МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1985

УДК 539.214;539.374

О ПРОСТЕЙШИХ ЛОКАЛИЗАЦИОННЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ

РЫЖАК Е. И.

Понятие локализационной формы потери устойчивости было введено в механику упругопластических сред в [1] и стало центральным элементом модели зарождения разрывных нарушений, разработанной школой Дж. Райса.

Заложенные в [1] представления о неустойчивости локализационного типа получили несколько иное развитие в модели локализации, предложенной и в основных аспектах исследованной в [2–4]. Публикуемая работа посвящена дальнейшему более узкому исследованию этой модели с целью выявления и анализа в ее рамках тех простейших математических конструкций, которые позволяют без привлечения «правдоподобных» рассуждений воспроизводить основные свойства локализации, выявленные в ходе первоначального анализа модели.

Эти свойства таковы: локализация является существенно нелинейным интегральным эффектом, порождаемым разномодульностью материала (активное нагружение – разгрузка) в совокупности со стесняющим действием граничных условий; она проявляется в концентрации деформации вполне определенного вида в бесконечно тонких слоях, определенным образом ориентированных по отношению к осям напряжений, причем соответствующая деформация в плоскости слоя локализации равна нулю.

Две рассмотренные в работе задачи об отыскании экстремума некоторых специальных тензорных функций (названных локализационными потенциалами) возникли как модельные задачи нахождения наивыгоднейшей (в смысле того принципа отбора [1], который принят в модели) формы потери устойчивости тела, состоящего из внутренне неустойчивого упругопластического материала и находящегося в определенных условиях стеснения. «Модельность» этих задач, являющихся задачами с неизвестной упругопластической границей, заключается в ограничительных априорных предписаниях, касающихся формы области пластического догружения и распределения виртуальных деформаций в ней: форма задается с точностью до нескольких свободных параметров, а распределение виртуальных деформаций в области догружения считается однородным.

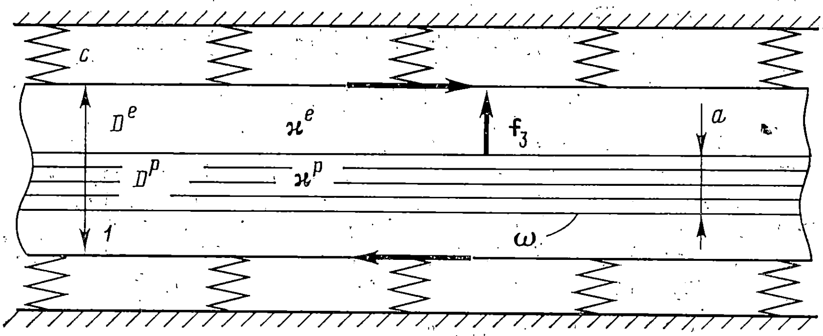
1. Определяющий закон. Критерий неустойчивости. Принцип отбора первой формы потери устойчивости. В работе принят предельно упрощенный вариант инкрементального упругопластического определяющего закона, предложенного в [1] и использованного в [2–4]. Пусть

$$\delta^J\mathbf{T}=\begin{cases}\mathbf{L}^p:\delta\mathbf{D}, & \delta\mathbf{D}:\mathbf{S}>0\\ \mathbf{L}^e:\delta\mathbf{D}, & \delta\mathbf{D}:\mathbf{S}\leqslant 0\end{cases}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\delta^J\mathbf{T}$ — яуманово приращение этого тензора в данной материальной точке, $\mathbf{L}^p$ и $\mathbf{L}^e$ — тензоры пластических и упругих моделей соответственно, $\delta\mathbf{D}$ — тензор малых деформаций, отсчитываемых от состояния с напряжениями $\mathbf{T}$, двоеточие соответствует свертке по двум индексам, $\mathbf{S}$ — тензор, задающий единичную нормаль к поверхности текучести $(\mathbf{S}:\mathbf{S}=1)$. Положим

$$\mathbf{L}^p=h\mathbf{P}^s+\mathbf{P}^\perp,\quad \mathbf{L}^e=\mathbf{1},\quad \mathbf{S}=\mathbf{S}_0+(\alpha/3)\mathbf{I} \tag{1.1}$$

