

УДК 539.214

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

КУЗЬМЕНКО В. И.

Задачи контактного взаимодействия при упругопластическом деформировании существенно богаче и разнообразнее по содержанию и областям приложения, чем аналогичные задачи теории упругости. В числе новых проблем, отсутствующих в теории упругости, можно указать выбор подходящей теории пластичности, изучение влияния истории нагружения, исследование остаточного состояния. Полученные решения [1-4] относятся, как правило, к простым или близким к простым процессам нагружения с использованием некоторой определенной теории пластичности.

В публикуемой работе рассмотрены квазистатические задачи о действии штампов на упругопластическую полосу при существенно сложном законе движения штампов. Используется достаточно общая формулировка определяющих уравнений, позволяющая охватить значительное число существующих теорий пластичности. Задача сведена к так называемому квазивариационному неравенству [5]. Предлагается метод численного решения квазивариационного неравенства на основе конечноэлементной аппроксимации. В качестве примеров рассмотрены задача о действии плоского штампа на прямоугольную полосу при различных траекториях движения штампа и задача о несинхронном вдавливании двух выпуклых штампов.

1. Введем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) и обозначим через $t, t \in [0, T]$ монотонно возрастающий параметр, связанный с процессом деформирования и называемый в дальнейшем временем. Под полосой понимаем цилиндрическое тело, имеющее бесконечную протяженность в направлении x_3 ; сечение полосы плоскостью, параллельной плоскости Ox_1x_2 , является односвязной областью Ω , ограниченной замкнутым, кусочно-гладким, без самопересечений и точек возврата контуром Γ .

Рассматриваются квазистатические процессы деформирования при малых перемещениях и деформациях и предполагается, что в любой момент времени $t \in [0, T]$ вектор перемещений во всех точках полосы параллелен плоскости Ox_1x_2 . Под $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ понимаются компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega$ в момент времени $t \in [0, T]$. Точкой обозначается дифференцирование по времени.

Представим контур Γ в виде объединения непересекающихся участков $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, на каждом из которых могут быть заданы изменяющиеся со временем перемещения или усилия, или происходить взаимодействие с движущимся штампом. Для определенности будем считать, что участки пронумерованы таким образом, что на Γ_k ($1 \leq k \leq K$) векторы перемещений в каждый момент времени равны $U_k(\mathbf{x}, t)$, на Γ_l ($K+1 \leq l \leq L$) приложены изменяющиеся со временем нагрузки $S_l(\mathbf{x}, t)$, а на Γ_m ($L+1 \leq m \leq M$) полоса находится под действием перемещающихся штампов. Форма штампа, действующего на участке Γ_m , описывается уравнением поверхности $F_m(\mathbf{x}) = 0$ в момент времени $t = 0$. Движение штампа как жесткого тела задается вектором $U_m^{(0)}(t)$ перемещений некоторого полюса $\mathbf{x}^{(0)}$ и углом поворота $\varphi_m^{(0)}(t)$ относительно полюса. Функции $F_m(\mathbf{x})$, $U_m^{(0)}(t)$, $\varphi_m^{(0)}(t)$ однозначно определяют расстояние $\Phi_m(\mathbf{x}, t)$ в момент времени t от поверхности полосы до поверхности штампа, измеренное вдоль

направления внешней нормали к поверхности полосы. Предполагается, что $\Phi_m(x, t)$ при $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$ принимает значения порядка возникающих перемещений.

Сформулируем условия взаимодействия полосы со штампами на участке Γ_m , считая, что площадка фактического контакта заранее не задана и может изменяться в процессе деформирования. Трением между контактирующими поверхностями пренебрегаем. Индексом ν будем указывать нормальные компоненты векторов. Тогда в точках участка Γ_m должны выполняться следующие условия в виде равенств и неравенств [5, 6]:

$$\begin{aligned} u_\nu(x, t) &\leq \Phi_m(x, t) \\ \sigma_\nu(x, t) &\leq 0, \quad \sigma_{ij}(x, t) \nu_j(x) - \sigma_\nu(x, t) \nu_i(x) = 0 \\ \sigma_\nu(x, t) [u_\nu(x, t) - \Phi_m(x, t)] &= 0, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Неравенство $u_\nu(x, t) \leq \Phi_m(x, t)$ выражает требование взаимного непроникания полосы и штампа, а неравенство $\sigma_\nu(x, t) \leq 0$ — требование отсутствия растягивающих напряжений на контактной поверхности.

