u/r, \quad e=u'-u/r, \quad e_{11}=2e/3 \\ e_{22}=-r^2e/3, \quad e_{33}=-(r\sin\vartheta)^2e/3\end{gathered} \tag{3.1}$$

Остальные компоненты девиатора тензора деформаций равны нулю. Обозначим через $\sigma_r=\sigma^{11}$, $\sigma_\vartheta=r^2\sigma^{22}$, $\sigma_\varphi=(r\sin\vartheta)^2\sigma^{33}$ физические компоненты тензора напряжений. Запишем уравнение равновесия элемента тела (2.4)

$$\sigma_r'+2(\sigma_r-\sigma_\vartheta)/r=0 \tag{3.2}$$

При центрально-симметричной деформации граница раздела фаз Γ является сферой радиуса $a(t)$. Перейдем к решению конкретных задач в случае, когда положение фазовой границы $a(t)$ задано, а температура в актуальном состоянии равна T_0.

1. Рассмотрим шар радиуса a_0 из идеальной несжимаемой жидкости. В момент времени $t=0$ к нему прикладывается внешнее давление интенсивности $p=p(t)$. Часть материала переходит из жидкого агрегатного состояния в твердое, и на поверхности жидкости образуется слой несжимаемого вязкоупругого материала, уравнения состояния которого имеют вид (2.5). Требуется при заданном законе смещения границы раздела фаз $a(t)$, $a(0)=a_0$, $da/dt<0$ определить напряженное состояние в теле.

Согласно (2.6), (3.2), имеем $p_2=p_*(t)$. Положим $\lambda_0=\lambda(p_*(\tau_0(r)))$. Из (2.2), (2.3), (3.1) и граничных условий $u_1(t, a(t))=u_2(t, a(t))$, $u_2(t, 0)=0$ найдем

$$u_1(t,r)=\frac{3}{r^2}\int\limits_{a(t)}^{r}\lambda_0(\rho)\rho^2\,d\rho, \quad u_2(t,r)=0 \tag{3.3}$$

Из (2.5), (3.1), (3.3) следует равенство

$$\sigma_{r1}-\sigma_{\vartheta1}=6G(I-L)\left[\lambda_0(r)-\frac{3}{r^3}\int\limits_{a}^{r}\lambda_0(\rho)\rho^2\,d\rho\right] \tag{3.4}$$

Проинтегрируем соотношение (3.2) по r в пределах от $a(t)$ до a_0. Учитывая (3.4) и граничные условия $\sigma_{r1}(t, a)=-p_*$, $\sigma_{r1}(t, a_0)=-p$, получим соотношение

$$p_*(t)=p(t)-12G\int\limits_{a(t)}^{a_0}(I-L)\left[\lambda_0(r)-\frac{3}{r^3}\int\limits_{a}^{r}\lambda_0(\rho)\rho^2\,d\rho\right]\frac{dr}{r} \tag{3.5}$$

которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение Вольтерра для определения давления p_* в области, занятой веществом в жидкой фазе. Если материал в твердой фазе упругий ($l=0$), это соотношение упрощается

$$p_*(t)=p(t)-12Ga_0^{-3}\int\limits_{a(t)}^{a_0}\lambda(p_*(\tau_0(r)))r^2\,dr$$

При постоянной интенсивности внешнего давления $p(t)=p_0$ из этого равенства следует, что функция $p_*(t)$ определяется по формуле

$$\int\limits_{p_0}^{p_*(t)}\frac{dp}{\lambda(p)}=-4G\left[1-\left(\frac{a}{a_0}\right)^3\right]$$

При постоянном значении λ имеем $p_*=p_0-4G\lambda[1-(a/a_0)^3]$.

