

УДК 539.374

О СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ДВУЗВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ С ИСКРИВЛЕННЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

МОСОЛОВ А. Б.

Напряжения и деформации представляются векторами в пятимерном деформационном пространстве. Конкретный аналитический вид функционала пластичности, определяющего связь между векторами напряжений и деформаций, зависит, как известно, от внутренней геометрии процесса деформации [1].

Для частных классов процессов деформации предложены упрощенные соотношения пластичности. Такие соотношения известны для процессов малой и средней кривизны [2-4], процессов в виде двузвенных ломаных, заданных как в пространстве деформаций [5, 6]¹, так и в пространстве напряжений [7].

В публикуемой работе предложены соотношения пластичности для двузвенных процессов деформации с искривленными звеньями и установлена их связь с законами пластичности для двузвенных траекторий деформации с прямыми звеньями.

1. В пятимерном векторном пространстве деформаций Π_5 [1] рассматриваются процессы деформации по траектории с точкой излома. Пусть s — длина дуги траектории деформации, $s=s_0$ в момент излома, α — угол излома, т. е. угол между касательными к траектории в точках s_0-0 и s_0+0 . В случае, когда траектория процесса представляет собой двузвенную ломаную в Π_5 , известно несколько реализаций соотношений между векторами напряжений σ и деформацией e после точки излома. В дальнейшем будет использована двучленная форма связи $\sigma \sim e$:

$$\sigma = U(s)p + V(s)n \quad (s > s_0) \quad (1.1)$$

Единичные вектора p и n направлены, соответственно, по касательной и по нормали к траектории деформации (в ее плоскости), функции U, V зависят от s, s_0, α .

Формула (1.1) написана в предположении, что вектора p, n постоянны (при $s > s_0$). Это перестает быть справедливым, если нагружение определяется двузвенной ломаной в пространстве напряжений Σ_5 [1, 7]. Установлено, что образ такого процесса нагружения в пространстве деформаций выглядит как двузвенная кривая с точкой излома, у которой первое звено по-прежнему прямое, а второе искривлено, причем кривизна его обычно мала [6, 8, 9].

Выясним, какие изменения внесет учет малой искривленности звеньев в двучленную формулу (1.1). Для этого аналогично [3] представим общий функционал пластичности

$$\sigma = \sigma[s, e(\dots)]_0^s \quad (1.2)$$

в виде ряда из регулярных функциональных полиномов

¹ См. также: Ленский В. С. Исследование пластичности металлов при сложном нагружении: Автореф. дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1961. 28 с.

$$\sigma = \sum_n \int_0^s \dots \int_0^s K_{2n+1} d\mathbf{e}_1 (d\mathbf{e}_2 d\mathbf{e}_3) \dots (d\mathbf{e}_{2n} d\mathbf{e}_{2n+1}) \quad (1.3)$$

$$d\mathbf{e}_i = d\mathbf{e}(\xi_i), \quad K_{2n+1} = K_{2n+1}(s, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n+1})$$

Ядра K_{2n+1} определяются пластическими свойствами материала. Для простоты и однозначности формы (1.3) будем считать их гладкими и симметричными по ξ_i функциями, обеспечивающими монотонное выполнение свойства запаздывания (затухающей памяти) со следом запаздывания λ [1, 2].

Согласно теории Фреше [10], для непрерывного функционала (1.2) разложение типа (1.3) всегда возможно; в общем случае это разложение можно рассматривать как аппроксимацию.

Применим сначала (1.3) для описания процесса деформации по траектории в виде двузвенной ломаной.