В исходном состоянии при $t=0$ напряжения и деформации в полосе отсутствуют, поэтому введенные функции должны удовлетворять следующим условиям:

$$U_k(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Gamma_k \quad (1 \leq k \leq K)$$

$$S_l(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Gamma_l \quad (K+1 \leq l \leq L)$$

$$U_m^{(0)}(0) = \overline{\Phi_m^{(0)}(0)} = 0, \quad F_m(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Gamma_m \quad (L+1 \leq m \leq M)$$

Эти функции также должны быть подчинены достаточно общим и естественным требованиям, обеспечивающим существование и единственность решения. Никакие специальные ограничения на вид функций U_k , S_l , $U_m^{(0)}$, $\Phi_m^{(0)}$, F_m не накладываются, что позволяет рассматривать широкий класс процессов сложного нагружения.

В качестве закона связи напряженного и деформированного состояний используются дифференциально-линейные или дифференциально-нелинейные соотношения вида

$$\sigma_{ij} = A_{ijpq}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r, \varepsilon_{\xi\eta}) \varepsilon_{pq} \quad (1.2)$$

Функции A_{ijpq} являются однородными нулевой степени относительно $\varepsilon_{\xi\eta}$; $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$ — значения некоторых функционалов истории деформирования. В виде (1.2) могут быть представлены определяющие соотношения всех вариантов теории течения с гладкими и кусочно-гладкими поверхностями нагружения, а также теорий деформационного типа и теорий, основанных на концепции скольжения.

2. Поскольку соотношения (1.2) в общем виде неинтегрируемы, то краевую задачу целесообразно формулировать в скоростях. Дифференцированием по времени в скоростях могут быть представлены условия в виде равенств на участках Γ_k ($1 \leq k \leq K$), Γ_l ($K+1 \leq l \leq L$) и уравнения равновесия. Однако условия (1.1) на контактных поверхностях содержат неравенства и не могут быть непосредственно записаны в скоростях, что существенно усложняет формулировку, исследование и численное решение контактных задач при сложном нагружении. В частности, такие задачи, в отличие от контактных задач теории упругости, не могут быть сформулированы в виде вариационного неравенства на всем отрезке времени [6].

Указанные обстоятельства приводят к формулировке задачи в виде так называемого квазивариационного неравенства [5]. Будем считать скорости перемещений, определенные в области $\Omega \times [0, T]$, элементами гильбертова пространства $L^2(0, T; H)$ [7], где H — пространство С. Л. Со-

болева вектор-функций $\dot{\mathbf{v}} = (\dot{v}_1, \dot{v}_2)$, определенных в Ω при фиксированном t и суммируемых в Ω с квадратом вместе с первыми частными производными по пространственным переменным. Выделим в $L^2(0, T; H)$ подмножество W допустимых скоростей, в которое включим скорости перемещений, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям в скоростях на Γ_k ($1 \leq k \leq K$), а также кинематическим условиям на контактных поверхностях:

$$\int_0^t v_v^*(x, \tau) d\tau \leq \Phi_m(x, t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \Gamma_m (L+1 \leq m \leq M) \quad (2.1)$$

Через ζ_{ij} будем обозначать компоненты тензора скоростей деформаций, соответствующие возможным скоростям перемещений $\mathbf{v}^* \in W$. Введем функцию

$$\psi_m(\sigma_v, v_v - u_v) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \sigma_v < 0, v_v < u_v \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, обобщая результаты [5], можно показать, что для всех допустимых скоростей перемещений $\mathbf{v}^* \in W$ выполнено следующее квазивариационное неравенство:

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega} A_{ijpq}(\dots, \dot{\varepsilon}_{ij}) \varepsilon_{ij} (\zeta_{pq} - \varepsilon_{pq}) d\Omega - \sum_{l=K+1}^L \int_{\Gamma_l} S_l (\mathbf{v}^* - \mathbf{u}^*) d\Gamma + \sum_{m=L+1}^M \int_{\Gamma_m} \psi_m(\sigma_v, v_v - u_v) d\Gamma \right\} dt \geq 0 \quad (2.2)$$

В [5] доказана теорема существования решения квазивариационного неравенства, аналогичного (2.2), и определены достаточные для этого условия относительно функций A_{ijpq} , U_k , S_l , Φ_m .