где h — пластический модуль, $\mathbf{P}^s=\mathbf{S}\otimes\mathbf{S}$ — ортогональный проектор на направление $\mathbf{S}$ [5], $\mathbf{P}^\perp=\mathbf{1}-\mathbf{P}^s$ — проектор на ортогональное дополнение к $\mathbf{S}$, $\mathbf{1}$ — единичный тензор четвертого ранга, $\mathbf{S}_0$ коллинеарен девиатору напряжений, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, $\alpha\ll 1$ — малая положительная ве-



Фиг. 1

личина. При таком описании величина модуля пластического упрочнения h является единственной мерой конечной деформации, т. е. показателем того, какой точке диаграммы пластического нагружения соответствует состояние элемента материала. Поскольку в работе считается, что тело испытывает активное однородное нагружение вплоть до момента потери устойчивости, когда могут появиться неоднородно распределенные деформации, то величина h и тензор $\mathbf{S}$ являются параметрами, характеризующими состояние тела в целом.

Энергетический критерий неустойчивости [2—4] сводится к неположительности баланса вторых вариаций работ внутренних и внешних сил. В терминах малых виртуальных деформаций, отсчитываемых от исследуемого на устойчивость равновесного состояния, это означает отсутствие положительной определенности кусочно-квадратичного функционала

$$R\{\delta\mathbf{D}\} \equiv \int_{\varkappa} (\delta\mathbf{D} : \mathbf{L} : \delta\mathbf{D} - \delta^J\mathbf{T}^b : \delta\mathbf{D})\, dV \qquad (1.2)$$

где $\delta^J\mathbf{T}^b$ — приращение некоторого фиктивного тензора напряжений, соответствующего приращениям граничных усилий, реагирующих на виртуальные смещения границы [2—4].

Считая, что в процессе пластического нагружения тела величина пластического модуля h монотонно убывает, примем [1, 2—4] в качестве принципа отбора первой формы потери устойчивости отбор по наибольшему критическому значению h.

2. Задача о слое с упругой заделкой. Решается вопрос о «выгодности» или «невыгодности» локализации в зависимости от жесткости стеснения, которому подвержено тело. Не вполне верное решение этой задачи было приведено в [2, 3], а результат правильного решения без самого решения — в [4]. Приведем решение этой задачи, в ходе которого и возникает один из упомянутых в названии локализационных потенциалов.

Пусть тело представляет собой плоский слой единичной толщины в таком напряженном состоянии, что одна из наивыгоднейших плоскостей локализации [2—4] совпадает с плоскостью слоя ω (фиг. 1). На границе слоя имеется упругая заделка жесткости c, реагирующая на изменение толщины слоя. Считается, что «пластические» виртуальные деформации локализуются в слое толщиной a (где $0 \leqslant a \leqslant 1$), а вне этого слоя имеет место упругая разгрузка. Будем искать наивыгоднейшее для возникновения неустойчивости значение $a_*(c)$.

В силу геометрии слоя и предположенной однородности виртуальных деформаций, соответствующих пластическому догружению, наивыгоднейшее распределение соответствующих разгрузке виртуальных деформаций $\delta\mathbf{D}^e$ будет также однородным. Отбросим (здесь и в дальнейшем) значок приращения δ и индекс p у $\mathbf{D}^p$. Тогда в расчете на единицу площади слоя (1.2) примет вид:

$$R=a\{h(\mathbf{D}:\mathbf{S})^2+\mathbf{D}:\mathbf{D}-(\mathbf{D}:\mathbf{S})^2\}+(1-a)\mathbf{D}^e:\mathbf{D}^e+$$
$$+c\{a\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{f}_3+(1-a)\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{f}_3\}^2 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{f}_3$ — единичная нормаль к ω (фиг. 1).