Очевидно, что если $\xi_i, \xi_{i+1} < s_0$ (или $\xi_i, \xi_{i+1} > s_0$), то $d\mathbf{e}_i d\mathbf{e}_{i+1} = d\xi_i d\xi_{i+1}$ и, аналогично, если $\xi_i > s_0, \xi_{i+1} < s_0$ (или $\xi_i < s_0, \xi_{i+1} > s_0$), то $d\mathbf{e}_i d\mathbf{e}_{i+1} = \cos \alpha d\xi_i d\xi_{i+1}$. Подставляя эти результаты в (1.3) и интегрируя по всем ξ_i , кроме ξ_1 , получим

$$\sigma = \int_0^s K(s, \xi; s_0, \alpha) d\mathbf{e}(\xi) \quad (1.4)$$

Входящее в (1.4) ядро K в дальнейшем для краткости будем обозначать $K(s, \xi)$, опуская зависимость от s_0 и α . Это ядро вычисляется по формуле ($h(x)$ — функция Хевисайда):

$$K(s, \xi) = \sum_n \int_0^s \dots \int_0^s K_{2n+1}(s, \xi, \xi_2, \dots, \xi_{2n+1}) \prod_{i=1}^n H_{2i, 2i+1} d\xi_i d\xi_{i+1} \quad (1.5)$$

$$H_{2i, 2i+1} = h((\xi_{2i} - s_0)(\xi_{2i+1} - s_0)) + \cos \alpha h((\xi_{2i} - s_0)(s_0 - \xi_{2i+1}))$$

следующей из общего выражения (1.3) при учете частных особенностей геометрии траекторий рассматриваемого класса.

Перепишем (1.4) в виде

$$\sigma = \int_0^{s_0} K(s, \xi) d\xi \mathbf{p}_0 + \int_{s_0}^s K(s, \xi) d\xi \mathbf{p} \quad (1.6)$$

где $\mathbf{p}_0 = d\mathbf{e}/ds$ при $s < s_0$ и $\mathbf{p} = d\mathbf{e}/ds$ при $s > s_0$. Процесс деформации лежит в одной плоскости, поэтому можно выразить $\mathbf{p}_0$ через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{p}_0 = \cos \alpha \mathbf{p} + \sin \alpha \mathbf{n} \quad (1.7)$$

Из формул (1.6), (1.7) и (1.1) следует, что

$$U(s) = \int_0^{s_0} K(s, \xi) d\xi \cos \alpha + \int_{s_0}^s K(s, \xi) d\xi \quad (1.8)$$

$$V(s) = \int_0^{s_0} K(s, \xi) d\xi \sin \alpha$$

Отсюда легко получить соотношение

$$U(s) = \Phi_\alpha(s) - V(s) \operatorname{tg} 1/2 \alpha, \quad \Phi_\alpha(s) \equiv \Phi(s; s_0, \alpha) = \int_0^s K(s, \xi) d\xi$$

Если в разложении (1.2) ограничиться только первым членом, что соответствует «эндохронному материалу» [11], то $\Phi_\alpha(s) \equiv \Phi(s)$ — функция упрочнения при простом нагружении.

2. Сложность траектории деформации характеризуют четыре параметра

$$k_j(s) = \int_{s-\lambda}^s |\kappa_j(\xi)| d\xi \quad (j=1, \dots, 4)$$

где κ_1 — кривизна, а остальные κ_i — кручения траектории. Говорят, что траектория имеет малую кривизну, если $k_1 < k_1 \ll 1$.

Рассмотрим процесс деформаций, траектория которого имеет вид двузвенной кривой со звеньями малой кривизны. Пусть P_1 и P_2 — соприкасающиеся плоскости к траектории деформации в точках $s_0 - 0$ и $s_0 + 0$ соответственно. Если $s - s_0 > \lambda$ (или $s - s_0 < \lambda$), то σ и e связаны между собой по законам теории процессов малой кривизны $\sigma = \Phi(s)p(s)$, поэтому интерес представляет только случай, когда $0 < s_0 - s_0 < \lambda$. В силу предположений, сделанных о кривизне звеньев, можно считать, что до (после) точки излома на длине следа запаздывания траектория деформации полностью лежит в плоскости P_1 (P_2). Учитывая это, рассмотрим произведе-

дение $de_i de_{i+1} = \cos \gamma_{i, i+1} d\xi_i d\xi_{i+1}$, где $\gamma_{i, i+1} = \gamma(\xi_i, \xi_{i+1})$ — угол между касательными к траектории деформации в точках ξ_i и ξ_{i+1} . Если ξ_i или ξ_{i+1} совпадают с точкой излома, то угол $\gamma_{i, i+1}$ конечно неопределен, но для дальнейшего это не имеет значения.