3. Используем квазивариационное неравенство (2.2) для построения алгоритма численного решения. Разобьем отрезок времени $[0, T]$ на N интервалов; узлы разбиения обозначим через t_n , $n=0, 1, \dots, N$; $t_0=0$, $t_N=T$.

Предполагается, что при $t=t_n$ возможны разрывы скоростей, поэтому будем различать моменты времени t_n-0 и t_n+0 , предшествующие t_n и следующие за t_n . Зафиксируем значения \mathbf{v}^* в узлах и на каждом интервале (t_n, t_{n+1}) аппроксимируем $\mathbf{v}^* \in W$ линейными функциями

$$\mathbf{v}^*(x, t_n+0) + [(t-t_n)/(t_{n+1}-t_n)] [\mathbf{v}^*(x, t_{n+1}-0) - \mathbf{v}^*(x, t_n+0)] \quad (3.1)$$

В соответствии с кинематическими граничными условиями положим на Γ_k ($1 \leq k \leq K$):

$$\mathbf{v}^*(x, t_n+0) = U_k^*(x, t_n+0), \quad \mathbf{v}^*(x, t_{n+1}-0) = U_k^*(x, t_{n+1}-0) \quad (3.2)$$

Неравенство (2.1) в рамках используемой аппроксимации преобразуется в систему неравенств

$$v_v(x, t_n) + [v_v^*(x, t_n+0) + v_v^*(x, t_{n+1}-0)] (t_{n+1}-t_n)/2 \leq \Phi_m(x, t_{n+1}), \quad \forall x \in \Gamma_m (L+1 \leq m \leq M) \quad (3.3)$$

Наконец, чтобы исключить допустимые поля скоростей, приводящие к $\psi = +\infty$, потребуем

$$v_v^*(x, t_n+0) = \Phi_m^*(x, t_n+0), \quad \text{если } \sigma_v(x, t_n) < 0 \quad (3.4)$$

Подставим аппроксимацию (3.1) в квазивариационное неравенство (2.2), выполним интегрирование по времени и потребуем, чтобы нера-

венство выполнялось для всех моментов времени $t_n+0, t_{n+1}-0, n=0, 1, \dots, N-1$. В результате получим систему вариационных неравенств вида

$$\int_{\Omega} A_{ijpq}(\dots, \varepsilon_{\xi n}) \varepsilon_{ij}(\dot{\xi}_{pq} - \dot{\varepsilon}_{pq}) d\Omega - \sum_{i=k+1}^L \int_{\Gamma_i} S_i(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma \geq 0 \quad (3.5)$$

Допустимые множества для неравенств (3.5) выделяются из пространства H условиями (3.2)–(3.4). Последовательное решение вариационных неравенств (3.5) для возрастающих узловых моментов времени позволяет получить приближенное решение задачи определения скоростей на всем отрезке $[0, T]$. Показано [5], что при $N \rightarrow \infty$ приближенное решение слабо сходится к решению квазивариационного неравенства (2.2).

Методы численного решения вариационных неравенств достаточно хорошо разработаны [7]. Вариационное неравенство заменяется эквивалентной экстремальной задачей. Дискретизация такой задачи осуществлялась с помощью метода конечных элементов. Задачи нелинейного программирования высокой размерности, возникающие в результате дискретизации, решались с помощью метода обобщенной верхней релаксации [7].

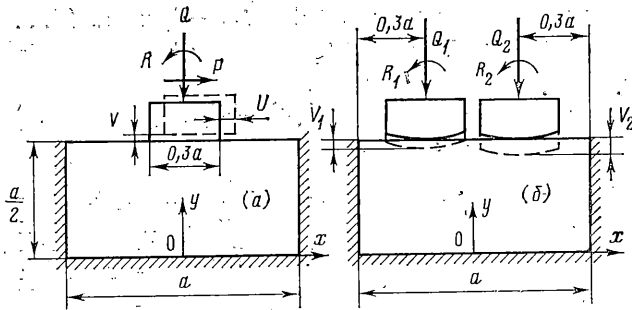
Алгоритм численного решения контактных задач сложного нагружения упругопластической полосы в описанной постановке для случая прямоугольной области Ω реализован в виде комплекса программ на языке ФОРТРАН для ЕС ЭВМ. Разработан простой входной язык описания граничных условий и соответствующий генератор программ на языке ПЛ/1, формирующий конкретный вариант программного комплекса для решения определенной задачи. В состав комплекса на основе модульного принципа могут подключаться подпрограммы, характеризующие конкретные теории пластичности с определяющими соотношениями вида (1.2). Использование указанных подходов к организации программного комплекса предоставляет гибкие средства для организации вычислительного эксперимента по сопоставлению решений в зависимости от истории нагружения и выбора теории пластичности.