2. Пусть вещество в твердом агрегатном состоянии заполняет все пространство. В момент времени $t=0$ в среде вырезается сферическое отверстие радиуса a_0 и в него вставляется жесткий шар. На бесконечности к среде прикладываются сжимающие усилия интенсивности $p=p(t)$. При этом часть вещества, примыкающая к шару, переходит из твердой фазы в жидкую. Требуется при заданном законе смещения границы раздела фаз $a(t)$, $a(0)=a_0$, $da/dt>0$ определить напряженное состояние в среде.

Такие задачи возникают при расчете напряжений в подземных сооружениях, расположенных в зоне вечной мерзлоты, когда за счет притока тепла происходит таяние грунта [3].

В жидком агрегатном состоянии вещество представляет собой идеальную несжимаемую жидкость. Материал в твердой фазе является несжимаемым нелинейно вязкоупругим и описывается уравнением состояния вида

$$e_{ij}^{\cdot}=h(\sigma_u)s_{ij}, \quad e^{\cdot}=de/dt \tag{3.6}$$

Здесь $\sigma_u=(s^{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений, $h(\sigma)$ — заданная функция. При этом $e_u^{\cdot}=\sigma_u h(\sigma_u)$, где $e_u^{\cdot}=(e^{\cdot ij}e_{ij}^{\cdot}/2)^{1/2}$ — интенсивность скоростей деформаций. Для описания ползучести льда при длительном нагружении используется закон течения Глена [4]:

$$e_u^{\cdot}=K_0\sigma_u^m, \quad h(\sigma)=K_0\sigma^{m-1} \tag{3.7}$$

Недеформированное состояние вещества в твердой фазе совпадает с его естественным состоянием $g_{ij}^{10}=g_{ij}^{\circ}$, которое в жидкой фазе определяется метрическим тензором $g_{ij}^{20}=(1-2\lambda)g_{ij}^{\circ}$. Для изотропного материала $\lambda=\lambda(p_1, \sigma_u)$, где p_1 — давление, а σ_u — интенсивность напряжений в твердой фазе в момент фазового превращения. В дальнейшем ограничимся случаем $\lambda=\mathrm{const}$.

Из (2.2), (2.3), (3.1) и граничных условий $u_1(t, a)=u_2(t, a)$, $u_2(t, a_0)=0$ найдем $u_1=-\lambda(a^3-a_0^3)/r^2$, $u_2=-\lambda r[1-(a_0/r)^3]$. Интенсивность скоростей деформаций в области Ω_1 определяется по формуле $e_u^{\cdot}=3\sqrt{3}|\lambda|a^{\cdot}a^2/r^2$. Обозначим через $H_1(e)$ функцию, обратную к $h_1(\sigma)=\sigma h(\sigma)$. Положим $H(e)=[h(H_1(e))]^{-1}$. Тогда

$$\sigma_{r1}-\sigma_{\vartheta 1}=9H(e_u^{\cdot})\lambda a^{\cdot}a^2/r^2 \tag{3.8}$$

Проинтегрируем равенство (3.2) по r в пределах от $a(t)$ до ∞ и подставим в полученное соотношение выражение (3.8). Найдем давление в жидкости p_*:

$$p_*(t)=p(t)-18\int\limits_{a(t)}^{\infty} H(3\sqrt{3}\,|\lambda|\,a^{\cdot}a^2/r^2)\,\lambda a^{\cdot}a^2/r^4\,dr$$

Принимая закон ползучести вида (3.7), имеем ($\lambda>0$):

$$p_*(t)=p(t)-{}^2/_3\sqrt{3}m[3\sqrt{3}\lambda a^{\cdot}/(K_0a)]^{1/m}$$

Полагая для льда [4] $\lambda=3\cdot10^{-2}$, $m=2$, $K_0=2\cdot10^{-15}$ м^4/н^2·ч, получим $p_*\approx[p-20(a^{\cdot}/a)^{1/2}]$ МПа, где $a^{\cdot}$ (м/ч) — скорость движения границы раздела фаз.

Аналогичная задача без учета влияния жидкой фазы вещества исследовалась в [5].