Если $\xi_i, \xi_{i+1} < s_0$ (или $\xi_i, \xi_{i+1} > s_0$), то $|\gamma_{i, i+1}| \sim k_1 \ll 1$, а следовательно, $\cos \gamma_{i, i+1} \approx 1$. При $\xi_i < s_0, \xi_{i+1} > s_0$ (или $\xi_i > s_0, \xi_{i+1} < s_0$) аналогично получаем, что с точностью до $O(k_1)$

справедливо равенство $\cos \gamma_{i, i+1} \approx \cos \alpha$. Поэтому для σ по-прежнему верна формула (1.4) с тем же, что и ранее, ядром K (см. (1.5)).

Имея в виду дальнейшие преобразования, перепишем (1.4) с учетом свойства запаздывания

$$\sigma = \int_{s_0}^s K(s, \xi) de(\xi) + \int_{s_0-\lambda}^{s_0} K(s, \xi) de(\xi) \quad (2.1)$$

Поскольку до и после точки излома траектория лежит в соответствующих соприкасающихся плоскостях P_1 и P_2 ($s - s_0 < \lambda$), то с точностью $O(k_1)$ можно считать, что $de(\xi) \approx p(s)d\xi$ при $\xi > s_0$ и $de(\xi) = p_0 d\xi$ при $\xi < s_0$, где $p(s) = de/ds$, $p_0 = p(s_0 - 0)$. Подставляя эти значения $de(\xi)$ в (2.1) и используя соотношение (1.8) совместно со свойством запаздывания, получим

$$\sigma = (V(s)/\sin \alpha)p_0 + (U(s) - V(s) \operatorname{ctg} \alpha)p(s) \quad (2.2)$$

В этой формуле учтено, что в момент излома соприкасающаяся плоскость может повернуться, т. е. $P_1 \neq P_2$. Если этого не происходит и $P_1 = P_2$, то (2.2) упрощается и приобретает вид

$$\sigma = U(s)p(s) + V(s)n(s) \quad (2.3)$$

Существенно, что функции U и V в (2.2) и в (2.3) те же самые, что и в случае, когда траектория имеет прямые звенья; направление же векторов p и n зависит от s . Точность выписанных формул та же, что и у

соотношений малой кривизны, т. е. поправками порядка $\Phi(s)O(k_1)$ пренебрегаем.

На фигуре приведено сравнение экспериментальных (светлые точки, [9]) и расчетных (с использованием (2.3), сплошная линия) траекторий пластических деформаций e^p после излома. Эксперименты выполнялись на латуни BsBM1, траектории нагружения представляли собой двузвенные ломанные в пространстве напряжений с углами излома, соответственно: 1 — 90° , 2 — 120° , 3 — 135° , 4 — 150° , 5 — 180° . Методика расчета достаточно громоздка и совпадает с [9].

3. Несколько сложнее выглядят соотношения пластичности, если второе звено двузвенной траектории деформации — кривая средней кривизны [3, 4], т. е. $k_1 < 1$; k_1^2 , $k_1 \ll 1$ при $s > s_0$, а при $s < s_0$ k_1 , $k_1 \ll 1$.