4. Рассмотрим процесс сложного деформирования полосы прямоугольного поперечного сечения (фиг. 1, a) длиной a и высотой $a/2$. Полоса находится под действием штампа с плоским основанием длиной $0,3a$. Штмп сцеплен с полосой и может перемещаться как жесткое тело в вертикальном и горизонтальном направлениях без поворотов. Положение штампа в каждый момент времени t определяется смещениями $U(t)$ и $V(t)$ в направлениях x и y соответственно. Исследуем влияние сложного движения штампа на процесс деформирования полосы для семи траекторий в плоскости U_0V_0 ($U_0=UG/(\tau_s a)$, $V_0=VG/(\tau_s a)$), показанных на фиг. 2. Траектории 1–3 – гладкие. Траектории 4–7 содержат точку излома. Все траектории приводят к одному и тому же окончательному положению штампа при $t=T$. Поскольку процесс деформирования не зависит от масштаба времени, считаем, что для гладких траекторий время пропорционально длине дуги траектории, а для траекторий 4–7 время линейно зависит от длины каждого из отрезков, причем точкам излома соответствует $t=0,5T$.

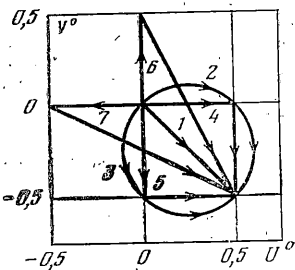
Решение выполнено с использованием четырех теорий пластичности: теории малых упругопластических деформаций (теории Г. Генки – А. Надаи – А. А. Ильюшина [8]) и трех теорий течения: теории изотропного упрочнения Г. Хандельмана, Т. Лина, В. Прагера [9], теории кинематического упрочнения А. Ю. Ишпанского – В. Прагера [10], теории анизотропного упрочнения Ю. И. Кадашевича, В. В. Новожилова [11]. В качестве параметра упрочнения при реализации теорий течения использовался параметр Одквиста. В случае применения при повторном пластическом деформировании теории малых упругопластических деформаций определяющие соотношения этой теории видоизменяются таким образом, чтобы учесть накопленные ранее пластические деформации.

Считаем, что для данного материала получены модуль упругости при кручении G , коэффициент Пуассона ν_0 , а также диаграмма кручения $\tau-\gamma$. Кроме того, при реализации теории Ю. И. Кадашевича, В. В. Новожилова используем диаграмму $\tau^*-\gamma$, полученную в опыте на кручение до различных γ с последующей разгрузкой и кручением в обратном направлении; величина τ^* равна касательным напряжениям, при которых появляются пластические деформации обратного знака.

Численное решение получено для случая $d\tau/d\gamma=G_t=\text{const}$, $d\tau^*/d\gamma=G_t^*=\text{const}$ при $\gamma>\tau_s/G$, где τ_s – предел упругости при кручении. При расчетах принято $G_t=0,1G$; $G_t^*=0,05G$; $\nu_0=0,3$.