4. Наращивание упругих тел при фазовом переходе первого рода. Перейдем к исследованию связанных задач наращивания, когда поверхность Γ и температура тела T заранее неизвестны и подлежат определению.

Пусть до деформации тело D находится в жидком агрегатном состоянии при температуре T_0 и занимает область Ω. В жидкой фазе вещество описывается уравнением состояния идеальной несжимаемой жидкости

(2.6). В момент времени $t=0$ к телу прикладываются поверхностные усилия и начинается охлаждение тела. Количество тепловой энергии, переданной телом в окружающую среду за время t, обозначим $w(t)$. Функция w непрерывно дифференцируема, монотонно возрастает, $w(0)=0$. Часть вещества тела переходит в твердое агрегатное состояние. Материал в твердой фазе является несжимаемым линейно-упругим и описывается уравнением состояния (2.5) при $l=0$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в теле D, поверхность раздела фаз Γ и температуру T в момент времени $t>0$.

Рассмотрим сначала случай сжимаемого вещества. При малых деформациях и отклонениях температуры от величины T_0 в разложении удельной свободной энергии изотропного упругого материала в ряд в окрестности естественного состояния можно ограничиться квадратичными членами [6]:

$$\rho_0\psi=\rho_0\psi^\circ+{}^1/_2K(\varepsilon^*)^2+Ge^{ij}e_{ij}-\rho_0 s^\circ(T-T_0)-{}^1/_2\rho_0 c(T-T_0)^2/T_0 \tag{4.1}$$
$$\varepsilon^*=\varepsilon-3\alpha(T-T_0)$$

Здесь ψ° — удельная свободная энергия, s° — удельная энтропия, c — удельная теплоемкость вещества в естественном состоянии при температуре T_0, K — модуль объемной деформации, ρ_0 — плотность тела в недеформированном состоянии. Удельная энтропия определяется по формуле $s=-\partial\psi/\partial T$. Согласно (4.1), имеем

$$\rho_0(s-s^\circ)=3\alpha K\varepsilon^*+\rho_0 c(T-T_0)/T_0 \tag{4.2}$$

Обозначим через θ удельную внутреннюю энергию вещества, $\theta=\psi+sT$. Из (4.1), (4.2) найдем

$$\rho_0\theta=\rho_0(\psi^\circ+s^\circ T_0)+{}^1/_2K(\varepsilon^*)^2+Ge^{ij}e_{ij}+ \tag{4.3}$$
$$+3\alpha KT\varepsilon^*+{}^1/_2\rho_0 c(T^2-T_0^2)/T_0$$

Пусть δ_0, δ — характерные значения объемной ε^* и сдвиговой e_{ij} деформаций. Для несжимаемого материала отношение G/K стремится к нулю, а величины δ_0 и δ связаны соотношением $\delta_0\sim\delta G/K$. При этом давление $p=-K\varepsilon^*$ имеет тот же порядок, что и компоненты девиатора тензора напряжений, $p\sim G\delta$, а величина $K(\varepsilon^*)^2$ мала по сравнению с $Ge^{ij}e_{ij}$. В дальнейшем при исследовании несжимаемого материала этой величиной пренебрегаем.

Выражения для удельной внутренней энергии и удельной энтропии несжимаемого вещества в твердой и жидкой фазах принимают вид (индекс 1 относится к материалу в твердой фазе, а 2 — в жидкой):

$$\rho_0\theta_1=\rho_0(\psi_1^\circ+s_1^\circ T_0)+Ge^{ij}e_{ij}-3\alpha_1 p_1 T+\rho_0 c_1(T^2-T_0^2)/(2T_0)$$
$$\rho_0\theta_2=\rho_0(\psi_2^\circ+s_2^\circ T_0)-3\alpha_2 p_2 T+\rho_0 c_2(T^2-T_0^2)/(2T_0)$$
$$\rho_0 s_1=\rho_0 s_1^\circ-3\alpha_1 p_1+\rho_0 c_1(T-T_0)/T_0 \tag{4.4}$$
$$\rho_0 s_2=\rho_0 s_2^\circ-3\alpha_2 p_2+\rho_0 c_2(T-T_0)/T_0$$