Рассуждая, как и в п. 2, имеем, что при ξ_i , $\xi_{i+1} < s_0$ (или ξ_i , $\xi_{i+1} > s_0$) $|\gamma_{i, i+1}|^2 \sim k_1^2 \ll 1$ и, следовательно, $\cos \gamma_{i, i+1} \simeq 1 + O(k_1^2)$ и

$$de_i de_{i+1} \simeq (1 + O(k_1^2)) d\xi_i d\xi_{i+1} \quad (3.1)$$

Если же $\xi_i < s_0$, $\xi_{i+1} > s_0$, то, так как на длине следа запаздывания после точки излома траектория деформации принадлежит P_2 [4], имеем

$$de_{i+1} \simeq (\cos \gamma_{i+1} p_+ + \sin \gamma_{i+1} n_+) d\xi_{i+1} \quad (3.2)$$

$$p_+ = p(s_0 + 0), \quad n_+ = n(s_0 + 0), \quad \gamma_{i+1} = \gamma(s_0 + 0, \xi_{i+1}), \quad |\gamma_{i+1}|^2 \ll 1$$

Поэтому (3.2) можно преобразовать к виду $de_{i+1} \simeq (p_+ + \gamma_{i+1} n_+ + O(k_1^2)) d\xi_{i+1}$. Для de_i по-прежнему справедливо равенство $de_i \simeq p_0 d\xi_i$, $p_0 = p(s_0 - 0)$. Таким образом

$$de_i de_{i+1} \simeq (\cos \alpha + \gamma_{i+1} \cos \beta) d\xi_i d\xi_{i+1} \quad (3.3)$$

$$\cos \alpha = p_+ p_0, \quad \cos \beta = n_+ p_0$$

Если $\xi_i > s_0$, $\xi_{i+1} < s_0$, то в (3.3) i и $i+1$ нужно поменять местами.

Подставим (3.1) и (3.3) в (1.2) и выполним интегрирование, учитывая, что ядра K_{2n+1} симметричны по ξ_i . С точностью $\Phi(s)O(k_1^2)$ можно представить результат в следующем виде:

$$\sigma = \int_0^s K(s, \xi) de(\xi) + \int_0^s \int_{s_0}^s B(s, \xi, \eta) \gamma(\eta) d\eta de(\xi) \cos \beta, \quad \gamma(\eta) = \int_{s_0}^\eta \kappa(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

Здесь $\gamma(\eta)$ — угол поворота касательной к траектории деформации от точки $s_0 + 0$ до точки η , ядро K по-прежнему определено в (1.5), а $B(s, \xi, \eta) = B(s, \xi, \eta; s_0, \alpha)$ — некоторое новое ядро, однозначно определяемое ядрами K_{2n+1} .

Преобразуем (3.4) к более удобному виду. Для этого разложим $de(\xi)$ по векторам $p(s)$ и $n(s)$; с точностью $O(k_1^2)$ имеем

$$de(\xi) \simeq (p(s) + \gamma(\xi, s) n(s)) d\xi \quad (3.5)$$

Как и прежде, достаточно рассмотреть только те s , когда $s - s_0 < \lambda$ (так как в противном случае справедливы соотношения средней кривизны [3, 4]). Подставляя (3.5) в (3.4), после несложных преобразований, используя (2.1) и (1.8), получим

$$\begin{aligned} \sigma = & (V(s)/\sin^2 \alpha) p_0 + (U(s) - V(s) \operatorname{ctg} \alpha) p(s) + \int_{s_0}^s K_0(s, \xi) \kappa(\xi) d\xi n(s) + \\ & + \int_{s_0}^s B_0(s, \xi) \kappa(\xi) d\xi \cos \beta p(s) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$K_0(s, \xi) = - \int_{s_0}^\xi K(s, \eta) d\eta, \quad B_0(s, \xi) = \int_{s_0}^s \int_{\eta}^s B(s, \xi, \xi_1) d\xi_1 d\eta \quad (3.7)$$

Ядра K_0 и B_0 зависят от s , ξ , s_0 и α и могут быть определены из экспериментов по траекториям в виде трехзвенной ломаной.

Предположим, что ядро K (1.5) допускает факторизацию [12]:

$$K(s, \xi) = K_1(s) K_2(\xi) \quad (3.8)$$

где K_1 , K_2 зависят также от s_0 и α . Используя (1.8) и определение ядра K_0 (3.7), можно показать, что при условии (3.8) и $s > \xi > s_0$ ядро K_0 имеет вид $K_0(s, \xi) = -V(s) (U(\xi)/V(\xi) - \operatorname{ctg} \alpha)$.