Фиг. 1



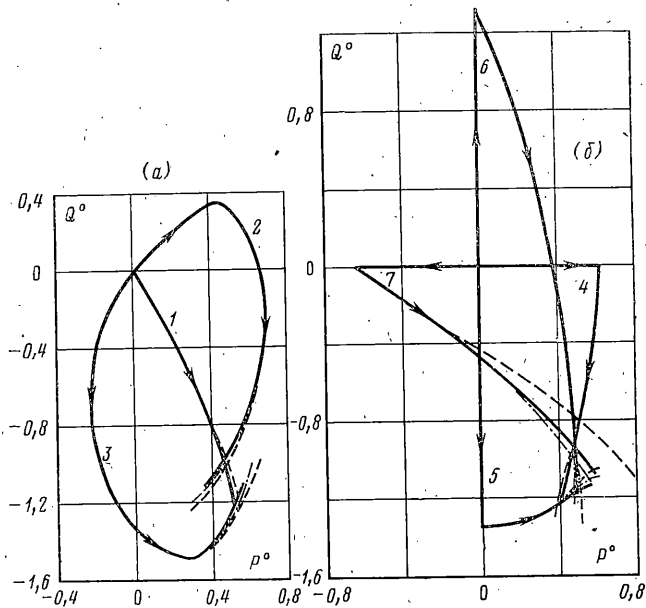
Фиг. 2

Для дискретизации квазивариационного неравенства отрезок $[0, T/2]$ разбивался на 20 равных частей, а отрезок $[T/2, T]$ — на 30. При решении вариационных неравенств (3.5) допустимые поля скоростей аппроксимировались с помощью метода конечных элементов. Использовались треугольные элементы, причем размеры элементов убывали в геометрической прогрессии при приближении к угловым точкам штампа. В пределах каждого элемента допустимые скорости интерполировались по трем узловым значениям линейной функцией вида $b_0 + b_1x + b_2y$. Представленные результаты получены с использованием 1520 конечных элементов. Выбор количества элементов был сделан на основе последовательного решения задач для возрастающего количества конечных элементов до достижения среднеквадратичной погрешности определения скоростей, не превосходящей 1%.

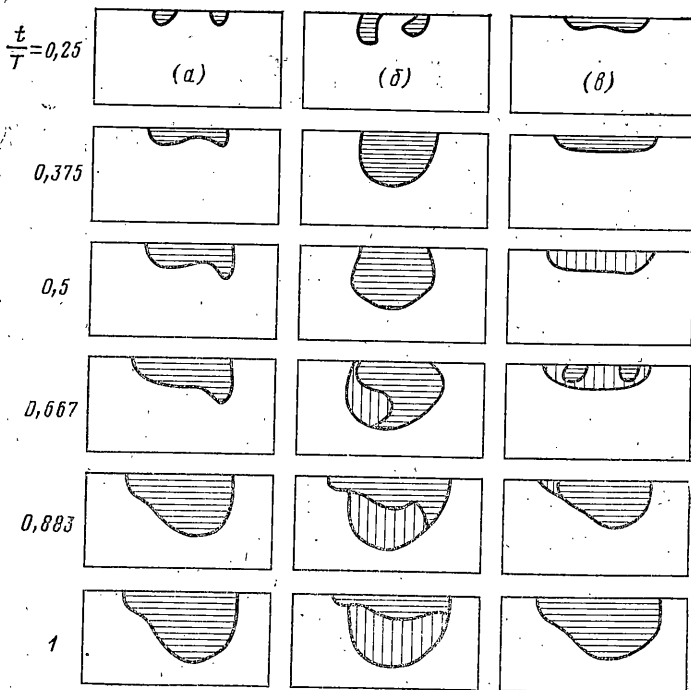
Расчеты выполнялись на ЭВМ ЕС-1033. Необходимое машинное время значительно зависит от выбора траектории и изменяется от 28 мин для траектории 1 до 81 мин для траектории 7. Однако для одной и той же траектории различие во времени счета по различным моделям упругопластического тела не превышает 26%.

Контактные усилия, возникающие в процессе заданного движения штампа, приведем к главному вектору с компонентами $P(t), Q(t)$ и главному моменту $R(t)$ относительно точки $(0, a/2)$. Функции $P(t), Q(t), R(t)$ описывают в трехмерном пространстве PQR траекторию нагружения штампа, обеспечивающую заданный закон движения.

На фиг. 3 представлены проекции на плоскость PQ траекторий нагружения штампа, соответствующих траекториям движения, показанным на фиг. 2 (на фиг. 3 значения P и Q представлены в безразмерном виде: $P_0 = P/(\tau_s a)$, $Q_0 = Q/(\tau_s a)$). Траектории 1–3 приведены на фиг. 3, а, а траектории 4–7 — на фиг. 3, б. Сплошные кривые соответствуют теории Г. Генки — А. Надаи — А. А. Ильюшина, штриховые —



Фиг. 3



Фиг. 4

теории Г. Хандельмана, Т. Лина, В. Прагера, штрихпунктирные — теории А. Ю. Ишлинского — В. Прагера. Кривые $P-Q$, полученные с использованием теории Ю. И. Кадашевича, В. В. Новожилова, располагаются между кривыми, соответствующими указанным теориям течения с изотропным и кинематическим упрочнением, и на фиг. 3 не показаны.