Пусть $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ — произвольный ортонормированный базис в плоскости ω. Введем три связанных с плоскостью ω ортогональных проектора $\mathbf{M}_i$, действующих в пространстве тензоров деформаций. Запишем их как в координатной форме в базисе $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, так и в бескоординатной с помощью тензорного квадрата нормали к плоскости $\mathbf{N}\equiv\mathbf{f}_3\otimes\mathbf{f}_3$:

$$\mathbf{M}_1:\mathbf{D}\equiv\begin{Vmatrix} D_{11} & D_{12} & 0\\ D_{21} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}=(\mathbf{I}-\mathbf{N})\otimes(\mathbf{I}-\mathbf{N})^{(1324)}:\mathbf{D}$$

$$\mathbf{M}_2:\mathbf{D}\equiv\begin{Vmatrix} 0 & 0 & D_{13}\\ 0 & 0 & D_{23}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33}\end{Vmatrix}=[(\mathbf{I}-\mathbf{N})\otimes\mathbf{N}+\mathbf{N}\otimes(\mathbf{I}-\mathbf{N})]^{(1324)}:\mathbf{D} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{M}_3:\mathbf{D}\equiv\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D_{33}\end{Vmatrix}=\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}:\mathbf{D}=\mathbf{P}^N:\mathbf{D}$$

где (1324) означает соответствующую перестановку векторов в тензорном произведении: $\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_4{}^{(1324)}\equiv\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_4$.

Условие непрерывности смещений примет вид: $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}=\mathbf{M}_1:\mathbf{D}^e$. Принимая нормировочное условие (с учетом условия активного нагружения) в виде

$$\mathbf{D}:\mathbf{S}=1 \tag{2.3}$$

и приравнивая R нулю, получим $1-h=\mathbf{D}:\mathbf{D}+(1-a)a^{-1}\mathbf{D}^e:\mathbf{D}^e+ca^{-1}(a\mathbf{N}:\mathbf{D}+(1-a)\mathbf{N}:\mathbf{D}^e)^2$. Будем минимизировать $(1-h)$ по $(\mathbf{D}, \mathbf{D}^e, a)$ при условии непрерывности смещений и условии (2.3). Подставляя $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}$ вместо $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}^e$ и минимизируя затем по $\mathbf{D}^e$, получим $\mathbf{M}_2:\mathbf{D}^e=0$, $\mathbf{M}_3:\mathbf{D}^e=-ac(1+(1-a)c)^{-1}\mathbf{M}_3:\mathbf{D}$. Таким образом

$$1-h=F(a,\mathbf{D})\equiv\mathbf{D}:\mathbf{D}+\frac{1-a}{a}\mathbf{D}:\mathbf{M}_1:\mathbf{D}+\frac{ac}{1+c-ac}\mathbf{D}:\mathbf{M}_3:\mathbf{D} \tag{2.4}$$

минимизируется при условии (2.3).

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, получаем

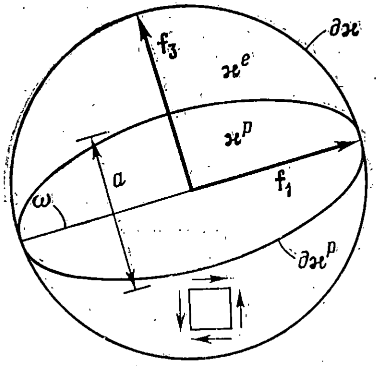
$$\mathbf{D}=\lambda\{a\mathbf{M}_1:\mathbf{S}+\mathbf{M}_2:\mathbf{S}+(1-c(1+c)^{-1}a)\mathbf{M}_3:\mathbf{S}\} \tag{2.5}$$

причем минимальное значение $F_*(a)=\lambda$. С учетом (2.3):