Особенно просто выглядит связь $\sigma \sim e$ в случае, когда $\cos \beta = 0$, что соответствует ортогональности векторов $\mathbf{n}_+$ и $\mathbf{p}_0$ и означает, что плоскость P_2 ортогональна плоскости P_0 , определяемой векторами $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_+$. Соотношение пластичности имеет вид

$$\sigma = \frac{V(s)}{\sin \alpha} \mathbf{p}_0 + (U(s) - V(s) \operatorname{ctg} \alpha) \mathbf{p}(s) - V(s) \int_{s_0}^s \left(\frac{U(\xi)}{V(\xi)} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \kappa(\xi) d\xi \mathbf{n}(s) \quad (3.9)$$

Точность равенств (3.6), (3.9) та же, что и точность соотношений средней кривизны $\Phi(s) O(k_1^2)$ [3, 4].

Факторизация ядра (3.8) следует из предположения о том, что ориентация вектора σ остается неизменной на участке локально простого деформирования², т. е. такого, что

$$de/ds = \sigma/|\sigma| \quad (3.10)$$

Покажем это, рассмотрев для простоты траектории деформации, лежащие в одной плоскости.

Пусть при $s_0 < s < s_1$ траектория определяется кривизной $\kappa(s) = \kappa_0(s)$, а в момент $s = s_1$ происходит излом траектории так, что $\mathbf{p}(s_1+0) = d\mathbf{e}(s_1+0)/ds = \sigma(s_1)/|\sigma(s_1)| = \mathbf{p}_1$, и далее $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_1$ при $s > s_1$. Представим $\mathbf{p}_0$ в виде

$$\mathbf{p}_0 = \cos \varphi \mathbf{p}_1 + \sin \varphi \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} \perp \mathbf{p}_1), \quad \cos \varphi = \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.6), получим, что для выполнения (3.10) необходимо условие

$$\frac{V(s)}{\sin \alpha} \sin \varphi + \int_{s_0}^{s_1} K_0(s, \xi) \kappa_0(\xi) d\xi = 0$$

при любом $s > s_1$, если это равенство справедливо при $s = s_1$. Поскольку κ_0 и s произвольны, то отсюда следует, что $K_0(s, \xi)$ можно представить в виде (3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред. — ПММ, 1954, т. 18, вып. 6, с. 641–666.
3. Малый В. И. Разложение функционала напряжений по малому параметру. — Вестн. МГУ. Математика, механика, 1967, вып. 2, с. 73–80.
4. Малый В. И. Об упрощении функционалов теории упругопластических процессов. — Прикл. механика, 1978, т. 14, вып. 2, с. 48–53.
5. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении. — Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1971, вып. 1, с. 59–126.

² Такое поведение вектора σ отмечается в экспериментах В. С. Ленского. Указ. явл. 122.

6. Дегтярев В. П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1967. 131 с.
7. Москвитин В. В. Вариант связи $\sigma \sim \epsilon$ при переменных нагружениях упругопластических тел.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, вып. 2, с. 329–332.
8. Шишмарев О. А., Щербо А. Г. Образ процесса нагружения для двухзвенных ломанных траекторий деформации с углом излома более 90° .— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, вып. 5, с. 185–189.
9. Shiratori E., Ikegami K., Yoshida F. Analysis of stress-strain relations by use of an anisotropic hardening plastic potential.— J. Mech. and Phys. Solids, 1979, v. 27, No. 3, p. 213–229.
10. Лези П. Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967. 510 с.
11. Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surface. II.— Arch. mech. stosow., 1971, v. 23, No. 4, p. 535–551.
12. Кравчук А. С. О методе последовательных приближений в теории пластичности при сложном нагружении.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 188–191.

Москва

Поступила в редакцию
22.V.1984