При фазовом переходе первого рода в точке фазового перехода термодинамический потенциал непрерывен, а его первые производные претерпевают конечные скачки [7]. Из непрерывности термодинамического потенциала следует равенство удельных свободных энергий в естественном состоянии $\psi_1^\circ=\psi_2^\circ=\psi_0$. Скачок плотности вещества характеризуется величиной λ, а скачок энтропии — скрытой теплотой плавления q [8]: $s_2^\circ=s_1^\circ+q/T_0$. В дальнейшем величины λ и q считаем постоянными.

Приращение внутренней энергии тела D при переходе в актуальное состояние определим из (4.4) (dv — элемент объема области Ω):

$$\Phi=\int\limits_{\Omega_1}\left[Ge^{ij}e_{ij}-3\alpha_1p_1T-\rho_0 q+\frac{\rho_0c_1(T^2-T_0^2)}{2T_0}\right]dv+ \tag{4.5}$$
$$+\int\limits_{\Omega_2}\left[\frac{\rho_0c_2(T^2-T_0^2)}{2T_0}-3\alpha_2p_2T\right]dv$$

Согласно первому закону термодинамики [6]:

$$\Phi=A-w,\quad A=\int\limits_{\Gamma_2}f^iu_i\,d\omega \tag{4.6}$$

где A — работа внешних сил, $d\omega$ — элемент площади поверхности $\partial\Omega$.

Предположим, что на поверхности раздела фаз Γ диссипация энергии отсутствует. Тогда приращение энтропии тела D равно

$$S=\frac{1}{T_0}\left\{\int\limits_{\Omega_1}\rho_0\left[c_1(T-T_0)-q-3\rho_0^{-1}\alpha_1p_1T_0\right]dv+\right. \tag{4.7}$$
$$\left.+\int\limits_{\Omega_2}\rho_0\left[c_2(T-T_0)-3\rho_0^{-1}\alpha_2p_2T_0\right]dv\right\}$$

Пусть характерное время изменения внешних воздействий много больше характерного времени установления термодинамического равновесия в теле. Тогда можно считать, что в каждый момент времени тело находится в равновесном состоянии, в котором температура T не зависит от координат ξ, а энтропия тела максимальна. Условие максимума энтропии при выполнении равенства (4.6) является дополнительным соотношением, позволяющим определить поверхность раздела фаз Γ (постулат Гиббса).

В [9] на основе принципа Гиббса получено условие равенства тензоров химических потенциалов, позволяющее определить поверхность раздела фаз Γ. Другой подход к определению фазовой границы предложен в [10].

Точная формулировка принципа Гиббса, используемого в публикуемой работе, состоит в следующем. Фиксируем некоторое положение границы раздела фаз $\Gamma(t)$ и значение температуры $T(t)$. Обозначим через $u_i(t,\xi)$ поле перемещений, которое является решением контактной задачи (2.1)–(2.8) при заданных Γ и T. Подставляя выражения для u_i в соотношения для определения Φ, A, S, получим $\Phi(\Gamma,T)$, $A(\Gamma,T)$, $S(\Gamma,T)$. Согласно постулату Гиббса, истинное положение границы раздела фаз $\Gamma(t)$ и значение температуры $T(t)$ доставляют максимальное значение функционалу $S(\Gamma,T)$ при условии (4.6).

Примем дополнительную гипотезу об устойчивости состояния термодинамического равновесия. Пусть в момент времени t определены области $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$, занятые веществом в твердой и жидкой фазах. Тогда малое изменение внешних воздействий за время dt не может привести к топологической перестройке разбиения области Ω на подобласти Ω_l в момент времени $t+dt$. В частности, если $\Omega_1(t)$ находится внутри $\Omega_2(t)$, то $\Omega_1(t+dt)$ также находится внутри $\Omega_2(t+dt)$.