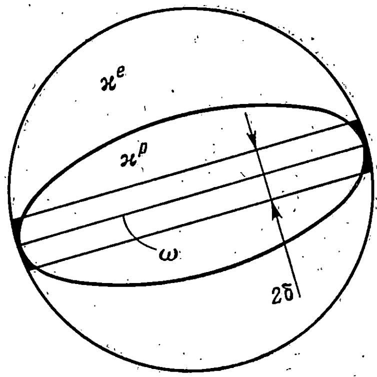
$$\lambda=(A_2+A_3+(A_1-c(1+c)^{-1}A_3)a)^{-1};\quad A_i\equiv\mathbf{S}:\mathbf{M}_i:\mathbf{S} \tag{2.6}$$

Очевидно, что минимум $F_*(a)$ достигается при $a=0$, если $c/(1+c)>A_1/A_3$, и при $a=1$, если $c/(1+c)<A_1/A_3$. Значение $c_*=(A_3/A_1-1)^{-1}$ является пороговым для того, чтобы локализация стала выгодна (полная локализация [2–4] означает $a=0$), причем из (2.5) видно, что $\mathbf{D}_*=(A_2+A_3)^{-1}(\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3):\mathbf{S}$; $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}_*=0$, что совпадает с решением задачи о полной локализации [4], хотя, в отличие от этой задачи, условие $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}=0$ заранее не налагалось.

Таким образом, свойства функции (2.4) (первого из простейших локализационных потенциалов), минимизируемой при условии (2.3), моделируют зависимость тенденции к локализации от жесткости стеснения.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Задача о шаре. Изучается, выгодна ли локализация при тех или иных значениях $\mathbf{S}$ в условиях изотропного кинематического стеснения специального вида (понятие кинематического стеснения определено в [2—4]). Исследуемое на устойчивость тело конечно во всех трех измерениях (шар), и допускается варьирование не только толщины области локализации, но и ее ориентации по отношению к осям напряжений. В ходе решения возникает вторая из упомянутых тензорных функций.

Очевидно, что шар — это единственная форма тела, обладающая тем свойством, что вращение некоторой внутренней области не меняет ее расположения относительно границы тела, т. е. действительно можно говорить об изотропном стеснении. Итак, тело — шар единичного радиуса. Будем предполагать, что область пластического догружения является эллипсоидом вращения, касающимся поверхности шара по экваториальной окружности (фиг. 2). Малая полуось a эллипсоида может варьироваться в пределах от нуля до единицы, наклон экваториальной плоскости к осям $\mathbf{S}$ также может варьироваться.

Как уже говорилось, в области $\varkappa^p$ предполагается однородность виртуальных деформаций $\mathbf{D}$. Вне эллипсоида виртуальные деформации предполагаются соответствующими упругой разгрузке и, вообще говоря, неоднородными.

Принимается следующее условие кинематического стеснения: поверхность шара при виртуальных смещениях деформируется так, как если бы шар испытывал однородную виртуальную деформацию без изменения объема (это вовсе не означает однородности виртуальных деформаций внутри шара).

В случае кинематического стеснения в (1.2) второе слагаемое (связанное с работой граничных усилий) исчезает, но пробные поля деформаций не произвольны, они должны удовлетворять условию стеснения.

Поставим задачу о нахождении критических значений параметров, соответствующих первому вырождению R. К параметрам относятся: величина пластического модуля h, ориентация плоскости ω относительно осей напряжений, задаваемая нормалью $\mathbf{f}_3$, «толщина» зоны a и тензор $\mathbf{D}$.

Охарактеризуем путь решения задачи. Поскольку ищется максимальное значение модуля h, то «виртуальная упругая энергия» $\int \mathbf{D}^e : \mathbf{L}^e : \mathbf{D}^e dV$ (по $\varkappa^e$) должна быть минимальной при заданных $\mathbf{D}$ и граничных условиях, что означает соответствие виртуальных деформаций в $\varkappa^e$ «упругому равновесию». Равновесное значение виртуальной упругой энергии может быть оценено снизу и сверху с помощью функционалов, входящих в вариационные теоремы Кастильяно и Лагранжа [6], что позволяет избежать необходимости находить точное решение задачи теории упругости в $\varkappa^e$. Мажорирующие выражения для виртуальной упругой энергии позволяют получить оценки сверху и снизу для критического значения h. Используя оценку для h сверху, найдем ее максимальное значение. Получим, что оно соответствует либо полной локализации ($a=0$), либо полной однородности ($a=1$). Затем, используя оценку для h снизу, покажем, что в этих случаях оценки сверху и снизу совпадают, т. е. максимальное значение оценки сверху является точным максимальным значением h.