Поскольку все траектории движения штампа приводят к одному и тому же окончательному положению штампа при $t=T$, то представляет интерес сопоставить работу, затрачиваемую на деформирование при различных траекториях движения штампов. Очевидно, указанная работа определяется соотношением

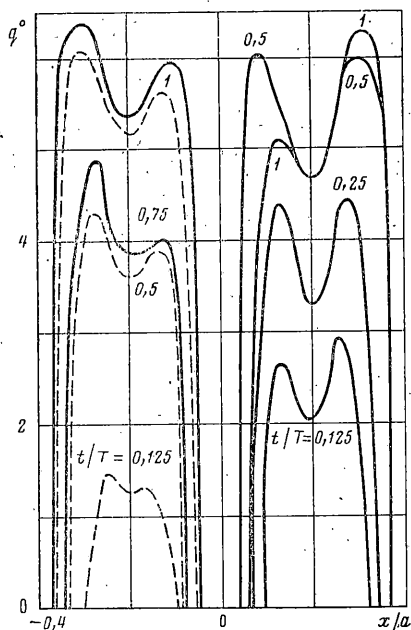
$$\Pi = \int_0^T [P(t)U'(t) + Q(t)V'(t)] dt$$

Кроме того, важно оценить работу Π , соответствующую различным теориям пластичности. Ниже приведены безразмерные значения $\Pi G/(\tau_s^2 a^2)$ для рассматриваемых траекторий 1-7 и используемых теорий пластичности (2-й столбец — теория Генки — Надаи — Ильюшина, 3-й — Хандельмана, Лина, Прагера, 4-й — Ишлинского — Прагера, 5-й — Кадашевича, Новожилова):

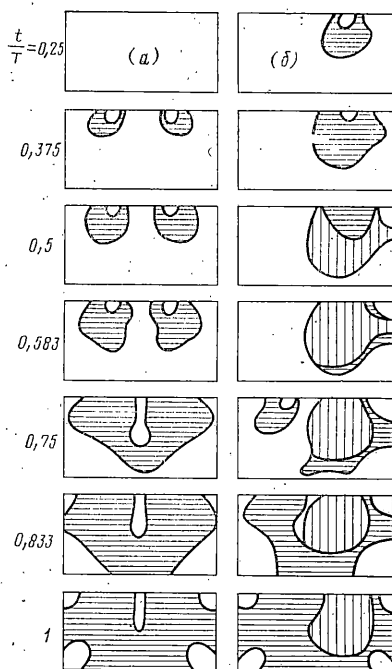
1	0,528	0,530	0,529	0,529
2	0,492	0,547	0,524	0,529
3	0,542	0,599	0,576	0,584
4	0,531	0,564	0,550	0,557
5	0,559	0,577	0,563	0,567
6	0,680	0,768	0,685	0,699
7	0,736	0,865	0,711	0,752

Наиболее выгодным оказывается деформирование полосы, вызываемое движением штампов по траекториям 1 и 2, хотя следует отметить, что для всех траекторий, за исключением заведомо невыгодных траекторий 6 и 7, работа деформирования различается незначительно.

При движении штампов по заданной траектории во всех случаях, за исключением траектории 7, минимальное значение работы соответствует теории малых упругоэластических деформаций, а наибольшее — теории течения с изотропным упрочнением. В группе рассмотренных теорий течения наименьшее значение Π получено при использовании теории А. Ю. Ишлинского — В. Прагера; теория Ю. И. Кадашевича, В. В. Новожилова занимает в этом смысле промежуточное положение между теориями изотропного и кинематического упрочнения.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 4 приведен процесс развития зон активного пластического деформирования (горизонтальная штриховка) и зон разгрузки (вертикальная штриховка); фиг. 4, а, б, в соответствуют траекториям 1, 2, 7. Слева на фигуре отмечены моменты времени, при которых построены границы зон.