5. **Центрально-симметричное наращивание упругого шара.** Пусть до деформации тело D представляет собой шар радиуса a_0 из идеальной несжимаемой жидкости. В момент времени $t=0$ к телу прикладывается внешнее давление интенсивности $p(t)=p_0$ и начинается охлаждение тела. При этом часть вещества переходит в твердое агрегатное состояние. Материал в твердой фазе является изотропным несжимаемым линейно-упругим. При центрально-симметричной деформации области $\Omega_l(t)$ являются шаровыми, а поверхность раздела фаз Γ представляет собой сферу радиуса $a(t)$. Теоретически возможны два случая: когда область Ω_1 лежит

внутри Ω_2, или область Ω_2 — внутри Ω_1. Исследуем оба типа фазового перехода.

В дальнейшем считаем, что выполняются неравенства

$$|p_0|<\rho_0 q/(3|\lambda|), \quad |p_0|<\rho_0 c_l/(3\alpha_l) \tag{5.1}$$

При кратковременном нагружении вода представляет собой идеальную жидкость, а лед можно рассматривать как упругое тело. Для фазового перехода вода — лед соотношения (5.1) справедливы при $|p_0|<3\cdot 10^2$ МПа [11].

Предположим сначала, что область Ω_1 находится внутри Ω_2. Из (2.2), (2.3), (3.1) имеем

$$u_1=[\lambda+\alpha_1(T-T_0)]r$$
$$u_2=\{\alpha_2(T-T_0)+[\lambda+(\alpha_1-\alpha_2)(T-T_0)(a/r)^3\}r \tag{5.2}$$

Работа внешних сил определяется по формуле

$$A=-4\pi p_0 a_0^3\{\lambda x+[\alpha_1 x+\alpha_2(1-x)](T-T_0)\}, \quad x=(a/a_0)^3 \tag{5.3}$$

Найдем давление в областях Ω_l:

$$p_1=p_2=p_0 \tag{5.4}$$

Приращение энтропии равно

$$S=4\pi\rho_0 a_0^3\{[c_1 x+c_2(1-x)](T-T_0)-qx-$$
$$-3\sigma_0 T_0[\alpha_1 x+\alpha_2(1-x)]\}/(3T_0), \quad \sigma_0=p_0\rho_0^{-1} \tag{5.5}$$

Из (4.5), (4.6), (5.2), (5.4) найдем температуру тела

$$T=T_0\{1+2[c_1{*}x+c_2{*}(1-x)]^{-1}[qx-3\lambda\sigma_0 x+$$
$$+3\sigma_0(\alpha_1{*}x-\alpha_2{*}(1-x))-w_0]\}^{1/2}, \quad w_0=w(4\pi\rho_0 a_0^3/3)^{-1}, \quad c_l{*}=c_l T_0, \quad \alpha_l{*}=\alpha_l T_0 \tag{5.6}$$

Подставим выражение (5.6) в (5.5). Согласно принципу Гиббса, величина x доставляет максимальное значение функции

$$F_1(x)=[c_1{*}x+c_2{*}(1-x)]\{[1+2(c_1{*}x+c_2{*}(1-x))^{-1}((q-3\lambda\sigma_0)x+$$
$$+3\sigma_0(\alpha_1{*}x+\alpha_2{*}(1-x)-w_0]^{1/2}-1\}-3\sigma_0(\alpha_1{*}x+\alpha_2{*}(1-x))-qx \tag{5.7}$$

Ограничимся исследованием случая

$$\alpha_1{*}=\alpha_2{*}=\alpha_*, \quad c_1{*}=c_2{*}=c_* \tag{5.8}$$

когда при фазовом переходе отсутствуют скачки линейного коэффициента теплового расширения и удельной теплоемкости вещества. Общий случай рассматривается аналогично.