Для реализации этого плана введем некоторые обозначения. Пусть ($\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$) — ортонормированный базис, причем $\mathbf{f}_3$ ортогонален плоскости ω (фиг. 2). Тензор, определяющий виртуальную деформацию поверхности шара $\partial\varkappa$, обозначим через $\langle\mathbf{D}\rangle$, а тензор виртуального поворота $\partial\varkappa$ — через $\langle\mathbf{W}\rangle$. Входящий в функционал Кастильяно «тензор напряжений» $\mathbf{L}^e:\mathbf{D}^e$ обозначим через $\mathbf{K}$. Проекцию радиус-вектора $\mathbf{r}$ на плоскость ω обозначим через $\mathbf{x}$, на нормаль к плоскости — через $y\mathbf{f}_3$.

Пусть $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ — ортогональные проекторы (2.2). Поскольку кривая касания эллипсоида и шара лежит в плоскости ω, то $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}=\mathbf{M}_1:\langle\mathbf{D}\rangle$. Выясним теперь граничные условия для $\mathbf{K}$ на $\partial\varkappa$ (вытекающие из того, что работа поверхностных сил на допустимых перемещенных границах должна быть равна нулю). Обозначая через $\mathbf{n}$ нормаль к поверхности, получим

$$\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma=\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{r}\cdot(\langle\mathbf{W}\rangle+\langle\mathbf{D}\rangle)\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma=\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{n}\cdot(\langle\mathbf{W}\rangle+\langle\mathbf{D}\rangle)\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma=$$

$$=\frac{4\pi}{3}(\langle\mathbf{W}\rangle+\langle\mathbf{D}\rangle):\langle\mathbf{K}\rangle=0$$

$$\frac{4\pi}{3}\langle\mathbf{K}\rangle\equiv\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{n}\otimes\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma$$

Равенство должно выполняться для любого антисимметричного $\langle\mathbf{W}\rangle$ и любого симметричного $\langle\mathbf{D}\rangle$, такого, что $\langle\mathbf{D}\rangle:\mathbf{I}=0$. Таким образом, граничное условие для $\mathbf{K}$ сводится к тому, что $\langle\mathbf{K}\rangle$ должен быть шаровым тензором:

$$\langle\mathbf{K}\rangle=(\langle\mathbf{K}\rangle:\mathbf{I}/3)\mathbf{I} \tag{3.1}$$

Принимая нормировочное условие (2.3) и приравнивая R нулю, получим (V^p — объем $\varkappa^p$):

$$1-h=\mathbf{D}:\mathbf{D}+(V^p)^{-1}\int\limits_{\varkappa^e}\mathbf{K}:\mathbf{K}\,dV=\min$$

Чтобы оценить $(1-h)$ снизу, заменим $\int\mathbf{K}:\mathbf{K}dV$ (по $\varkappa^e$) соответствующим функционалом Кастильяно:

$$E\equiv-2\int\limits_{\partial\varkappa^p}\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma-\int\limits_{\varkappa^e}\mathbf{K}:\mathbf{K}\,dV$$

где поле $\mathbf{K}$ удовлетворяет уравнениям равновесия и силовым граничным условиям. Тогда

$$1-h\geqslant\mathbf{D}:\mathbf{D}+(V^p)^{-1}E \tag{3.2}$$

Подберем наиболее простое оценочное равновесное распределение $\mathbf{K}$, такое, чтобы E качественно верно отражало зависимость виртуальной упругой энергии от a и $\mathbf{D}$. Конкретно, при $a\to0$, $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}\neq0$, виртуальная упругая энергия должна быть порядка $\mathbf{D}:\mathbf{M}_1:\mathbf{D}$; при $a\to1$, $\mathbf{D}:\mathbf{I}\neq0$ упругая энергия должна неограниченно расти.