Представленные на фиг. 4 результаты получены автором с использованием теории Ю. И. Кадашевича, В. В. Новожилова. Отметим, что хотя процессы развития зон пластической деформации и зон разгрузки при различных траекториях движения штампа существенно различаются, тем не менее при $t=T$ область, занятая материалом, подвергавшимся пластическому деформированию, незначительно зависит от траектории движения штампа.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о действии двух штампов на полосу (фиг. 1, б). Полоса имеет такие же размеры и механические свойства, как и в первом примере. Поверхности штампов описываются уравнениями $y = (\tau_s/G) \times (x-0,3a)^4$, $y = (\tau_s/G) (x-0,7a)^4$. Штампы могут смещаться поступательно в направлении оси y ; положение штампов в момент времени t определяется вертикальными перемещениями $V_1(t)$ и $V_2(t)$.

Исследуем задачу при двух следующих законах движения штампов: а) оба штампа одновременно вдавливаются на глубину $0,8\tau_s a/G$, причем $V_1(t) = V_2(t) = V(t)$, $V'(t) > 0$, $\forall t \in [0, T]$; б) вначале до момента времени $t = 0,5T$ правый штамп монотонно погружается на глубину $0,8\tau_s a/G$ и фиксируется в этом положении для всех $t > 0,5T$, а затем, начиная с $t = 0,5T$, производится монотонное вдавливание левого штампа на ту же глубину. Для обоих законов движения окончательное положение штампов при $t=T$ совпадает.

Численное решение получено с использованием теории Ю. И. Кадашевича, В. В. Новожилова. При конечноэлементной аппроксимации область разбивалась на 1520 треугольных конечных элементов переменных размеров; дискретизация по времени выполнялась точно так же, как и в первом примере.

На фиг. 5 приведены эпюры контактных напряжений $q(x_0) = -\sigma_y(x_0, a/2) / (\tau_s a)$ ($x_0 = x/a$) в различные моменты времени. Штриховые линии соответствуют одновременному вдавлванию штампов, сплошные — поочередному вдавлванию; в первом случае ввиду симметрии эпюры контактных напряжений представлены только для левого штампа.

В обоих случаях сохраняется характерный двугорбый вид эпюры контактного давления. Следует обратить внимание на изменение контактных напряжений под правым штампом при $t \geq 0,5T$ в результате действия левого штампа: происходит увеличение правого пика эпюры с одновременным уменьшением левого; главный вектор давления под правым штампом при этом уменьшается. Тем не менее суммы $Q_1 + Q_2$ главных векторов, действующих на оба штампа, для процессов одновремен-

ного и поочередного вдавливания при $t=T$, соответственно, равны $1,704\tau_{sa}$ и $1,685\tau_{sa}$, т. е. практически совпадают.

Размеры зон пластических деформаций и зон разгрузки для различных моментов времени показаны на фиг. 6. Штриховка зон такая же, как и на фиг. 4. Процессу одновременного погружения штампов соответствует фиг. 6, а, а процессу поочередного погружения — фиг. 6, б.

Отметим, что с началом вдавливания левого штампа при $t \geq 0,5 T$ в значительной области под правым штампом происходит разгрузка. Эффект взаимодействия двух штампов проявляется также в том, что область пластического деформирования при совместном действии штампов больше, чем объединение таких областей при раздельном действии штампов.

Укажем в заключение, что, как и в первом примере, при $t=T$ область, занятая пластически деформированным материалом, практически не зависит от закона движения штампов. Очевидно, применимость этого вывода выходит за рамки двух рассмотренных примеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В., Каргвеллишвили В. М., Черноушко Ф. Л. Численное решение осесимметричной задачи о вдавливании штампа в упругопластическую среду.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1, с. 50–57.
2. Власенко Ю. Е., Кузьменко В. И., Фень Г. А. Контактная задача для упругопластического многослойного пакета с учетом отставания слоев.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 67–73.
3. Skalski K. Analiza zagadnienia kontaktowego ciala sprzysto — plastycznego (na podstawie zasad wariacyjnych i metodu elementów skończonych).— Pr. nauk. Politechn. Warsz., 1979, No. 67, S. 3–118.
4. Гришин В. А. Вдавливание штампа в упругопластическое основание в условиях плоской деформации.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3, с. 81–85.
5. Кузьменко В. И. О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 473–481.
6. Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 329–337.
7. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
8. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
9. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 398 с.
10. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением.— Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 3, с. 314–325.
11. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 1, с. 78–89.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
4.IV.1985