Обозначим через x_* решение уравнения

$$dF_1/dx=(q-3\lambda\sigma_0)\{1+2c_*^{-1}[(q-3\lambda\sigma_0)x+3\alpha_*\sigma-w_0]\}^{-1}-q=0 \tag{5.9}$$

Вторая производная функции F_1 отрицательна. Следовательно, если точка $x_*\in(0, 1)$ существует, то она единственна и в этой точке функция F_1 достигает максимального значения на отрезке $[0, 1]$.

Сосуществование двух фаз вещества реализуется при $x_*\in(0, 1)$. Положение границы раздела фаз a определяется по формуле $a(t)=a_0 x_*^{1/3}$.

Чтобы фазовый переход начался, необходимо выполнение неравенства $w_0(t)\geqslant w_1^\circ$:

$$w_1^\circ=c_*[1+6\alpha_*\sigma_0 c_*^{-1}-(1-3\lambda\sigma_0 q^{-1})^2]/2 \tag{5.10}$$

При $w_0(t)>w_1^\circ$ величина x_* увеличивается с ростом t и в некоторый момент времени t_0 достигает значения $x_*=1$. При $t=t_0$ все вещество шара переходит в твердое агрегатное состояние и фазовый переход завершается.

Из (5.6), (5.9) следует, что при сосуществовании двух фаз температура тела T постоянна и равна $T=T_0(1-3\lambda\sigma_0 q^{-1})$. При фазовом переходе вода — лед приращение температуры $\Delta T = T - T_0$ равно нулю при $p_0 = 0$ и равно 0,1 град при $p_0 = 1$ МПа.

Перейдем к исследованию случая, когда область Ω_2 находится в актуальном состоянии внутри Ω_1. Из (2.2), (2.3), (3.1) найдем

$$u_1 = \{[\lambda + \alpha_1(T - T_0)] - [\lambda + (\alpha_1 - \alpha_2(T - T_0)] \quad (a/r)^3\} r, \quad u_2 = 0 \tag{5.11}$$

Определим давление в областях Ω_i:

$$p_1 = p_0 + 4G[\lambda + (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_0)]x \tag{5.12}$$
$$p_2 = p_0 - 4G[\lambda + (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_0)](1 - x)$$

Работа внешних сил равна

$$A = -4\pi p_0 a_0^3 \{\lambda(1 - x) + [\alpha_1(1 - x) + \alpha_2 x](T - T_0)\} \tag{5.13}$$

Из (4.5), (4.6), (5.11) — (5.13) получим

$$\begin{aligned}[{}^1/{}_2(c_1(1-x)+c_2x)/T_0 - 6G_0\lambda^2(\alpha_1-\alpha_2)^2x(1-x)](T^2-T_0^2) = \\ = (q - 3\lambda\sigma_0)(1-x) + 3\sigma_0 T_0[\alpha_1(1-x)+\alpha_2 x] + \\ +12G_0\lambda T_0(\alpha_1-\alpha_2)x(1-x) - 6G_0\lambda^2 x(1-x) - w_0, \quad G_0 = G\rho_0^{-1}\end{aligned} \tag{5.14}$$

Определим приращение энтропии

$$\begin{aligned}S = 4\pi\rho_0 a_0^3\{[c_1(1-x)+c_2x](T-T_0) - q(1-x) - \\ -3\sigma_0 T_0[\alpha_1(1-x)+\alpha_2 x] - 12G_0(\alpha_1-\alpha_2)T_0[\lambda + \\ +(\alpha_1-\alpha_2)(T-T_0)]x(1-x)\}/(3T_0)\end{aligned} \tag{5.15}$$

Ограничимся исследованием фазового перехода, при котором выполняются равенства (5.8). Найдем величину T из (5.14) и подставим в соотношение (5.15). Согласно принципу Гиббса, величина x доставляет максимальное значение функции

$$\begin{aligned}F_2(x) = c_*\{[1 + 2c_*^{-1}((q - 3\lambda\sigma_0)(1-x) + \\ +3\alpha_*\sigma_0 - 6G_0\lambda^2 x(1-x) - w_0)]^{1/2} - 1\} - 3\alpha_*\sigma_0 - q(1-x)\end{aligned}$$