Воспользуемся разрывным оценочным полем $\mathbf{K}$. Вырежем в теле тонкий слой $y\in[-\delta,\delta]$ (фиг. 3). Пусть $\mathbf{K}=(2\delta)^{-1}\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2$ в пересечении $\varkappa^e$ и тонкого слоя, $\mathbf{K}=\mathbf{K}_2$ в $\varkappa^e$ вне тонкого слоя, причем $(1-\mathbf{M}_1):\mathbf{K}_1=0$. Очевидно, что если E дает оценку снизу при любом конечном δ, то и предел E при $\delta\to0$ (если он существует) также будет служить такой оценкой.

Определим это предельное значение E и найдем его максимум по $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ с учетом (3.1). Получим ($\mathbf{I}_1 \equiv \mathbf{M}_1 : \mathbf{I}$):

$$E_0 = (4\pi/3)(1-a)\{\mathbf{D} : \mathbf{M}_1 : \mathbf{D} + (\mathbf{I}_1 : \mathbf{D} + a(1-a)^{-1}\mathbf{I} : \mathbf{D})^2\} \tag{3.3}$$

Возвращаясь к задаче о нахождении критического значения h и соответствующей формы потери устойчивости и вводя обозначение $\xi \equiv a(1-a)^{-1}$, получим в качестве следствия (3.2):

$$\begin{gathered}(1-h)_{\min} \geqslant \min_{\mathbf{D}:\mathbf{S}=1} G(\xi, \mathbf{D}) \\ G(\xi, \mathbf{D}) \equiv \mathbf{D} : \mathbf{D} + \frac{1}{\xi}\mathbf{D} : \mathbf{M}_1 : \mathbf{D} + \xi\left(\mathbf{I} : \mathbf{D} + \frac{1}{\xi}\mathbf{I}_1 : \mathbf{D}\right)^2\end{gathered} \tag{3.4}$$

Функция $G(\xi, \mathbf{D})$ и есть второй из простейших локализационных потенциалов. Чтобы показать это, найдем условный экстремум (3.4).

Функция G зависит от ξ, $\mathbf{D}$, $\mathbf{f}_3$. Прежде всего найдем минимум по $\mathbf{D}$ при условии (2.3). Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, получим

$$\mathbf{D} = \lambda\left\{\frac{\xi}{1+\xi}\left(\mathbf{M}_1 : \mathbf{S} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} : \mathbf{S})\mathbf{I}\right) + (\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3) : \mathbf{S}\right\}, \quad G(\xi, \mathbf{D}) = \lambda \tag{3.5}$$

Подставляя $\mathbf{D}$ в (2.3), имеем

$$\min_{\mathbf{D}:\mathbf{S}=1} G(\xi, \mathbf{D}) = \left\{1 - A_1 + \frac{\xi}{1+\xi}\left(A_1 - \frac{\alpha^2}{3}\right)\right\}^{-1} \tag{3.6}$$

В силу монотонности $\xi(1+\xi)^{-1} = a$ минимизация по ξ приведет либо к $\xi = 0$ ($a = 0$), либо к $\xi = +\infty$ ($a = 1$) в зависимости от соотношения между A_1 и $\alpha^2/3$. Величина A_1 в свою очередь зависит от вида тензора $\mathbf{S}$ и от ориентации плоскости ω.

Покажем, что в обоих предельных случаях ($\xi = 0$ и $\xi = +\infty$) функция $G(\xi, \mathbf{D})$ дает точное значение величины $(1-h)$. Для этого получим для $(1-h)$ оценку сверху путем замены виртуальной упругой энергии функционалом Лагранжа, т. е. упругой энергией от кинематически допустимых полей виртуальных деформаций в $\varkappa^e$ (которые не обязаны удовлетворять «уравнению равновесия» $\nabla \cdot \mathbf{L}^e : \mathbf{D}^e = 0$). Конкретно зададим перемещения в $\varkappa^e$ в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{u}|_{\varkappa^e} = (\mathbf{M}_1 : \mathbf{D}) \cdot \mathbf{x} + \frac{a}{1-a}(\mathbf{U} - \langle\mathbf{U}\rangle)\sqrt{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} + \\ + \frac{1}{1-a}(\langle\mathbf{U}\rangle - a\mathbf{U})y + \mathbf{W} \cdot \mathbf{r}\end{gathered}$$