Обозначим через x_* решение уравнения

$$\begin{aligned}dF_2/dx = q - [(q - 3\lambda\sigma_0) + 6G_0\lambda^2(1-2x)]\times \\ \times\{1 + 2c_*^{-1}[(q - 3\lambda\sigma_0)(1-x) + 3\alpha_*\sigma_0 - 6G_0\lambda^2 x(1-x) - w_0]\}^{-1/2} = 0\end{aligned} \tag{5.16}$$

Если $\beta < 0$ и существует точка $x_* \in (0, 1)$, то эта точка единственна мума. Чтобы сосуществование двух фаз вещества было возможным, требуется выполнение неравенства

$$12G_0\lambda^2 c_* < q^2 \tag{5.17}$$

Отметим, что при фазовом переходе вода — лед условие (5.17) выполняется.

Если $\beta < 0$ и существует точка $x_* \in (0, 1)$, то эта точка единственна и положение границы раздела фаз определяется по формуле $a(t) = a_0 x_*^{1/3}$. Для того чтобы фазовый переход начался, необходимо выполнение неравенства $w_0(t) > w_2^\circ$

$$w_2^\circ = c_*[1 + 6\alpha_*\sigma_0 c_*^{-1} - (1 - 3\lambda\sigma_0 q^{-1} - 6G_0\lambda^2 q^{-1})^2]/2 \tag{5.18}$$

При сосуществовании двух фаз температура изменяется по закону $T = T_0[1 - 3\lambda\sigma_0 q^{-1} + 6G_0\lambda^2 q^{-1}(1 - 2x)]$.

Из (5.1), (5.10), (5.18) следует, что при монотонно возрастающей величине переданной телом в окружающую среду тепловой энергии w фазовый переход, при котором область Ω_1 находится внутри Ω_2, начинается раньше, чем фазовый переход, при котором область Ω_2 лежит внутри Ω_1.

Из гипотезы устойчивости следует, что в этом случае переход второго типа не реализуется.

Таким образом, при передаче тепла в окружающую среду в центре жидкого шара, находящегося под давлением, образуется зародыш твердой фазы, радиус которого увеличивается по закону

$$a(t)=a_0(q-3\lambda\sigma_0)^{-1/3}\{w_0(t)-3\alpha_*\sigma_0-c_*[1-(1-3\lambda\sigma_0 q^{-1})^2]/2\}^{1/3}.$$

Отметим, что полученный результат справедлив также в случае, когда вещество в твердой фазе является несжимаемым линейно-вязкоупругим.

Аналогично можно исследовать фазовый переход несжимаемого упругого шара, находящегося под давлением, в жидкое агрегатное состояние. Если количество переданной телу извне тепловой энергии монотонно возрастает и выполняется гипотеза устойчивости, то в жидкое состояние переходит внешняя оболочка шара, а возникновение жидкого зародыша внутри твердой фазы невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. *Горелик Л. В., Нуллер Б. М., Шойхет Б. А.* Расчетные модели грунтов, подверженных замораживанию и оттаиванию.— Изд-е Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1981, т. 151, с. 66—71.
4. *Войтковский К. Ф.* Механические свойства льда. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 100 с.
5. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 142—152.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 535 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
8. *Ансельм А. И.* Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973. 423 с.
9. *Гринфельд М. А.* К теории фазовых переходов первого рода в изотропных упругих материалах.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 571—575.
10. *Кондауров В. И., Никитин Л. В.* Исследование фазовых переходов первого рода в нелинейно-упругих средах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 6, с. 49—55.
11. *Бачинский А. И., Путилов В. В., Суворов Н. П.* Справочник по физике. М.: Учпедгиз, 1951. 380 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1985