$$\mathbf{U} \equiv 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}_3 - (\mathbf{D} : \mathbf{N})\mathbf{f}_3, \quad \langle\mathbf{U}\rangle \equiv a(\mathbf{M}_2 : \mathbf{D}) \cdot \mathbf{f}_3 - (\mathbf{D} : \mathbf{I}_1)\mathbf{f}_3$$

где $\mathbf{W}$ — некоторый антисимметричный тензор. Тогда получим

$$\begin{gathered}1 - h \leqslant G_1(\xi, \mathbf{D}), \quad G_1(\xi, \mathbf{D}) \equiv \mathbf{D} : \mathbf{D} + \frac{1-a}{a}\mathbf{D} : \mathbf{M}_1 : \mathbf{D} + \\ + 3a(1-a)\mathbf{D} : \mathbf{M}_2 : \mathbf{D} + \frac{2a}{1-a}\mathbf{D} : \mathbf{M}_3 : \mathbf{D} + \\ + \frac{2(1+a)}{1-a}(\mathbf{D} : \mathbf{N})(\mathbf{D} : \mathbf{I}_1) + \frac{1+a^2}{a(1-a)}(\mathbf{D} : \mathbf{I}_1)^2\end{gathered}$$

Минимизация $G_1(\xi, \mathbf{D})$ по $\mathbf{D}$ при условии (2.3) дает

$$\min_{\mathbf{D}:\mathbf{S}=1} G_1(\xi, \mathbf{D}) = \left\{a\left(A_1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) + A_2 + \frac{1+a^2}{1+a}A_3\right\}^{-1}$$

Очевидно, что при $a=0$ и $a=1$ результат совпадает с (3.6), так что (3.6) в этих предельных случаях дает точное значение $(1-h)$. Заметим, что при $\xi=0$ (3.5) дает $\mathbf{D}_*=(A_2+A_3)^{-1}(\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3):\mathbf{S}$, так что $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}_*=0$.

Из (3.6) следует, что если некоторая ориентация плоскости ω доставляет величине A_1 минимум и $A_1^{\min}<\alpha^2/3$, то выгодна полная локализация. Считая, что $\alpha\ll 1$, определим вид тех тензоров $\mathbf{S}$, для которых локализация выгодна.

Для $\mathbf{S}_0$ имеет место следующее представление:

$$\mathbf{S}_0=\sqrt{1-\alpha^2/3}\,(\mathbf{S}_1\cos\varphi+\mathbf{S}_2\sin\varphi) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{S}_1\equiv(1/\sqrt{2})\,(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2),\quad \mathbf{S}_2=(1/\sqrt{6})\,(-\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)$$

где $\{\mathbf{e}_i\}$ — нормированные собственные векторы $\mathbf{S}$, $\varphi\in[-\pi/6,\ \pi/6]$. Из решения задачи о полной локализации [4] вытекает, что $A_1^{\min}$ равно квадрату наименьшего собственного числа тензора $\mathbf{S}$. Обозначим собственные числа $\mathbf{S}$ через s_i. Тогда $s_1=\sqrt{1-\alpha^2/3}\,(\cos\varphi/\sqrt{2}-\sin\varphi/\sqrt{6})+\alpha/3$, $s_2=\sqrt{1-\alpha^2/3}\times(-\cos\varphi/\sqrt{2}-\sin\varphi/\sqrt{6})+\alpha/3$, $s_3=\sqrt{1-\alpha^2/3}\,2\sin\varphi/\sqrt{6}+\alpha/3$. Очевидно, что достаточно малым может быть только s_3, для которого, пренебрегая величинами порядка $O(\alpha^2)$, получим

$$-[(\sqrt{3}+1)/\sqrt{6}]\alpha<\varphi<[(\sqrt{3}-1)/\sqrt{6}]\alpha \tag{3.8}$$

Неравенства (3.8) и представление (3.7) определяют те $\mathbf{S}_0$, близкие к девиатору чистого сдвига $\mathbf{S}_1$, для которых описанное изотропное кинематическое стеснение порождает локализацию, причем критические значения параметров h_*, $\mathbf{D}_*$, ω_* совпадают с решением задачи о полной локализации [4] (где сразу же предполагалось, что $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}=0$); в данной же задаче на $\mathbf{D}$ не накладывалось никаких ограничений, кроме условия активного пластического нагружения, а равенство $\mathbf{M}_1:\mathbf{D}_*=0$ оказалось одним из условий минимальности функции $G(\omega,\xi,\mathbf{D})$.

Заметим, что в задаче о слое условием того, что действительно существует некоторое пороговое значение жесткости стеснения $0\leqslant c_*\leqslant+\infty$, служит неравенство

$$-\pi/6\leqslant\varphi\leqslant\alpha/(2\sqrt{6}) \tag{3.9}$$

Таким образом, в работе на основе решения модельных задач о проявлении внутренней неустойчивости материала при стеснении получены и исследованы тензорные функции

$$F(c,\xi,\mathbf{D})\equiv\mathbf{D}:\mathbf{D}+\frac{1}{\xi}\mathbf{D}:\mathbf{M}_1:\mathbf{D}+\frac{\xi c}{1+c+\xi}\mathbf{D}:\mathbf{M}_3:\mathbf{D}$$

$$G(\omega,\xi,\mathbf{D})\equiv\mathbf{D}:\mathbf{D}+\frac{1}{\xi}\mathbf{D}:\mathbf{M}_1:\mathbf{D}+\xi\left(\mathbf{I}:\mathbf{D}+\frac{1}{\xi}\mathbf{I}:\mathbf{M}_1:\mathbf{D}\right)^2$$

которые могут быть названы простейшими локализационными потенциалами, поскольку их минимизация при условии $\mathbf{D}:\mathbf{S}=1$ приводит к критическим параметрам, описывающим неустойчивость локализационного типа (здесь, в отличие от (2.4), F выражено через $\xi=a(1-a)^{-1}$). Необходимо пояснить, что хотя и F, и G зависят от проекторов $\mathbf{M}_i$, связанных с плоскостью ω, при минимизации F положение самой плоскости не варьируется, а при минимизации G — варьируется. Поэтому параметры, задающие ориентацию ω (например, нормаль $\mathbf{f}_3$), не входят в число аргументов F.

Локализационные потенциалы F и G или вполне аналогичные им по структуре функции являются, по всей видимости, простейшими потенциалами, приводящими к упомянутым критическим параметрам без «лишних» ограничений на $\mathbf{D}$. То, что они по-разному зависят от различных проекций $\mathbf{M}_i : \mathbf{D}$, отражает различный вклад в виртуальную упругую энергию в области разгрузки различных компонент тензора виртуальных пластических деформаций в области локализации.

В силу «неупрощаемости» локализационных потенциалов F и G можно ожидать, что исследование более сложных задач о локализации (при менее сильных априорных предположениях) должно сводиться к приведению этих задач тем или иным путем (скажем, через некие цепочки неравенств) к задачам минимизации этих простейших потенциалов.

Автор благодарен Л. В. Никитину за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rudnicki J. W., Rice J. R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials.– J. Mech. and Phys. Solids, 1975, v. 23, No. 6, p. 371–394.
2. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Разрушение горной породы с внутренним трением и дилантансией.– Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 5, с. 1203–1206.
3. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Закономерности разрушения горной породы с внутренним трением и дилантансией.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1977, № 5, с. 22–37.
4. *Рыжак Е. И.* Об эшелонной структуре как форме потери устойчивости горной породы.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 127–136.
5. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ./Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1964. 424 с.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.V.1984